НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

СТАНЖИЦЬКИЙ АНДРІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

111 — Математика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ______________________________ А.О. Станжицький

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор
Дудкін Микола Євгенович

Київ – 2023

Анотація

Станжицький А. О. Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю «111 — математика» — Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"Міністерства освіти і науки України, Київ, 2023.

Дисертаційна робота присвячена вивченню нескінченновимірних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах, що є математичними моделями найрізноманітніших об'єктів складної природи, еволюція яких відбувається в полі випадкових сил з урахуванням післядії. Найпоширеніші серед таких моделей описуються стохастичними функціонально-диференціальними еволюційними рівнянннями з частинними похідними. На відміну від класичних стохастичних диференціальних рівнянь, які можна назвати «звичайними», ці рівняння поєднують в собі риси функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними і стохастичних рівнянь Іто. Інтерес до цих рівнянь виник практично одночасно в теорії рівнянь з частинними похідними й у теорії випадкових процесів. Велика кількість праць присвячена дослідженню розв'язків таких рівнянь різноманітної стохастичної природи у скінченновимірних і найрізноманітніших нескінченновимірних функціональних просторах. Оскільки більшість сучасних математичних моделей описує процеси із розподіленими параметрами, то особливого значення набувають стохастичні рівняння із частинними похідними, або більш широко– рівняння із необмеженими опраторами. Теорія стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими операторами є важливим напрямком розвитку сучасної теорії стохастичних рівнянь. У дисертаційній роботі досліджуються початкові задачі для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь як звичайного так і нейтрального типів, тобто коли ефект запізнення проявляється не тільки у коефіцієнтах рівняння, а і в "похідній". Для таких рівнянь отримані умови існування та єдиності розв'зку, вивчена їх неперервна залежність від початкових даних, встановлені марковська та фелерівська властивості розв'язків

у просторах зсувів. При цьому розглянуті різні підходи до означення розв'язку: м'який, слабкий та сильний.

При доведенні існування м'якого розв'язку використовується апарат аналітичної теорії напівгруп обмежених операторів, породжених необмеженим оператором, що входить у праву частину рівняння. При цьому суттєво використовуються властивості стохастичної конволюції, тобто стохастичної згортки відповідної напівгрупи із коефіцієнтами правої частини рівняння. Даний підхід широко використовувався при дослідженні нескінченновимірних стохастичних систем без запізненням в роботах G. Da Prato, J. Zabczyk, S. Cerrai, M. Hairer та інших авторів. Для стохастичних функціально-диференціальних рівнянь він також широко використовувася в роботах T.Govindan, Q. Li, M. Wei та інших авторів. Однак для рівнянь нейтрального типів подібні результати отримані лише при досить жорстких припущеннях. Останнє зумовлено присутністю у формулі м'якого розв'язку необмеженого оператора. Ще одним важливим аспектом є те, що реальні математичні моделі є рівняннями у яких праві частини інтерпритуються як зовнішні впливи, що не зобов'язані бути гладкими, навіть ліпшицевими функціями. Отже виникає питання встановлення умов існування та єдиності розв'язків без умови Ліпшиця і лінійного росту.Саме такий випадок і вивчається у роботі.

Встановлення умов існування слабких розв'язків проводиться із використанням теорії монотонних операторів, а також із використанням підходу компактності, розробленого у школі Ліонса. Адаптація даних підходів до стохастичних рівнянь проведена в роботах Huang L, Mao X, Wei Liu, Michael Rockner та інших авторів. Однак, для функціонально-диференціальних рівнянь у цьому напрямку результати отримані лише у деяких частинних випадках. Важливо зазначити, що на праві частини при цьому не накладається умови Ліпшиця, яка замінена певною умовою монотонності і степеневого росту.

Існування сильних розв'язків розглядалось раніше лише для рівнянь із фіксованим запізненням.

Заповненню даних прогалин і присвячене дисертаційне дослідження. Зокрема отримані теореми існування м'яких розв'язків для рівнянь нейтрального типу при значно слабших умовах, ніж у вище вказаних авторів, доведено існування слабких розв'язків для спарених рівнянь, одне з яких нескінченновимірне стохастичне функціонально-диференціальне, а інше звичайне диференціальне. Такі рівняння з'являються у різного роду застосуваннях: наприклад бідоменне рівняння (модель дефибрилятора), рівняння Ходкіна–Хакслі для аксона нерва,рівняння ядерної динаміки та інші. При встановленні умов існування сильних розв'язків використоно підхід, що базується на отриманні апріорних оцінок математичного сподівання різних норм соболівського типу із подальшим застосуванням теорем типу Сіріна.

Окреме коло питань дисертаційного дослідження стосується асимптотичної поведінки розв'язків на великих часових інтервалах.Важливим з цього приводу є питання існування інваріантних мір у фазових просторах розв'язків відповідних рівнянь. Для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь це питання добре вивчене лише у скінченномірному випадку (див. наприклад S. Meri, M. Scheutzow та інші.) Основна ідея встановлення існування інваріантної міри базується на знаменитій теоремі Крилова–Боголюбова про компактність сім'ї мір, породжених марковською динамічною системою. Розвиваючи цю ідею для нескінченновимірних стохастичних систем G. Da Prato, J. Zabczyk розробили підхід компактності, що базується на наступних кроках: 1) встановлюється фелерівська властивість для розв'язків та їх стохастична неперервність за часовою змінною; 2) доводиться компактність відповідної напівгрупи опрераторів у спеціальних фазових просторах; 3) встановлюється існування обмеженого за ймовірністю розв'язку.

Тоді з використанням теореми Крилова–Боголюбова доводиться існування інваріантної міри.

Складність застосування даного підходу до нескінченновимірних стохастичних функціонально–диференціальних рівнянь полягає у виборі фазового простору, у якому розв'язок має фелерівську властивість.Таким простором виступає не вихідний гільбертів простір H, де "сидить розв'язок $u = u(t)$ а простір зсувів розв'язку $u_t = u(t+\theta)$, тут $\theta \in [-h, 0]$–інтервал запізнення. При цьому теореми існування та єдиності доводяться, як правило у просторі неперервних функцій $C([-h, 0]; H)$, що не є гільбертовим простором,а саме у гільбертовому просторі працює підхід компактності.

В дисертаційній роботі розроблено два підходи до доведення існування інваріантної міри.

Перший з них полягає в тому, що замість банахового простору початкових даних $C([-h,\ 0];H)$ розглянуто простір $L^2([-h,\ 0];H)$, що вже є гільбертовим простором, у якому добре працює підхід компактності. Для цього потрібно було встановити теореми існування та єдиності розв'язку із початковими даними з простору $L^2([-h,\ 0];H)$, замість класичного простору $C([-h,\ 0];H)$, довести в ньому марковську та фелерівську властивості.

Другий підхід базується на використанні класичного простору початкових даних $([-h,\ 0];H)$, із використанням того факту, що теорема Крилова–Боголюбова працює в банаховому просторі, а компактність сім'ї ймовірнісних мір за теоремою Прохорова рівносильна її щільності. В роботі доведена щільність сім'ї мір, за умови, що система має обмежений за ймовірністю розв'язок у метриці простору $([-h,\ 0];H)$.

Окреме коло питань роботи присвячене застосуванню отриманих результатів. У якості реалізації доведених абстрактних теорем розглянуті рівняння типу реакція–дифузія, бідоменне рівняння та інтегро–диференціальні рівняння. Для таких об'єктів отримані коефіцієнтні умови існування інваріантних мір, що зводяться до перевірки певних умов для дійсних скалярних функцій.

Дисертаційна робота має в основному,теоретичне значення. Її результати дають можливість досліджувати еволюцію нескінченновимірних стохастичних систем складної природи, що мають ефект післядії. Однак, розроблені методи дообслідження дозволяють застосувати їх до вивчення конкретних математичних моделей із розподіленими параметрами, еволюція яких відбувається в полі випадкових сил і які мають ефект післядії, а саме біомедицині, фінансовій математиці, телекомунікаційних мережах, гідрології, турбулентності та інших. Окрім цього, результати можна використовувати для викладання профільних курсів для спеціальності математика.

Ключові слова: Стохастичні диференціальні рівняння з запізненням, стохастичні функціонально-диференціальні рівняння нейтрального типу, рівняння реакції-дифузії, початкова задача, м'який розв'язок («mild solution»), Q - вінерівський процес, напівгрупа операторів, інфінітезимальний генератор, гільбертів простір, теорема існування і єдиності, теорема порівняння, неперервна залежність від початкових даних, марковість, фелеровість, інваріантна міра.

Summary

Stanzhytsky A. O. Asymptotic behavior of solutions of stochastic functional differential equations in Hilbert spaces. — Manuscript.

Doctor's of Philosophy, specialty "111 — Statistics" — National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2022.

The thesis is devoted to the study of infinite-dimensional stochastic functional-differential equations in Hilbert spaces, which are mathematical models. the most diverse objects of a complex nature, the evolution of which takes place in the field of random forces, taking into account the after effect. The most common among such models are described by stochastic partial functional-differential equations.Unlike classical stochastic differential equations, which can be called "ordinary these equations combine the features of functional differential equations with partial derivatives and stochastic Ito equations. Interest in these equations arose almost simultaneously in the theory of equations with partial derivatives and in the theory of random processes.

A large number of works are devoted to the study of solutions of such equations of various stochastic nature finite-dimensional and various infinite-dimensional functional spaces. Since the majority of modern mathematical models describe processes with distributed parameters, stochastic equations with partial derivatives, or more broadly, equations with unbounded operators, acquire special importance. The theory of stochastic differential equations with unbounded operators is an important direction in the development of the modern theory of stochastic equations.

We stude the initial value problems for stochastic functional-differential equations of both ordinary and neutral types, that is, when the delay effect is manifested not only in the coefficients of the equation, but also in the "derivative". For such equations, the conditions for the existence and uniqueness of the solution were obtained, their continuous dependence on the initial data was studied, and the Markov and Feller properties of the solutions in displacement spaces were established. At the same time, different approaches to defining the solution are considered: mild, weak and strong.

When proving the existence of a soft solution, the apparatus of the analytical theory of semigroups of bounded operators generated by the unbounded operator included in the right-hand side of the equation is used. At the same time, the properties of

stochastic convolution, that is, stochastic convolution of the corresponding semigroup with the coefficients of the right-hand side of the equation, are significantly used. This approach was widely used in the study of infinite-dimensional stochastic systems without delay in the works of G. Da Prato, J. Zabczyk, S. Cerrai, M. Hairer and other authors. For stochastic functional differential equations, it is also widely used in the works of T. Govindan, Q. Li, M. Wei and other authors. However, for equations of neutral types, similar results are obtained only under fairly strict assumptions. The latter is caused by the presence of an unbounded operator in the soft solution formula. Another important aspect is that real mathematical models are equations in which the right-hand sides are interpreted as external influences, which do not have to be smooth, even Lipschitz functions. Therefore, the question arises of establishing the conditions for the existence and unity of solutions without the Lipshitz condition and linear growth. This is exactly the case that is studied in the work.

Establishing the conditions for the existence of weak solutions is carried out using the theory of monotone operators, as well as using the compactness approach developed at the Lyons school. The adaptation of these approaches to stochastic equations is carried out in the works of Huang L, Mao X, Wei Liu, Michael Rockner and other authors. However, for functional differential equations in this direction, results are obtained only in some partial cases. It is important to note that the Lipshitz condition is not imposed on the right-hand side, which is replaced by a certain condition of monotonicity and exponential growth.

The existence of strong solutions was previously considered only for equations with a fixed delay.

A dissertation study is devoted to filling these gaps. In particular, theorems for the existence of soft solutions for equations of the neutral type were obtained under much weaker conditions than those of the above-mentioned authors, and the existence of weak solutions for coupled equations was proved, one of which is an infinite-dimensional stochastic functional-differential, and the other is an ordinary differential. Such equations appear in various applications: for example, two-domain equations (defibrillator model), Hodgkin-Huxley equation for a nerve axon, nuclear dynamics equation, and others. When establishing the conditions for the existence of strong solutions, an approach based on obtaining a priori estimates of the mathematical expectation of various Sobolev-type norms with subsequent application of Sirrin-type theorems was used.

A separate set of dissertation research questions concerns the asymptotic behavior of solutions on large time intervals. Important in this regard is the question of the existence of invariant measures in the phase spaces of the solutions of the corresponding equations. For stochastic functional-differential equations, this issue is well studied only in the finite-dimensional case (see, for example, S. Meri, M. Scheutzow, and others.) The main idea of establishing the existence of an invariant measure is based on the famous Krylov-Bogolyubov theorem on the compactness of a family of measures, generated by a Markov dynamic system. Developing this idea for infinite-dimensional stochastic systems, G. Da Prato and J. Zabczyk developed a compactness approach based on the following steps:

1) the Feller property for solutions and their stochastic continuity with respect to the time variable is established;

2) the compactness of the corresponding semigroup of operators in special phase spaces is proved;

3) the existence of a solution limited by probability is established. Then, using the Krylov-Bogolyubov theorem, the existence of an invariant measure is proved.

The difficulty of applying this approach to infinite-dimensional stochastic functional-differential equations is to choose a phase space in which the solution has the Feller property. Such a space is the non-original Hilbert space H, where the solution $u = ut$) and the solution displacement space $u_t = u(t+\theta)$, here $\theta \in [-h,\ 0]$ is the delay interval. At the same time, the theorems of existence and uniqueness are proved, as a rule, in the space of continuous functions $C([-h,\ 0]; H)$, which is not a Hilbert space, namely, the compactness approach works in a Hilbert space.

Two approaches to proving the existence of an invariant measure were developed in the dissertation.

The first of them consists in the fact that instead of the Banach space of the initial data $C([-h,\ 0]; H)$, the Hilbert space $L^2([-h,\ 0]; H)$ is considered, which is already a Hilbert space in which the compactness approach works well. For this, it was necessary to establish the existence and uniqueness theorems of the solution with initial data from the space $L^2([-h,\ 0]; H)$, instead of the classical space $C([-h,\ 0]; H)$, to prove the Markov and Feller properties in it.

The second approach is based on the use of the classical space of initial data

$C([-h,\ 0];H)$, using the fact that the Krylov-Bogolyubov theorem works in the Banach space, and the compactness of the family of probability measures by the theorem Prokhorova is equal to its density. The paper proves the density of the family of measures, provided that the system has a probability-bounded solution in the metric space $([-h,\ 0];H)$.

A separate set of work issues is devoted to the application of the obtained results. Reaction-diffusion equations, two-domain equations, and integro-differential equations are considered as realizations of proven abstract theorems. For such objects, coefficient conditions for the existence of invariant measures are obtained, which boil down to checking certain conditions for real scalar functions.

The dissertation has mainly of theoretical importance. Its results make it possible to study the evolution of infinite-dimensional stochastic systems of a complex nature that have an aftereffect. However, the developed research methods make it possible to apply them to the study of specific mathematical models with distributed parameters, the evolution of which takes place in the field of random forces and which have an aftereffect, namely biomedicine, financial mathematics, telecommunication networks, hydrology, turbulence, and others. In addition, the results can be used to teach specialized courses for the mathematics major.

Keywords: stochastic differential equations with delay, stochastic functional differential equations of neutral type, reaction-diffusion equations, initial-value problem, mild solution,Q -Wiener process, semigroup of operators, infinitesimal generator, Hilbert space, existence and uniqueness theorem, comparison theorem, continuous dependence on initial data, Markov property, Feller property, invariant measure.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Novak I. H., Stanzhytsky A. O. Invariant Measures for One Class of Linear Stochastic Systems in Hilbert Spaces // https://doi.org/10.1007/s10958-021-05303-8Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021. Vol. 254 (2). P. 271–279.

2. Stanzhytsky A. O. On weakfnd strong solutions of paired stochastic functional differential equations in infinite–dimentional spaces // https://doi.org/https://doi.org/10.15421/142 of Optimization, Differential Equations and their Applications . 2021. Vol. 29 (2). P. 48–75.
3. Stanzhytsky A. O., Misiats O. O., Stanzhytskyi O. M. Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non–Lipschitz coeffitients // https://doi.org/10.3934/eect.2022005Evolution equations and control Theory. 2022. Vol. 11 (6). P. 1929–1953.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Станжицький А О. Гранична поведінка розв'язків і інваріантні міри для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу– 2019». Ворохта, Україна. 25 лютого–1 березня 2019. С. 20.
2. Станжицький А. О. Слабкі розв'язки стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах // XVI Міжнародна наукова конференція « Присвячена 75–річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85–річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка». Чернівці, Україна. 28-30 жовтня 2021. С. 101–102.
3. Stanzhytsky A. O. Asymptotic Behavior of Stochastic Functional Differential Equations in Hilbert Spaces // International Workshop QUALITDE – 2020. Tbilisi, Georgia. December 19-21, 2020. P. 189–193.
4. Stanzhytsky A. O. The long time behavior of nonlinear stochastic functional-differential equations of neutral type in Hilbert spaces with non-Lipschitz nonlinearities // International Conference "Differential Equations and Applications (MADEA-9) ". Bishkek, Kyrgyzstan. June 21-25, 2021. P. 74.
5. Stanzhytsky A. O. Invariant measure for stochastic functional differential equations // The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022. Chisinau, Republic of Moldova. August 25–27, 2022. P. 101–102.

Зміст

Вступ

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню гільбертовозначних розв'язків початкових задач для стохастичних нескінченновимірних функціонально-диференціальних рівнянь, як звичайного типів так і нейтрального. Окрема увага приділена їх частинним випадкам, а саме стохастичним рівнянням з частинними похідними. На відміну від класичних стохастичних диференціальних рівнянь, які можна назвати «звичайними», ці рівняння поєднують в собі риси функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними і стохастичних рівнянь Іто. Інтерес до цих рівнянь виник практично одночасно в теорії рівнянь з частинними похідними й у теорії випадкових процесів. Це зумовлено тим, що дослідження багатьох явищ природи й об'єктів людського життя потребує побудови та вивчення відповідних математичних моделей. Протягом багатьох років увагу дослідників привертають математичні моделі найрізноманітніших об'єктів досить складної структури, еволюція яких відбувається під дією випадкових сил і з урахуванням післядії. Найпоширеніші серед таких моделей описуються стохастичними функціонально-диференціальними еволюційними рівняннями. Інтерес до цих рівнянь зумовлений, перш за все, важливістю їх практичного застосування в різних областях: ці рівняння широко використовуються при дослідженні об'єктів біомедицини (бідоменне рівняння) Keener і Sneyd [27, 56], динамічних моделей фізики [46], популяційних моделей генетики [32],хімічних процесів, наприклад модель хемотаксису E. Keller and L. Segel [57], фінансових і економічних процесів тощо. За останні десятиріччя математична теорія таких рівнянь, активно розвиваючись, знайшла своє застосування в медицині, електроніці, механіці, на ринку фінансів і цінних паперів. Ці фактори значно підвищили інтерес спеціалістів-практиків до даної галузі математики. Тому актуальність цієї тематики не викликає сумніву.

Отже, математичні моделі з урахуванням випадкових факторів і післядії приводять до стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь. Різні аспекти теорії таких рівнянь досліджували Є. Ф. Царьков, H. Bao, L. Bin, B. Boufoussi, Y. Cai, Z. G. Cao,H. Chen, S. Hajji, S. Hu, S. Jankovic, M. Jovanovic, V. Kolmanovskii, N. Koroleva, E.-H. Lakhel, X. X. Liao, K. Liu, T. Maizenberg, X. Mao, A. Myshkis, J. Randjelovic, A. Rodkina, M. Scheutzow, F. Wei, X. Xia, Y. Xu, M. Xue, X. Yang, L. Yong, S. Zhou, Q. Zhu та інші.

Серед стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь виділяють клас стохастичних диференціальних рівнянь нейтрального типу. Особливістю цих рівнянь є наявність всередині їх «похідної» запізнення. Стохастичні функціонально-диференціальні рівняння нейтрального типу у скінченновимірному випадку вперше описані в монографії 1981 р. В. В. Колмановського й В. Р. Носова [61]. Після вказаної роботи почалося інтенсивне вивчення рівнянь такого типу у скінченновимірних просторах. Вивчались питання існування, єдиності розв'язків, їх асимптотична поведінка, стійкість, оптимальне керування (див., наприклад [108]та зазначену у ній бібліографію).

Запити практики привели до інтенсивного розвитку теорії функціонально-диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах. Певним підсумком таких досліджень є монографія [53].

Теорія стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах також зазнанає інтенсивного розвитку. З цієї тематики відзначимо роботи A. Anguraj, P. Balasubramaniam, B. Boufoussi, T. Caraballo, H. Chen, S. Hajji, Z. Li, K. Liu, J. Luo, N. I. Mahmudov, M. McKibben, J. Real, A. M. Samoilenko, A. N. Stanzhytskyi, T. Taniguchi, D. Vinayagam, A. Vinodkumar, L. Yan.Спільною рисою робіт щодо стохастичних еволюційних рівнянь нейтрального типу зазначених авторів є те, що коефіцієнти рівняння задовольняють глобальну умову Ліпшиця, яка у застосуваннях далеко не завжди виконана. Тому вивчення таких рівнянь без умови Ліпшиця на коефіцієнти є надзвичайно актуальним з точки зору застосувань. Ще однією рисою вказаних робіт є те, що результати там отримані носять досить абстрактний характер і перевірка умов теорем у конкретних ситуаціях є досить складною задачею. Особливо це стосується рівнянь із головним оператором диференціального типу і нелінійностями, що породжуються дійснозначними відображеннями (відображення Немицького). Тобто це певні різновиди рівнянь типу "реакція–дифузія". І оскільки вони є математичними моделями реальних процесів та потрібні прикладникам, то і умови там повинні бути таким, що зрозумілі і легко перевіряється. Саме отриманню таких умов і присвячено дане дисертаційне дослідження.

Актуальним для застосувань є не тільки встановлення умов існування та єдиності розв'язків, а й вивчення їх асимптотичної поведінки на нескінченності.Одним із основних завдань даної роботи є встановлення достатніх умов існування інваріантних мір для таких рівнянь (як звичайного так і нейтрального типів) у спеціальних функціональних просторах зсувів. Для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу, як нам відомо, у цьому напрямку зовсім немає результатів. Одним виключенням є робота [11] де вивчено питання існування стаціонарних розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу у лінійному випадку.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводилися на кафедрі диференціальних рівнянь і кафедрі математичної фізики та диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» відповідно до планів, передбачених у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», й у рамках держбюджетного науково-дослідного проекту «Дослідження якісних і спектральних характеристик динамічних систем» (номер державної реєстрації 0113U004540)

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є подальший розвиток теорії стохастичних функціонально-диференціальних еволюційних рівнянь та її застосування до математичних моделей процесів природознавства. Основними завданнями даної роботи є:

- доведення теореми існування та єдиності мякого розв'язку стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу без умови Ліпшиця на праві частини рівняння;
- встановлення властивостей марковості й фелеровості м'якого розв'язку у просторах зсувів;

- отримання умов існування інваріантних мір для м'якого розв'язку стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу;
- для системи спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь отримання умов існування глобального слабкого розв'язку;
- застосування отриманих результатів до стохастичної моделі серцевого дефібрилятора.

Об'єктом дослідження є стохастичні функціонально-диференціальні рівняння як звичайного так і нейтрального типів.

Предметом дослідження є достатні умови існування, єдиності і неперервної залежності м'яких, слабких та сильних розв'язків початкових задач для стохастичних функціонально-диференціальних еволюційних рівнянь та достатні умови існування інваріантних мір.

Методи дослідження. У роботі застосовуються методи теорії диференціальних рівнянь, функціонально-диференціальних рівнянь, теорії напівгруп та дробових степенів необмежених операторів, теорії стохастичного аналізу та теорії просторів Соболева узагальнених функцій, методи компактності та монотонності.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими. Вони стосуються дослідження поведінки м'яких, слабких та сильних розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних еволюційних рівнянь. Основні результати такі:

1. для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу без умови Ліпшиця встановлено умови існування та єдиності м'якого розв'язку початкової задачі;
2. для таких рівнянь встановлено марковську та фелерівську властивості у просторах зсувів;
3. для для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу отримано умови існування інваріантних мір у просторах зсувів;
4. отримані абстрактні результати застосовано до стохастичного функціонально-диференціального рівняння у частинних похідних типу "реакція-дифузія";

5. для системи спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь отримані умови існування глобального слабкого розв'язку та локального сильного;
6. вивчена стохастична математична модель серцевого дефібрилятора.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. Отримані в ній теоретичні результати, а також розроблена методика досліджень сприяютимуть подальшому розвитку теорії стохастичних функціонально-диференціальних еволюційних рівнянь.Вони також можуть бути використані при дослідженні математичних моделей реальних процесів із розподіленими параметрами, що знаходяться під впливом випадкових факторів, та мають пам'ять, зокрема моделей біомедицини (серцевий дефібрилятор), модель хемотаксису (стохастичне рівняння Келлера-Сігала), рівняння реакція-дифузія, модель Бюргерса (рівняння дренажу) та інші.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи одержані здобувачем самостійно. За результатами дисертації здобувач опублікував три роботи у фахових виданнях [74,88,90]. У роботах [74,90] співавторам належить обговорення постановки задач та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких всеукраїнських та міжнародних конференціях:

1. Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу– 2019», 25 лютого–1 березня 2019, Ворохта, Україна.
2. XVI Міжнародна наукова конференція « Присвячена 75–річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85–річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка»,

   28-30 жовтня 2021, Чернівці, Україна.
3. International Workshop QUALITDE – 2020, December 19-21, 2020. Tbilisi, Georgia.
4. International Conference "Differential Equations and Applications (MADEA-9) ". June 21-25, 2021, Bishkek, Kyrgyzstan.

5. The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022, August 25–27, 2022. Chisinau, Republic of Moldova.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано

- 3 статті у виданнннях, які індексуються в наукометричних базах Scopus [74,88,90]; одна з них [90] — у виданні, що входить до квартиля Q2; одна [74] — у виданні, що входить до квартиля Q3.
- 5 тез доповідей на конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел (найменувань), та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 141 сторінок, основний текст займає 117 сторінок.

Зміст роботи. **Перший розділ** містить короткий історичний огляд літератури за тематикою дисертації та висвітлює сучасний стан вивчення проблем, схожих до тих, що розглядаються в дисертаційній роботі.

У **другому розділі** наведено основні загальні означення та деякі додаткові твердження, які використано в дисертаційній роботі.

Підрозділ 2.1 присвячено огляду теорії марковських напівгруп та пов'язаних з ними інваріантних мір. Тут приведено означення марковської перехідної функції $\mathbf{P}_t(x,\Gamma)$, марковської перехідної напівгрупи $\mathbf{P}_t\varphi(x)$ та спряженої до неї, описано їх властивості. Далі наведено означення інваріантної міри для перехідної напівгрупи $\mathbf{P}_t\varphi(x)$, а також приведено основну теорему існування такої міри, а саме теорему Крилова-Боголюбова. Введено поняття компактності сім'ї ймовірнісних міт та приведено критерій компактності Прохорова.

У підрозділі 2.2 сформульовано означення та приведено деякі властивості ядерних операторів і операторів Гільберта-Шмідта.Ці простори операторів є основними у всіх подальших дослідженнях.

Підрозділ 2.3 присвячено означенням та властивостям нескінченновимірного процесу Вінера $W(s)$ та стохастичним інтегралам $\int_0^t \Phi(s)dW(s)$ по ньому.

У підрозділі 2.4 описані властивості C_0- напівгруп обмежених операторів, їх генераторів та введено поняття дробових степенів операторів.

У **третьому розділі** Розглядаються стохастичні функціонально-диференціальні рівняння нейтрального типу в гільбертових просторах.

У підрозділі 3.1 наведена постановка задачі, приведено допоміжні твердження та сформульовано основні результати розділу. Основним об'єктом дослідження даного розділу є наступне стохастичне функціонально-диференціальне рівняння нейтрального типу у формі

$$
\begin{aligned}
&d[u(t) + g(u_t)] = [Au + f(u_t)]dt + \sigma(u_t)dW(t) \text{ for } t > 0; \qquad (1)\\
&u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0),\ \ h > 0.
\end{aligned}
$$

Тут A інфінітезимальний генератор C_0 напівгрупи $\{S(t), t \geq 0\}$ обмежених лінійних операторів у дійсному сепарабельному просторі Гільберта H. Випадковий шум $W(t)$ є Q-вінеровським випадковим процесом у сепарабельному гільбертовому просторі K. Для $h > 0$ позначимо через $C_h := C([-h, 0], H)$ простір неперервних H-значних функцій $\varphi : [-h, 0] \to H$, з нормою

$$
\|\varphi\|_{C_h} := \sup_{t\in[-h,0]} \|\varphi(t)\|_H,
$$

де $\|\cdot\|_H$ означає норму в H. У цьому розділі, $\|\cdot\|_H$ буде позначатися $\|\cdot\|$ для зручності. Розв'язок $u(t)$ of (3.1) інколи називають процесом станів. Ми також позначимо $u_t := u(t+\theta)$, де $\theta \in [-h, 0)$. Функціонали f і g є відображеннями з C_h в H, і $\sigma : C_h \to \mathcal{L}_2^0$, де $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}(Q^{1/2}K, H)$ є простором операторів Гільберта-Шмідта з $Q^{1/2}K$ в H. Наостанок, $\varphi : [-h, 0] \times \Omega \to H$ є початковими даними (початковою функцією), де $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ повний ймовірнісний простір. Нехай також A є інфінітезимальним генератором аналітичної напівгрупи обмежених операторів $\{S(t), t \geq 0\}$ в H. Відносно нього будемо вважати виконаною наступну умову

Умова (H1). Якщо $\sigma(-A)$ є спектром $(-A)$, то вимагатимемо, щоб

$$
Re(\sigma(-A)) > \delta > 0, \ \text{ і } \ A^{-1} \text{ є компактним оператором в } H.
$$

Основними умовами на коефіцієнти рівняння (3.1) є наступні:

Умова (H2). Відображення $f : C_h \to H$ і $\sigma : C_h \to \mathcal{L}_2^0$ є неперервними і задовольняють умови

[i] Існує додатна стала $K > 0$ так, що

$$
\|f(\varphi)\| + \|\sigma(\varphi)\|_{\mathcal{L}_2^0} \leq K(1 + \|\varphi\|_C) \text{ for all } \varphi \in C_h.
$$

[ii] Існує функція $N : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ така, що

(a) функція N неперервною, неспадною, опуклою вгору і $N(0) = 0$;

(b) Для $p > 2$ і для всіх $\varphi_1, \varphi_2 \in C_h$ маємо

$$\|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\|^p + \|\sigma(\varphi_1) - \sigma(\varphi_2)\|^p_{\mathcal{L}_2^0} \leq N\left(\|\varphi_1 - \varphi_2\|^p_{C_h}\right).$$

(c) Якщо невід'ємна функція $z(t)$ задовольняє нерівність

$$z(t) \leq \int\limits_0^t N(z(s))ds \text{ for all } t \in [0, T]$$

то $z \equiv 0$.

Умова(H3). Існують додатні сталі $0 < \alpha \leq 1$ і $0 < M_g < 1$ такі, що для $\varphi_1, \varphi_2 \in C_h$ функція $g : C_h \to H_\alpha$ задовольняє умову

$$\|g(\varphi_1) - g(\varphi_2)\|_{H_\alpha} \leq M_g \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C_h}.$$

Умова (H4). Початкова функція $\varphi : [-h, 0] \times \Omega \to H$ є $\mathcal{F}_0$ - вимірною випадковою величиною, що незалежить від of W і має неперервні траєкторії.

Наразі приведемо означення, у сенсі якого ми будемо розуміти розв'язок задачі (3.1.

Означення 0.1. [61, 82, 108] Неперервний $\mathcal{F}_t$-адаптований процес $u : [-h, T] \times \Omega \to H$ називається м'яким розв'язком для (3.1) на $t \in [0, T]$ якщо він задовольняє інтегральне рівняння

$$u(t) = S(t)(\varphi(0) + g(\varphi)) - g(u_t) - \int\limits_0^t AS(t-s)g(u_s)ds + \int\limits_0^t S(t-s)f(u_s)ds + \int\limits_0^t S(t-s)\sigma(u_s)dW(s), \quad (2)$$

та $u(t) = \varphi(t)$ *майже всюди для* $t \in [-h, 0]$.

Основними результатами даного розділу є теорема 3.1, теорема 3.2 і теорема 3.4, сформульвані нижче.

Теорема 0.1. *(Існування і єдиність) Нехай виконані умови (H1)-(H4). Тоді для всіх* $T > 0$ *рівняння (3.1) має єдиний м'який розв'язок* u *на* $[0,T]$. *Більше того, даний розв'язок задовольняє співвідношення*

$$\|u_t - u_0\|_{C_h} = \sup_{\theta\in[-h,0]} \|u(t+\theta) - \varphi(\theta)\| \to^P 0, t \to 0.$$

Наступна теорема стосується неперервної залежності розв'язків від початкових даних.

Теорема 0.2. *(Неперервна залежність від початкових даних) Нехай виконані умови теореми 3.1, а* $u(t,\varphi)$ *і* $u(t,\Psi)$ *два неперервних розв'язки задачі(3.1) із початковими даними* φ *і* Ψ, *що задовольняють умову (H4). Тоді*

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \left[\|u(t,\varphi) - u(t,\Psi)\|^p + \|u_t(\varphi) - u_t(\Psi)\|^p_{C_h} \right] \to 0,$$

при $\mathbb{E}\|\varphi - \Psi\|^p_{C_h} \to 0$.

Далі з'ясовується питання марковості і феллеровості розв'язків та пов'язаних із ними перехідних напівгруп. Позначимо через $B_b(C_h)$ банахів простір всіх обмежених дійсних вимірних за Борелем функцій над C_h і $C_b(C_h)$ простір всіх обмежених, неперервних функцій на C_h. Також визначимо $\mathcal{F}_s^t(dW)$ мінімальну σ - алгебру, що містить $W(\tau) - W(s), \tau \in [s,t]$, і G^t мінімальну σ - алгебру, що містить $W(\tau) - W(t)$ для $\tau \geq t$.

Нехай D є σ-алгеброю борелівських підмножин із C_h. Для кожної множини $A \in D$ визначимо функцію

$$\mu_t(A) = P\{u_t(s,\varphi) \in A\} = P\{U_s^t\varphi \in A\} = P(s,\varphi,t,A). \tag{3}$$

Таким чином $u_t(s,\varphi)$ природнім чином задає міру на D. Формула (3.5) визначає перехідну функцію, що відповідає випадковому процесу $u_t(s,\varphi), t \geq s \geq 0$. Аналогічним шляхом, як і в скінченномірному випадку [100], можна показати, що ця функція задовольняє всі властивості перехідної ймовірності. Аналогічно маємо

Теорема 0.3. *(Марковська властивість) За виконання умов теореми 3.1, випадковий процес* $u_t(s,\varphi)$ *є процесом Маркова на* C_h *із перехідною функцією, визначеною як (3.5).*

Наступне твердження випливає із теореми 3.2.

Твердження 0.1. *При виконанні умов (H1)-(H4) перехідна напівгрупа $P_t, t \geq 0$ є стохастично неперервною та задовольняє властивість феллеровості*

$$P_t : C_b(C_h) \to C_b(C_h) \text{ and } \lim_{t \to 0} P_t \varphi = \varphi.$$

Основним результатом даного розділу є теорема про існування інваріантної міри.

Теорема 0.4. *Нехай виконані умови теореми 3.1. Якщо рівняння (3.1) має розв'язок $u(t)$ який обмеженим за ймовірністю для $t \geq 0$ in C_h, а саме*

$$\sup_{t \geq 0} P\{\|u_t\|_{C_h} > R\} \to 0, R \to \infty. \tag{4}$$

Тоді існує інваріантна міра μ in C_h, тобто

$$\int_{C_h} P_t \varphi(x) d\mu(x) = \int_{C_h} \varphi(x) d\mu(x), \text{ for any } t \geq 0, \text{ and } \varphi \in C_b(C_h).$$

У підрозділі 3.2 доведено теореми існування, єдиності та неперервної залежністі розв'язків від початкових даних. Доведення існування приводиться у кілька етапів:
1) спочатку розглядається певне лінійне рівняння, пов'язане із вихідним нелінійним. Для нього доводиться існування та єдиність розв'язку;
2) за допомогою даного лінійного рівняння будується певна ітераційна схема типу пікаровських наближень та обгрунтовується її збіжність у потрібних нормах;
3) обгрунтовується граничний перехід у ітераційній схемі, що і дає існування розв'язку вихідної задачі.

Основна трудність тут пов'язана із оцінками інтегралів типу $\int_0^t AS(t-s)g(u_s)ds$, що взагалі кажучи, містять неінтегровну сингулярність. Для існування таких інтегралів потрібно вибирати функції g із певних класів, що задовольняють умову (H3).

У підрозділі 3.3 доведеноо основний результат даного розділу, а саме теорему 3.4, про існування інваріантних мір. Ідея доведення базується на підході компактності [28]. Нехай $u(t)$ є м'яким розв'язком рівняння (3.1), що задовольняє умову (3.7). Нашою метою є доведення того факту, що сім'я розподілів

$\mathcal{L}(u_t), t \geq T$, при $T \geq 2h$, породжених розв'язком є щільною в C_h. А саме, ми покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує компакт $K_\varepsilon \subset C_h$, такий, що

$$P\{u_t \in K_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon. \tag{5}$$

У підрозділі 3.4 вивчено наступне питання. Достатні умови існування інваріантних мір, отримані у попередньому підрозділі, містять одну умову, яку досить складно перевіряти, а саме умову існування глобально обмеженого розв'язку. У застосуваннях бажано було б мати якісь коефіцієнтні умови існування такого розв'язку. В даному підрозділі приведено такі умови для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у частинних похідних параболічного типу із головним еліптичним оператором A. Тут також приведемо приклад неліпшицевих нелінійностей f and σ, що задовольняють умови основної теореми.

Нехай D −обмежена область в $\mathbb{R}^d$ з межею ∂D, що задовольняє умову Ляпунова, у якості основного гільбертового простору візьмемо $H = L^2(D)$ і

$$Au = \sum_{i,j=1}^{d} (a_{i,j}(x)u_{x_i})_{x_j} = div(a(x)\nabla u).$$

Тут $a_{i,j}$ неперервні за Гельдером коефіцієнти із показником Гельдера $\beta \in (0,1)$, симетричні, обмежені і задовольняють умову рівномірної еліптичності

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}\eta_i\eta_j \geq C_0\|\eta\|^2, \eta \in \mathbb{R}^d,$$

для деякої сталої $C_0 > 0$. Нехай, також $e_n(x)$ є ортонормованим базисом в H таким, що $e_n \in L^\infty(D)$ і $\sup_n \|e_n\|_{L^\infty(D)} < \infty$. Введемо наступний коваріаційний оператор $Q \in \mathcal{L}(H)$ такий, що Q є невід'ємним і $Tr(Q) < \infty$, а також $Qe_n = \lambda_n e_n$. Це дозволяє визначити наступний випадковий процес

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\beta_i(t)e_i(x), t \geq 0,$$

що є Q-вінеровим процесом для $t \geq 0$, який приймає значення в $L^2(D)$. Визначимо також $U := Q^{\frac{1}{2}}(L^2(D))$. Із [70], Lemma 2.2, випливає, що $U \in L^\infty(D)$. Із [70] випливає, що даний оператор діє $\Psi : U \to H$. Для фіксованого $\varphi \in L^2(D)$, покладемо $\Psi(\varphi) = \varphi \cdot \psi$ for $\psi \in U$. Оскільки $\varphi \in L^2(D)$ і $\psi \in L^\infty(D)$, то оператор Ψ визначений коректно і отже $\Psi \circ Q^{1/2} : L^2(D) \to L^2(D)$ є оператором

Гільберта-Шмідта і його норма Гільберта-Шмідта задовольняє нерівність

$$\|\Psi \circ Q^{1/2}\|^2_{\mathcal{L}_2^0} \le Tr(Q) \sup_n \|e_n\|^2_\infty \|\varphi\|^2_{L^2(D)}.$$

Основним об'єктом нашого дослідження в даному підрозділі є наступне рівняння із запізненням:

$$d[u(t,x)+\int_D b(x,u(t-h,y),y)dy] = [div(a(x)\nabla u(t,x))+f(u(t-h,x))]dt+\sigma(u(t-h,x))dW(t) \tag{6}$$

при $t > 0$, з $u(t,x) = \varphi(t,x)$ для $t \in [-h,0]$ і $u(t,x) = 0$ при $x \in \partial D, t \ge 0$. Тут $b(x,z,y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Введемо наступне відображення

$$g(\varphi)(x) := \int_D b(x,\varphi(-h),y)dy$$

як відображення з C_h в $L^2(D)$. Тоді задача (3.31) може бути переписана в абстрактній формі (3.1), з $D(A) = H^2(D) \cap H^1_0(D)$.

Тут отримано наступне твердження.

Наслідок 0.1. *[i] Нехай f і σ задовольняють умови (H2) (як відображення Немицького),а початкові дані φ задовольняють умову (H4). На додаток припустимо, що дійснозначна функція b є неперервною за всіма змінними та існують сталі $A > 0$ і $M_g > 0$ такі, що*

$$|b(x,0,y)| + |\nabla_x b(x,z,y)| \le A$$

а також

$$|b(x,z_1,y) - b(x,z_2,y)| + |\nabla_x b(x,z_1,y) - \nabla_x b(x,z_2,y)| \le M_g|z_1 - z_2|$$

для всіх $x, y \in D$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ і

$$2M_g^2\, meas^2(D) < 1. \tag{7}$$

Тоді рівняння (3.31) *має єдиний м'який розв'язок.*

[ii] Якщо, окрім того, функції f, σ і b обмежені, то існує інваріантна міра для відповідної перехідної напівгрупи, що відповідає рівнянню (3.31).

У **четвертому розділі** вивчено слабкі та сильні розв'язки спарених нескінченновимірних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь

У попередньому розділі вивчались розв'язки рівнянь у самому слабкому сенсі–м'які розв'язки (mild solution). Ідея формулювання такого поняття йде від звичайних диференціальних рівнянь, а саме від відомої формули Лагранжа варіації довільної сталої. Присутність лінійної частини (у випадку звичайних рівнянь) дозволяє записати розв'язок у еквівалентній інтегральній формі за допомогою згорток із використанням матриканта лінійної частини. Саме ця ідея і використана у понятті м'якого розв'язку, лише тут замість матриканта фігурує його нескінченновимірний аналог–напівгрупа $S(t)$, породжена відповідним генератором A. Дане поняття зручне тим, що при такому підході у відповідних інтегральних формулах не фігурують необмежені оператори. Правда дане зауваження не стосується рівнянь нейтрального типу, там необмежений оператор все таки залишається, але він діє на достатньо гладкі функції. Але дане поняття розв'язку має суттєвий недолік, воно не гарантує ніякої гладкості розв'язку, а лише його належність вихідному простору. Це особливо важливо у застосуваннях, зокрема там, де виникають рівняння у частинних похідних і гладкість розв'язку має принципове значення. Тому важливо мати поняття розв'язку, що гарантує певну гладкість. Так виникають поняття слабких та сильних розв'язків. В цьому розділі досліджено питання існування глобальних слабких та локальних сильних розв'язків спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах, при цьому одне із рівнянь є рівнянням із необмеженим оператором, а інше звичайним функціонально-диференціальним рівнянням. Такі системи рівнянь виникають при моделюванні реальних процесів, частина параметрів яких носять розподілений характер, а частина зосереджені. Важливим при застосуваннях є ще й те, що коефіцієнти рівнянь, як правило, не є глобально ліпшицевими та задовольняють умову степеневого (не обов'язково лінійного) росту. Основним об'єктом дослідження цього розділу є наступне рівняння у гільбертовому просторі

$$\begin{cases} du(t) = [Au(t) + f(u_t, y_t)]dt + \sigma(u_t, y_t)dW(t), \\ dy(t) = g(u_t, y_t)dt, \quad t \geq 0, \\ u(t) = \phi(t),\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad h > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Тут $u_t = u(t+\theta)$, $y_t = y(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, оператор A є знову інфінітизимальним оператором аналітичної напівгрупи обмежених операторів $\{S(t) : t \geq 0\}$ в сепарабельному гільбертовому просторі H, $W(t)$ Q-вінеровим процесом у сепарабельному просторі Гільберта K, $u(t)$ −простір станів, функціонали f і g є відображеннями із простору неперервних функцій на $[-h, 0]$ в H, σ відображення із цього ж простору у спеціальний простір операторів Гільберта-Шмідта. Нарешті, $\phi, \psi : [-h, 0] \to H$ є початковими функціями. Як уже говорилось у вступі, рівняння подібного роду моделюють різні процеси природознавства із "пам'яттю де задіяні випадкові сили. При цьому задані зовшні впливи, як правило, не є ліпшицевими і такими, що задовольняють умови лінійного росту. У застосуваннях зазвичай це деякі степеневі функції. Тому важливо отримати умови коректної розв'язності саме для таких нелінійностей.

Цей розділ побудований таким чином. У підрозділі 4.1 дана строга постановка задачі, приведені деякі допоможні твердження та сформульовано основні результати. Нехай K і H два сепарабельних гільбертові простори, а $V \subset H$ −рефлексивний банахів простір із дуальним простором H'. Для ідентифікації простору H з його дуальним H', маємо

$$V \subset H \cong H' \subset V', \tag{9}$$

де вкладення є неперервним і щільним. При цьому трійка (V, H, V') називається трійкою Гельфанда. Норми у просторах V, H і V' позначимо $|| \cdot ||_V$, $|| \cdot ||$ і $|| \cdot ||_{V'}$ відповідно. Скалярний добуток в H і спарку між V і V' позначимо $(\cdot, \cdot)$, і $\langle \cdot, \cdot \rangle$ відповідно. Норму і скалярний добуток в K будемо позначати $|| \cdot ||_K$ and $(\cdot, \cdot)$ відповідно.

Нехай також $(\Omega, \mathcal{F}, P)$− повний ймовірнісний простір із нормальною фільтрацією $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$, згенерованою Q-вінеровим процесом W в $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з лінійним, обмеженим коваріаційним оператором таким, що $\mathrm{tr}\, Q < \infty$. Нехай також існують повна ортонормована система $\{e_k\}$ в K і послідовність невід'ємних чисел λ_k такі, що $Qe_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, \ldots$, і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty. \tag{10}$$

Такий процес Вінера допускає розклад $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k$, де $\beta_k(t)$ є дійсними, стандартними процесами Вінера, незалежними у сукупності.

Нехай $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(U)$ і $L_2^0 = L_2(U_0, H)$ простір всіх операторів Гільберта Шмідта, що діють з U_0 в H зі скалярним добутком $(\Phi, \Psi)_{L_2^0} = tr\ [\Phi Q \Psi^*]$ і нормою $||\Phi||_{L_2^0}$ відповідно. Через $C := C([-h, 0]; H)$ позначимо простір всіх неперервних відображень з $[-h, 0]$ в H наділений нормою $||u||_C = \sup_{[-h,0]} H$, і $L_V^2 := L^2((-h, 0); V)$ є простором V-значних відображень із нормою

$$||u||_{L_V^2}^2 = \int_{-h}^{0} ||u(t)||_V^2 dt.$$

Далі приведено умови на головний оператор A та нелінійності, що фігурують у системі. **Умови на оператор A**:

(A1) A є лінійним (взагалі кажучи, необмеженим) оператором із областю визначення $D(A)$, щільною в H так, що $A : V \to V'$.

(A2) Для всіх $u, v \in V$ існує стала $\alpha > 0$ така, що

$$|\langle Au, v \rangle| \le \alpha ||u||_V \cdot ||v||_V.$$

(A3) A задовольняє умову коерцетивності: існують сталі $\beta > 0$ і γ такі, що

$$\langle Av, v \rangle \le -\beta ||v||_V^2 + \gamma ||v||^2, \quad \forall v \in V.$$

Умови на нелінійності:

(N1) f і g є відображеннями з $C \cap L_V^2 \times C$ в H, σ діє з $C \cap L_V^2 \times C$ в L_2^0.

(N2) (Умова росту) Існують додатні сталі $\alpha > 0$ і $\gamma \ge 1$ такі, що

$$||f(\phi, \psi)|| + ||g(\phi, \psi)|| \le \alpha \left(1 + \left(\int_{-h}^{0} ||\phi||_V dt \right)^{\gamma} + ||\phi||_C^{\gamma} + ||\psi||_C^{\gamma} \right)$$

і

$$||\sigma(\phi, \psi)||_{L_2^0}^2 \le \alpha \left(1 + ||\phi||_C^2 + ||\psi||_C^2 \right).$$

(N3) (Локальна умова Ліпшиця). Для кожного $N > 0$ існує стала $K_N > 0$ така, що

$$||f(\phi, \psi) - f(\phi_1, \psi_1)||^2 + ||g(\phi, \psi) - g(\phi_1, \psi_1)||^2 + ||\sigma(\phi, \psi) - \sigma(\phi_1, \psi_1)||^2 \le K_N \left(||\phi - \phi_1||_C^2 + ||\psi - \psi_1||_C^2 \right)$$

для довільних $\phi, \phi_1 \in C \cap L_V^2$ і $\psi, \psi_1 \in C$ таких, що

$$||\phi||_C^2 + ||\psi||_C^2 < N, \quad ||\phi_1||_C^2 + ||\psi_1||_C^2 < N.$$

(N4) (Умова коерцетивності) Існують сталі $\beta > 0, \lambda$ і C_1 такі, що для довільного $\phi, \phi_1 \in C \cap L^2_V$ виконана нерівність

$$\langle A\phi(0), \phi(0)\rangle + (f(\phi,\psi), \phi(0)) + (g(\phi,\psi), \psi(0)) + ||\sigma(\phi,\psi)||^2_{L^0_2}$$
$$\le -\beta||\phi(0)||^2_V + \lambda(||\phi||^2_C + ||\psi||^2_C) + C_1.$$

(N5) (Monotonicity condition) For any $\phi, \phi_1 \in C \cap L^2_V$ and $\psi, \psi_1 \in C$, we have

$$2\langle A(\phi(0) - \phi_1(0), \phi(0) - \phi_1(0))\rangle + 2\left(f(\phi,\psi) - f(\phi_1,\psi_1), \phi(0) - \psi(0)\right)$$
$$+2\left(g(\phi,\psi) - g(\phi_1,\psi_1), \psi(0) - \psi_1(0)\right) + ||\sigma(\phi,\psi) - \sigma(\phi_1,\psi_1)||^2_{L^0_2}$$
$$\le \delta\left(||\phi - \phi_1||^2_C + ||\psi - \psi_1||^2_C\right).$$

для деякої сталої δ.

Нехай $\phi(t) \in C \cap L^2_V$ і $\psi(t) \in C$, $t \in [-h, 0]$. Покладемо $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$.

Означення 0.2. Назвемо $\mathcal{F}_t$-адаптований, випадковий процес $(u(t), y(t)) \in V \times H$ слабким розв'язком початкової задачі (4.1) на $[0, T]$ якщо:
1) $u(t) = \phi(t),\ y(t) = \psi(t),\ t \in [-h, 0]$;
2) $u \in L^2(\Omega_T, V),\ y \in L^2(\Omega_T, H)$;
3) для всіх $v \in V$ and $z \in H$, рівності

$$(u(t), v) = (u(0), v) + \int_0^t \left(\langle Au(s), v\rangle + (f(u_s, y_s), v)\right) ds + \int_0^t \left(\sigma(u_s, y_s)dW(s), v\right), \quad (11)$$

$$(y(t), z) = (y(0), z) + \int_0^t (g(u_s, y_s), z)dz,$$

виконуються із ймовірністю 1 для всіх $t \in [0, T]$.

Основними результатами даного розділу є теореми існування та єдиності слабкого розв'язку початкової задачі системи (4.1) та його неперервна залежність від початкових даних.

Теорема 0.5. (Існування та єдиність) *Нехай виконуються умови (A1)-(A3) and (N1)-(N5). Тоді для довільних початкових даних $\phi \in C \cap L^2_V$ і $\psi \in C$, початкова задача* (4.1) *має єдиний слабкий розв'язок $(u(t), y(t))$ на $[0, T]$ такий, що*

$$u \in L^2(\Omega; C([0, T]; H)) \cap L^2(\Omega_T, V),\ y \in L^2(\Omega, C([0, T]; H)).$$

При цьому справедлива наступна енергетична рівність:

$$||u(t)||^2 + ||y(t)||^2 = ||u(0)||^2 + ||y(0)||^2 + 2\int_0^t \langle Au(s), u(s)\rangle ds$$
$$+(f(u_s, y_s), u(s))ds + (g(u_s, y_s), y(s))ds$$
$$+\int_0^t ||\sigma(u_s, y_s)||^2_{L_2^0} ds + 2\int_0^t (\sigma(u_s, y_s)dW(s), u(s)). \tag{12}$$

Теорема 0.6. (Неперервна залежність від початкових даних) *Нехай виконані умови теореми 2.1, а* (ϕ, ψ) *і* (ϕ_1, ψ_1) *є початковими умовами для розв'язків* $(u(t, \phi, \psi), y(t, \phi, \psi))$ *і* $(u(t, \phi_1, \psi_1), y(t, \phi_1, \psi_1))$ *для початкової задачі* (4.1)*, відповідно.*

Тоді існує стала $C(T)$ *така, що*

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} [||u_t(\phi, \psi) - u_t(\phi_1, \psi_1)||^2_C + ||y_t(\phi, \psi) - y_t(\phi_1, \psi_1)||^2_C]$$
$$\leq C(T)(||\phi - \phi_1||^2_C + ||\psi - \psi_1||^2_C). \tag{13}$$

Доведення даних теорем проведено у підрозділі 4.2.

Основну трудність складає доведення факту існування слабких розв'язків. Тут застосовано підходи монотонності та компактності, добре відомі для рівнянь у частинних похідних, а саме:

1) спочатку розглядається проекція задачі (зрізки) на скінченновимірні підпростори та доводиться існування і єдиність розв'язків зрізаних, скінченновимірних задач;

2) наступним етапом є встановлення певних апріорних оцінок на розв'язки зрізаних рівнянь. Особливістю даних оцінок є їх рівномірність, тобто незалежність від розмірності. Ці оцінки власне означають слабку компактність послідовності розв'язків зрізаних рівнянь у певних функціональних просторах, а значить і існування слабко збіжних підпослідовностей у відповідних просторах;

3) останнім етапом доведення є обгрунтування можливості граничного переходу у зрізаних рівняннях, за умови прямування розмірності зрізок до нескінченності. Тут якраз і спрацьовує підхід монотонності.

При цьому, паралельно, граничним переходом встановлюється і енергетична рівність для квадратів норм. Тоді факт єдиності і неперервна залежність розв'язків є прямим наслідком енергетичної рівності.

В підрозділі 4.3 продемонстроване застосування отриманих абстрактних результатів до стохастичної моделі серцевого дефибрилятора, математичною моделлю якого є, так зване, бідоменне рівняння.

Дана система рівнянь у класичному випадку має вигляд

$$\begin{cases} \partial_t u + f(u,w) - \nabla \cdot (a_i \nabla u_i) = I_i \quad \text{на } (0,\infty) \times Q, \\ \partial_t u + f(u,w) + \nabla \cdot (a_e \nabla u_e) = -I_e, \quad \text{на } (0,\infty) \times Q, \\ \partial_t w + g(u,w) = 0 \quad \text{на } (0,\infty) \times Q, \\ u_i - u_e = u, \quad \text{на } (0,\infty) \times Q, \end{cases} \tag{14}$$

із крайовими умовами

$$a_i \nabla u_i \cdot \nu = 0,\ a_l \nabla u_l \cdot \nu = 0 \quad \text{при } (0,\infty) \times Q,$$

та початковими даними $u(0) = u_0,\ w(0) = w_0$.

Тут $Q \subset \mathbb{R}^d$ –обмежена область, функції u_i та u_e моделюють втрішні та зовнішні клітинні електричні потенціали, u є трасмембранним потенціалом і ν є зовнішнім вектором нормалі до межі ∂Q. Анізотропні властивості даної системи описуються матрицями провідності $a_i(x)$ та $a_e(x)$. При цьому функції I_i і I_e відповідають за внутрішньо- та позаклітинні струми стимуляції, відповідно. Найбільш відомими із них є наступні:

нелінійність Аллена-Кана, що задається формулами

$$\begin{cases} f(u) = u^3 - u, \\ g(u) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

та Фітц-Хью-Нагумо

$$\begin{cases} f(u,w) = u(u-a)(u-1) + w, \\ g(u,w) = bw - cu, \end{cases} \tag{16}$$

де $0 < a < 1$ і $b, c > 0$ деякі сталі.

В [12], введенням нелокального інтегро-диференціального оператора

$$Au = -\nabla(\sigma_i \nabla u) + \nabla(\sigma_i \nabla(\{\nabla \cdot (\sigma_i + \sigma_l)\nabla\}^{-1}(\nabla \cdot \sigma_i \nabla u))),$$

що і називається бідоменним, система (4.38) переписана у абстрактній формі еволюційного рівняння

$$\begin{cases} \partial u_t + f(u, w) + Au = s, \\ \partial w_t + g(u, w) = 0, \\ u(0) = u_0,\ w(0) = w_0. \end{cases} \tag{17}$$

Для системи (4.41) при виконанні певних умов на нелінійності, доведені теореми існування розв'язків.

У роботі розглянуто такого типу рівняння, що враховує ефект запізнення та стохастичні впливи, саме наступне стохастичне функціонально-диференціальне рівняння із запізненням

$$\begin{cases} du(t) = [-Au(t) + f(u(t-h), y(t-h))]dt + dW(t), \\ dy(t) = g(u(t-h, y(t-h))dt, \\ u(t) = \phi(t),\ y(t) = \psi(t),\ t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{18}$$

де $h > 0$ визначає запізнення, $Q \subset \mathbb{R}^3$ є обмеженою областю із гладкою межею ∂Q. Щоб застосувати попередні результати, потрібно визначити функціональні простори, які утворюють трійку Гельфанда. Покладемо $H := L^2(Q)$, $H_0 := \{v \in H, \int_Q v dx = 0\}$, $V := H^1(Q)$ та $D(A) := \{u \in H^2(Q) \cap H_0,\ \nabla u \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial Q\}$.

Нехай σ_i та $\sigma_e : Q \to \mathbb{R}^{n\times n}$ є симетричними матрицями і функціями класу $C^1(\overline{Q})$. Більш того, нехай існують додатні сталі $\underline{\sigma}$ та $\overline{\sigma}$ with $0 < \underline{\sigma} < \overline{\sigma}$ такі, що

$$\underline{\sigma}|\xi|^2 \le \xi^* \sigma_i(x)\xi \le \overline{\sigma}|\xi|^2 \quad \text{and} \quad \underline{\sigma}|\xi|^2 \le \xi^* \sigma_e(x)\xi \le \overline{\sigma}|\xi|^2 \tag{19}$$

для всіх $x \in \overline{Q}$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Як показано в [12], при цьому оператор A задовольняє умови (A1)-(A3). Більш того, існує неспадна послідовність чисел $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, що $0 < \lambda_0 \le \ldots \le \lambda_i \le \ldots$, а також ортонормований базис в H, що складається із власних векторів $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ опратора A.

Тепер можна ввести Q-вінерів процес

$$W(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \psi_k(x) \beta_k(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty.$$

Далі розглянуто два види нелінійностей:
1) випадок Аллена-Кана, де $f = -u^3(t) + u(t-h)$, $g = 0$;
2) випадок Фітц-Хью-Нагумо, де

$$f = -u^3(t) + (a+1)u^2(t) - au(t-h) - y(t-h),$$
$$g = -by(t-h) + cu(t-h),$$

$a \in (0,1)$, $b > 0$, $c > 0$.

Для обох типів нелінійностей показано виконання умов теореми 4.1 існування та єдиності слабкого розв'язку.

Питанням існування сильних локальних розв'язків бідоменних рівнянь приисвячено підрозділ 4.4. Дані розв'язки у порівнянні зі слабкими, маю більшу гладкість, так щоб входити у область визначення бідоменного оператора. Оскільки даний оператор містить другу похідну, то і розв'язки повинні її мати. Доведення основного результату базувалось на теоремах типу Сірріна та на теорії критичних просторів.

Отже, розглянуто наступну стохастичну систему функціонально-диференціальних рівнянь із головним бідоменним оператором

$$\begin{cases} du(t) = [-Au(t) + f(u(t-h), y(t-h))]dt + dW(t), \\ dy(t) = g(u(t-h), y(t-h))dt, \\ u(t) = \phi(t),\ y(t) = \psi(t),\ t \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{20}$$

Розв'язок будемо розуміти у наступному сенсі.

Означення 0.3. $\mathcal{F}_t$-адаптований випадковий процес $(u(t,\cdot), y(t,\cdot)) \in D(A) \times H$ назвемо сильним розв'язком рівняння (4.45) на $[0,T]$ якщо:
(a) $u(t) = \phi(t)$ та $y(t) = \psi(t)$ для майже всіх $t \in [-h, 0]$;
(b) для майже всіх $t \in [0,T]$, рівняння

$$\begin{cases} u(t) = u(0) - \int_0^t Au(s)ds + \int_0^t f(u(s-h), y(s-h))ds + W(t), \\ y(t) = y(0) + \int_0^t g(u(s-h), y(s-h))ds, \end{cases} \tag{21}$$

виконується із ймовірністю 1.

Для отримання основного результату, тут спочатку розглянуто абстрактне детерміністичне функціонально-диференціальне рівняння виду

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u_t), \quad t \in [0, T], \\ u(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{22}$$

у банахому просторі X із нормою $\| \cdot \|$. Тут A є секторіальним оператором, а отже і визначені дробові його степені A^α, $\alpha \in [0, 1]$. Покладемо $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ і утворимо простір X^α із нормою графіка

$$\|u\|_\alpha = \|A_1^\alpha u\|, \quad u \in X^\alpha,$$

де $A_1 = A + aE$ і a вибране так, щоб Re $\sigma(A_1) > 0$. Добре відомо, що норми, утворені різними a є еквівалентними (див, напр Теорему 1.4.6 [45]).

Позначимо через X_C^α простір функцій зі значеннями в X^α , неперервних на $[-h, 0]$, наділений нормою $\|u\|_C^\alpha = \sup\limits_{\theta \in [-h,0]} \|u(\theta)\|_\alpha$. Припустимо, що $f(t, \phi)$ є відображенням, що діє із відкритої множини $U \subset [0, T] \times X_C^\alpha$ в X для деякого α, і воно локально гельдеровим по t та локально ліпшицевим по ϕ. Останнє означає, що якщо $(t_1, \phi_1) \in U$, то існує окіл $V \subset U$ точки (t_1, ϕ_1) такий, що для всіх $(t, \phi), (s, \psi) \in U$ виконана нерівність

$$\|f(t, \phi) - f(s, \psi)\| \le L(|t - s|^j + \|\phi - \psi\|_\alpha^C), \tag{23}$$

для деяких сталих $L > 0$ та $j > 0$. Надалі нам потрібно буде поняття класичного розв'язку задачі (4.47).

Означення 0.4. X-значна функція $u(t)$ називається класичним розв'язком початкової задачі (4.47) на відрізку $[0, T]$ якщо $u(t)$ є неперервноюна $[0, T]$, неперервно диференційовною у сильному сенсі на $(0, T]$ і $u(t) \in D(A)$ для $t \in (0, T]$, $u(t) = \phi(t)$, $t \in [-h, 0]$ та задовольняється рівність (4.47).

Позначимо через $S(t)$ аналітичну напівгрупу на X, генератором якої є оператор A.

Нам будуть потрібні наступна лема та теорема, що є узагальненням відповідних результатів із [45] на клас функціонально-диференціальних рівнянь.

Лема 0.1. *Якщо $u(t)$ є розв'язком рівняння* (4.47) *на* $[0,T]$*, а ϕ є неперервною за Гельдером функцією з* $[-h,0]$ *в* X^α*, то*

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-s)f(s,u_s)ds, \quad t \in [0,T]. \tag{24}$$

Навпаки, якщо $u(t)$ є неперервною функцією з $[0,T]$ в X^α, $u(t) = \phi(t)$, $t \in [-h,0]$, що задовольняє інтегральне рівняння (4.49)*, то $u(t)$ є розв'язком функціонально-диференціального рівняння* (4.47) *на* $[0,T]$.

Доведення. Доведення даної леми подібне до доведення аналогічного результату , а саме леми 3.3.2 з [45] для рівнянь без запізнення, тому ми зупинимося лише на відмінних рисах, які відображають специфіку рівняння (4.47).

Для доведення нам будуть потрібні два твердження.

Твердження 0.2. *Якщо $u(t)$ є неперевною функцією з $[-h,T]$ в X^α, то функція u_t є також неперервною на $[0,T]$ за нормою простору X^α_C.*

Наступне твердження стосується неперервності за Гельдером.

Твердження 0.3. *Якщо $u(t)$ є неперевною функцією з $[-h,T]$ в X^α та $u(t)$ є неперервною за Гельдером функцією, що діє з $[-h,0]$ в X^α та з $[0,T]$ в X^α, то u_t є локально гельдеровою функцією на $[0,T]$ за нормою простору X^α_C.*

Основним результатом тут є наступна теорема.

Теорема 0.7. *Нехай A секторіальний оператор, а $\alpha \in (0,1)$ та $f : U \to X$, де U відкрита підмножина в $[0,T] \times X^\alpha_C$. Нехай також $f(t,\phi)$ є локально гельдеровою по t та локально ліпшицевою за ϕ і ϕ є неперевною за Гельдером функцією з $[-h,0]$ в X^α.*

Тоді існує $t_1 = t_1(\phi)$ таке, що задача (4.47) *має єдиний класичний розв'язок на інтервалі* $[0,t_1)$.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Автор висловлює вдячність науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору Дудкіну Миколі Євгеновичу — за постійну підтримку та допомогу в роботі; колективам кафедр математичної фізики та диференціальних рівнянь і кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей за всебічну допомогу під час навчання.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертації

Математичними моделями різноманітних процесів природознавства, економіки, соціальної сфери та інших є такі, що еволюція їх у майбутньому суттєво залежить від минулого. Тобто, процеси, що описують динаміку таких об'єктів є процесами із "пам'яттю". Самі математичні моделі є системами функціонально-диференціальних рівнянь. Основною особливістю таких систем є те, що їх праві частини є функціоналами від "куска"траєкторії розв'язку у минулому. Останнє приводить до того, що навіть у випадку вивчення еволюції у скінченновимірному просторі, початковими даними для процесу є не точка, а початкова функція із певного функціонального простору. Отже, на відміну від звичайних диференціальних рівнянь, ми маємо справу із нескінченновимірним об'єктом. Дослідження таких рівнянь вимагає застосування сучасних методів функціонального аналізу.

Найпростішим варіантом функціонально-диференціальних рівнянь є рівняння із запізненням, що вперше розглядались наприкінці XVIII століття у роботах J. Bernoulli, L. Euler, M.de Condorcet. Однак, системне вивчення таких систем почалося лише у XX столітті, коли вони почали розглядатись, як строгі математичні моделі реальних процесів, еволюція яких залежить від попередніх станів (див., наприклад, роботи C. C. Travis і G. F. Webb [98](1974), [99] (1976) із бібліографією). Зазначимо монографію J. K. Hale [43] (1977), де дано системне вивчення загальної теорії функціонально-диференціальних рівнянь та продемонстровано широке коло їх застосування, а також приведена грунтовна бібліографія з даної тематики. Серед робіт українських математиків відзначимо праці [7, 9, 86, 109–115, 117, 118], у яких розглянуті питання асимптотичної та якісної поведінки розв'язків систем функціонально-диференціальних рівнянь.

Поряд із розглядом об'єктів із зосередженими параметрами велике прикладне значення мають процеси із розподіленмим параметрами та "пам'яттю що приводить вивчення функціонально-диференціальних рівнянь у частинних похідних, або більш широко, до функціонально-диференціальних рівнянь еволюційного типу. При цьому введення у модель запізнення є суттєвим для її адекватності до оригіналу.Одним із типових прикладів таких моделей є рівняння теплопровідності. Зокрема класичною моделлю є відоме рівняння

$$u_t = \Delta u$$

що має істотний недолік: воно передбачає нескінченну швидкість поширення теплових флуктуацій у теплопровідниках Фур'є, що звичано не так. Gurtin and Pipkin в [41] запропонували ввести у дану модель запізнення, що характеризує термічну історію матеріалу. У цьому випадку швидкість поширення тепла виявилась скінченною. Лінеаризована версія цієї моделі наступна

$$u_t(x,t) + \int\limits_0^\infty \beta(s) u(x, t-s)_t \, ds = C\Delta u(x,t),$$

яка є прикладом функціонально-диференціального рівняння у частинних похідних. Окрім того,в [80] наводить приклад регулярізації температури через інжекцію тепла або відведення, кероване термостатом, що створює додаткову пам'ять і ефект затримки. Тісно пов'язана проблема виникає при частково розсіяному моделюванні динаміка чисельності із затримкою родового процесу [80]

$$u_t(x,t) - Cu_{xx}(x,t) = u(x,t)[1 - u(x,t) - \int\limits_{-1}^0 u(x, t + r(s)) \, ds],$$

де $r(s)$ неперервна функція, що характеризує запізнення.

Функціонально-диференціального рівняння у частинних похідних широко використовуються при моделюванні поведінки багатовидових популяцій у кількох просторових вимірах, зокрема в роботах Britton [14] (1986), Fife [36] (1979), Jones and Sleeman [54](1983), Levin [63, 64](1976, 1978), Murray [72](1989),Sleeman [85](1981), Smoller [87](1983), and Steele [94](1974).

Нагальні потреби практики спонукали дослідників до розвитку строгої математичної теорії таких рівнянь. Так теореми типу існування та єдиності розв'язків початкових задач були отримані, наприклад, Henfiquez [44](1995) and Ruan and Wu [79](1994). Фундаментальні результати існування–єдиності для рівнянь із нескінченним інтервалом запізнення разом із аналізом стійкості для напів-лінійних рівнянь отримані в роботах Barbu [6](1981), Brewer [13](1980), Chen [23] (1990), Da Prato and Iannelli [29](1985),Liang and Xiao [65](1991), Ruan and Wu [79](1994)та інших авторів. Ці та інші результати були підсумовані у монографії [53] (1996).

Вимога адекватного описання реальних процесів вимагає врахування у моделях випадкових чинників, що приводить до стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь. Такі рівняння у скінченновимірних випадках в плані існування, єдиності, неперервної залежності розв'язку від початкових функцій вивчались в роботах V. Kolmanovskii й A. Myshkis [60](1992), для рівнянь нейтрального типу зі скінченновимірним процесом Вінера досліджувались в роботах H. Bao й J. Cao [5](2009), H. Chen [22] (2019), V. Kolmanovskii і співавторів [73] (2003), Y. Xu й S. Hu [103] (2010), X. Yang і Q. Zhu [106] (2015), F. Wei і Y. Cai [102](2013), L. Yong і L. Bin [107] (2015) та інших. Асимптотична поведінка і стійкість розв'язків у різних ймовірнісних сенсах досліджувалась багатьма авторами, зокрема B. Boufoussi і співавторів [11] (2018), S. Jankovic і J. Randjelovic [51] (2007), Renesse та Scheutzow [101] та іншими. Фундаментальною роботою, де викладені основи теорії стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь є монографія [100] (1989).

Асимптотичній теорії стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в плані існування інваріантних мір та ергодичності присвячені роботи [34], [83] та інші.

Природним напрямком розвитку теорії стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь є їх дослідження у нескінченновимірних просторах. Основним об'єктом вивчення тут є рівняння наступного вигляду

$$du(t) = (Au(t) + f(t, u_t))dt + \sigma(t, u_t)dW(t),$$

тут A – – необмежений лінійний оператор, що діє у деякому гільбертовому просторі H, f і σ відображення з $[0,\ T]\times C([-h,\ 0]; H,\ W$– – нескінченновимірний процес Вінера в H. Щодо існування м'яких розв'язків таких рівнянь відзначимо роботи P. Balasubramaniam і співавторів [4] (2005), T. Caraballo і співавторів [18] (2003), T. Caraballo й J. Real [17], K. Liu і співавторів [67] (2002). У роботах T. E. Govindan [39] (2003), T. Caraballo [15] (1990), T. Caraballo й K. Liu [16] (1999), A. F. Ivanov і співавторів [50] (2003), T. Taniguchi [95] (2007) досліджувалась якісна теорія таких рівнянь і стохастична стійкість їх розв'язків. Спільною рисою даних робіт є те, що коефіцієнти рівняння задовольняють глобальну умову Ліпшиця, саме це дозволяє для встановлення існування та єдиності розв'язку початкової задачі застосувати принцип стискаючих відображень. Однак у застосуваннях глобальна умова Ліпшиця далеко не завжди виконана. Останнє змусило дослідників шукати нові підходи до вивчення питання існування розв'язків.

Дані підходи були розвинуті у роботах [77] (2015), [10] (2016), [66] (2018), [76] та інших, де вивчені питання існування слабких та сильних розв'язків таких рівнянь. Тут автори обмежились виконанням лише локальної умови Ліпшиця. При цьому використовувались або підходи монотонності, що дало змогу встановити і єдиність розв'язку, або підходи компактності із використанням гальоркінських апроксимацій і апріорних оцінок на зрізаних рівнянь. Однак, тоді вдається встановити лише існування слабкого розв'язку початкової задачі, що звичайно є природним, оскільки дана ситуація спостерігається і в класичних випадках для детермінованих рівнянь (див, напр. [35])лось встановити досліджувались Слід зазначити, що у даних роботах автори відмовляються від глобальної умови Ліпшиця

Результатів щодо стохастичних диференціальних рівнянь нейтрального типу в нескінченновимірному просторі, тобто рівнянь вигляду

$$d(X(t) - G(t, X_t)) = (AX(t) + F(t, X_t)) + \Sigma(t, X_t)dW(t),$$

коефіцієнти яких є операторами зі значеннями в нескінченновимірних просторах, відомо менше. Основна увага у них приділялась існуванню та керованості такими рівняннями.З цієї тематики відзначимо роботи [81](2008), [93] (2019), [58] (2019), [1], [2] (2009,2010), [68] (2009), [52] (2011), [78] (2018) та інші.

Окреме коло питань складають результати про існування інваріантних мір для рівнянь у гільбертових просторах. Основні результати тут стосуються розгляду наступного рівняння у гільбертовому просторі

$$dX(t) = (AX + F(X))dt + B(X)dW(t), \tag{1.1}$$

тут A взагалі кажучи, необмежений лінійний оператор, $W(t)$–нескінченновимірний процес Вінера.

У скінченновимірному випадку добре відомий результат Хасьмінського [59] про існування інваріантних мір, а саме, якщо рівняння (1.1) має обмежений у середньому (по часу) за ймовірністю розв'язок, то для нього існує інваріантна міра. Однак, у нескінченновимірному твипадку ситуація інша. У 1993 році I.Vrkoc привів приклад рівняння

$$dX(t) = F(X(t))$$

із ліпшицевою правою частиною,всі розв'язки якого прямують до нуля, але нуль не є його розв'язком, а відтак і не існує інваріантної міри. Однак, для рівнянь типу (1.1), за умови компактності напівгрупи операторів, породженої оператором A, як її генератором із існування обмеженого розв'язку вже випливає існування інваріантної міри. Доведення даного факту базується на так званому підході компактності, в основі якого лежить знаменита теорема Крилова-Боголюбова [62] (1937) про існування інваріантної міри для абстрактної марковської динамічної системи. Перший результат у цьому напрямку, для абстрактного еволюційного рівняння опубліковано в [31]. В подальшому теорія існування інваріантних мір та пов'язане з ним питання ергодичності зазнали суттєвого розвитку. Слід зазначити, що достатніми умовами існування інваріантних мір, окрім компактності напігрупи обмежених операторів є умова марковості сім'ї розвязків, її фелеровість і що саме головне, існування обмеженого на півосі у певному ймовірнісному сенсі розв'язку. Останню умову у конкретних рівняннях досить складно перевірити. Тому значна увага дослідників приділялась отриманню коефіцієнтних умов існування таких мір для конкретних виглядів еволюційних рівнянь. Досліджені також умови єдиності таких мір, їх абсолютна неперервність та збіжність до такої міри у метриках Вассерштейна. Із цього приводу відзначимо роботи Z. Brzezniak і D. Gatarek [37] (1999), B. Goldys і B. Maslowski [38] (2001), B. Maslowski й J. Seidler [71](1999), Chow [25] (2007) було знайдено умови існування інваріантної міри для випадку стохастичного диференціального рівняння типу реакції-дифузії в обмеженій області, тобто для оператора $A = \Delta$. Рівняння в необмеженій області досліджувалося в роботах S. Assing і R. Manthey . [3] (2003), G. Da Prato й J. Zabczyk [28] (1996), J.-P. Eckmann і M. Hairer [33] (2001), A. N. Stanzhytskyi і співавторів [92] (2018), [91] (2016), G. Tessitore й J. Zabczyk [96] (1999). Інваріантні міри для початково-крайових задач із крайовими умовами Діріхле для стохастичних диференціальних рівнянь реакції-дифузії вивчались в роботах C. Cerrai [21] (2006), [19] (2001), [20] (2003). Відзначимо також грунтовну монографію G. Da Prato й J. Zabczyk [30] (1992), де проведено детальний виклад цієї теорії.

Слід зауважити, що підхід компактності не завжди є ефективним, зокрема тоді, коли головний диференціальний оператор не є генератором компактної напігрупи. У цому випадку можна застосувати так званий «coupling method», або асимптотичний «coupling method», що базується на з'ясуванні умов, коли два розв'язки, які стартують із різних початкових даних склеюються після певного випадкового моменту часу. Його застосування до дослідження інваріанттних мір розвинуто в роботах V. I. Bogachev і M. Rockner [8](2001), M. Hairer і співавторів [42] (2011), M. Hairer . [69] (2002) ,J. Yang і T. Zhang [104](2012), J. Yang і співавторів [105] (2014) та інших авторів.

Питання існування інваріантних мір для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь на теперішній момент вивчене порівняно мало. Початок таких досліджень поклала робота A. Chojnowska-Michalik [24], де вивчались інваріантні міри для для таких півнянь у скінченновимірному випадку. Автор вихідне рівняння переписує у абстрактному вигляді (1.1) і застосовує підхід компактності. В роботах M. Scheutzow [26] (2013), M. Scheutzow та O. Butkovsky [84] (2017) у скінченновимірному випадку автори застосовують підхід «coupling method», причому достатні умови каплінгу дані у термінах функцій Ляпунова. Стосовно нескінченновимірного випадку відзначимо роботу [49] (2023), де приведені коефіцієнтні умови иснування інваріантних мір у рівняннях із головним еліпличним оператором, як у обмежених так і необмежених областях. Наскільки нам відомо, результатів із існування інваріантних мір для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу немає.

Окреме коло питань розгляду у роботі присвячене спареним стохастичним функціонально-лиференціальним рівнянням вигляду

$$\begin{cases} du(t) = [Au(t) + f(u_t, y_t)]dt + \sigma(u_t, y_t)dW(t), \\ dy(t) = g(u_t, y_t)dt, \quad t \geq 0, \\ u(t) = \phi(t),\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad h > 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Тут $u_t = u(t+\theta)$, $y_t = y(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, A є генератором аналітичної напівгрупи обмежених лінійних операторів $\{S(t) : t \geq 0\}$ у сепарабельному гільбертовому просторі H, $W(t)$ є Q-вінерівським процесом у сепарабельному гільбертовому просторі K, $u(t)$ є простором станів, функціонали f і g є відображеннями із простору неперервних на $[-h, 0]$ в H, σ є відображенням у простір операторів Гільберта-Шмідта, $\phi, \psi : [-h, 0] \to H$ є початковою функцією.

Спарені стохастичні рівняння типу (1.2) з'являються у різного типу застосуваннях; наприклад, бідоменне рівняння (модель серцевого дифебрилятора) [12], модель Ходжкіна-Хакслі для нервових аксонів, рівняння димікики ядерного реактора та інші. Характерною особливістю таких рівнянь є те, що одне із них є рівнянням у частинних похідних (нескінченновимірний об'єкт), а інше є звичайним диференціальним рівнянням (скінченновимірний об'єкт). Нелінійні члени у таких рівняннях, як правило, не задовольняють умову Ліпшиця, що значно ускладнює доведення теорем типу існування та єдиності. Яскравим прикладом спарених рівнянь є бідоменне рівняння. Класичне бідоменне рівняння виникакло в різних математичних моделях для описання розповсюдження імпульсів в електрофізіології. Ці моделі мають довгу традицію, стартувавши із відомої, вже згадуваної моделі Ходжкіна-Хакслі (1950). Бідоменне рівняння детально описане у монографії [56]. Ця система має вигляд

$$\begin{cases} \partial_t u + f(u, w) - \nabla \cdot (a_i \nabla u_i) = I_i \quad \text{in } (0, \infty) \times Q, \\ \partial_t u + f(u, w) + \nabla \cdot (a_e \nabla u_e) = -I_e, \quad \text{in } (0, \infty) \times Q, \\ \partial_t w + g(u, w) = 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times Q, \\ u_i - u_e = u, \quad \text{in } (0, \infty) \times Q, \end{cases} \tag{1.3}$$

із крайовими умовами

$$a_i \nabla u_i \cdot \nu = 0,\ a_l \nabla u_l \cdot \nu = 0 \quad \text{on } (0, \infty) \times Q,$$

і початковими даними $u(0) = u_0,\ w(0) = w_0$.

Функції I_i і I_e описують внутрішні і зовнішні поточні стимулятори відповідно. Класичними найпоширенішими нелінійностями тут є наступні:

нелінійність Алена Кана

$$\begin{cases} f(u) = u^3 - u, \\ g(u) = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

та Фітц-Хю-Нагумо

$$\begin{cases} f(u,w) = u(u-a)(u-1) + w, \\ g(u,w) = bw - cu, \end{cases} \tag{1.5}$$

де $0 < a < 1$, і $b, c > 0$ сталі.

В [12] (2009) введенням спеціального нелокального інтегро-диференціального оператора

$$Au = -\nabla(\sigma_i \nabla u) + \nabla(\sigma_i \nabla(\{\nabla \cdot (\sigma_i + \sigma_l)\nabla\}^{-1}(\nabla \cdot \sigma_i \nabla u))),$$

який назвали бідоменним, систему (1.3) переписали у абстрактній формі

$$\begin{cases} \partial u_t + f(u,w) + Au = s, \\ \partial w_t + g(u,w) = 0, \\ u(0) = u_0, \ w(0) = w_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Для (4.41), там же отримані умови існування глобальних слабких та локальних сильних розв'язків. У [48] (2018) за допомогою техніки максимальної регулярності із використанням теорем типу Сірріна, отримано умови існування глобальних сильних розв'язків. В роботі [47](2020), розглянуто бідоменне рівняння, збурене випадковми силами типу $Q-$ вінерівського процесу. Там отримано умови існування глобальних слабких і локальних сильних розв'язків, а також отримані умови існування інваріантних мір. Дані дослідження продовжено у [55] (2022), де отримано принцип великих відхилень, досліджено носій інваріантної міри та їїх поведінка при малих випадкових збуреннях.

Стохастичні функціонально-диференціальні рівняння такого типу раніше не вивчались.

1.1 Висновки до розділу 1

У цьому розділі дисертаційного дослідження зроблено огляд наукової літератури за тематикою роботи. А саме, висвітлено результати інших авторів і зроблено порівняльний аналіз із результатами дисертаційного дослідження щодо споріднених задач. Із наведених відомостей можна дійти наступних висновків: 1) стохастичні функціонально-диференціальні еволюційні рівняння як звичайного так і нейтрального типів є цікавими і актульними для вивчення;

2) недостатньо вивченими є питання існування інваріантних мір для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу;

3) представляє інтерес отримання коефіцієнтних умов коректної розв'язності та існування інваріантних мір для такого типу рівнянь у частинних похідних, що моделюють реальні процеси природознавства;

4) зовсім не вивчені стохастичні спарені функціонально-диференціальні рівняння.

Розділ 2

Попередні відомості

У цьому розділі ми приведемо деякі необхідні у подальшому означення і твердження. Результати тут викладені, містяться у [28], [30].

2.1 Марковські напівгрупи і інваріантні міри

Нехай E польський простір з метрикою ρ і для кожного $x_0 \in E, \delta > 0, B(x_0, \delta)$ - куля радіуса δ із центром в x_0

$$B(x_0, \delta) = \{x \in E^{\rho}(x, x_0) < \delta\}$$

Позначимо також через $\Theta = B(E)$ - борелівську σ алгебру підмножин із E і для кожної множини $\Gamma \in \Theta$ через χ_Γ позначимо характеристичну функцію цієї множини

$$\chi_\Gamma(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma; \\ 0, & x \in E \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Нехай $B_b(E)$ (відповідно $C_B(E)$) множини всіх дійсних обмежених борелівських функцій (відповідно неперервних обмежених функцій на E), а $M(E)$ множина всіх ймовірнісних мір, визначених на вимірному просторі (E, Θ).

Скажемо, що $P_t(x, \Gamma)$, $t \geq 0, x \in E, \Gamma \in \Theta$ є марковською перехідною функцією (коротко перехідною функцією) на E якщо :

1. $P_t(x, \bullet)$ є ймовірнісною мірою на (E, Θ) для всіх $t \geq 0, x \in E$;
2. $P_t(\bullet, \Gamma)$ є Θ - вимірною функцією для $t \geq 0, \Gamma \in \Theta$;
3. $P_{t+s}(x, \Gamma) = \int_E P_t(x, dy) P_s(y, \Gamma)$ для всіх $t, s \geq 0, x \in E, \Gamma \in \Theta$.

4. $P_0(x,\Gamma) = \chi_\Gamma(x)$, для всіх $x \in E$, $\Gamma \in \Theta$.

Будь-яка перехідна функція $P_t(x,\Gamma)$, $t \geq 0$, $x \in E$, $\Gamma \in \Theta$. визначає напігрупу лінійних операторів P_t, $t \geq 0$ на просторі $B_b(E)$ формулою

$$P_t\varphi(x) = \int\limits_E P_t(x,dy)\varphi(y), \quad t \geq 0, \quad x \in E, \quad \varphi \in B_b(E)$$

У цьому випадку P_t, $t \geq 0$ називається марковською перехідною напівгрупою, асоційованою із перехідною функцією $P_t(x,\Gamma)$. Надалі її коротко називатимемо марковською напівгрупою або перехідною напігрупою. Дана напівгрупа діє на обмежені функції.

Введемо також спряжену напівгрупу P_t^* що діє на ймовірнісні міри, а саме для кожного $t \geq 0$ і міри $\mu \in M(E)$ покладемо

$$P_t^*\mu(\Gamma) = \int\limits_E P_t(x,\Gamma)\mu(dx).$$

Назва спряжена пояснюється наступними міркуваннями.

Якщо для кожної $\varphi \in B_b(E)$ і кожної $\mu \in M(E)$ покласти

$$\langle\varphi,\mu\rangle = \int\limits_E \varphi(x)\mu(dx),$$

то з використанням теореми Фубіні легко бачити, що

$$\langle P_t\varphi,\mu\rangle = \langle\varphi, P_t^*\mu\rangle$$

Ймовірісна міра $\mu \in M(E)$ називається інваріантною відносно P_t, $t \geq 0$ якщо

$$P_t^*\mu = \mu, \quad \text{для} \quad t \geq 0$$

Знову, використавши теорему Фубіні легко бачити, що означення інваріантності еквівалентне наступній рівності

$$\int\limits_E P_t\varphi(x)\mu(dx) = \int\limits_E \varphi(x)\mu(dx), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in B_b(E)$$

Марковська напігрупа P_t, $t \geq 0$ називається стохастично неперервною якщо

$$\lim_{t\to 0} P_t(x, B(x,\delta)) = 1, \quad \text{для} \quad x \in E, \quad \delta > 0.$$

Якщо P_t є стохастично неперервною марковською напівгрупою, тоді для кожного $x \in E$ і $T > 0$ формула

$$\frac{1}{T}\int_0^T P_t(x,\Gamma)dt = R_T(x,\Gamma), \quad \Gamma \in \Theta \tag{2.1}$$

визначає ймовірнісну міру. Для кожної міри $\nu \in M(E)$, міра $R_T^*\nu$ визначається очевиним чином:

$$R_T^*\nu(\Gamma) = \int_E R_T(x,\Gamma)\nu(dx), \quad \Gamma \in \Theta. \tag{2.2}$$

Зрозуміло, що для кожнох функції $\varphi \in B_b(E)$ рівність (3.4) можна переписати у вигляді

$$\langle \varphi, R_T^*\nu \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \langle \varphi, P_T^*\nu \rangle dt.$$

В цьому сенсі ми пишемо

$$R_T^*\nu = \frac{1}{T}\int_0^T \langle \varphi, P_T^*\nu dt.$$

Стохастично неперервна марковська напівгрупа P_t, $t \geq 0$ називається феллеровською, якщо для довільної $\varphi \in C_b(E)$ і $t \geq 0$, $\quad P_t\varphi \in C_b(E)$.

Основним результатом відносно існування інваріантної міри є знаменита теорема Крилова-Боголюювова [62]

Теорема 2.1. *Нехай P_t, $t \geq 0$ є феллеровською напігрупа. Тоді якщо для деякої міри $\nu \in M(E)$ і деякої послідовності $T_n \to \infty$, $R_{T_n}^*\nu \to \mu$ слабко, $n \to \infty$ то μ є інваріантною мірою для P_t, $t \geq 0$.*

Нагадаємо, що послідовність мір $\{\mu_n\}$ на $(E, B(E))$ називається слабко збіжною до міри μ якщо для кожної функції $\varphi \in C_b(E)$ маємо

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi(x)\mu_n(dx) = \int_E \varphi(x)\mu(dx)$$

Зрозуміло, що кожна послідовність $\{\mu_n\}$ може мати лише одну слабку границю.

Множина Λ ймовірнісних мір на (E,Θ) називається щільною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує компакт $K_\varepsilon \subset E$ такий, що

$$\mu(E_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon, \quad \text{для кожної } \mu \in \Lambda.$$

Сім'я мір Λ називається компактною, якщо довільна послідовність $\{\mu_n\}$ елементів із Λ містить слабко збіжну до міри $\mu \in \Lambda$ підпослідовність. Справедлива наступна теорема Прохорова.

Теорема 2.2. *Множина ймовірнісних мір Λ є компактною тоді і тільки тоді, коли вона щільна.*

З даної теореми і теореми Крилова-Боголюбова випливає наступне зауваження.

Зауваження 2.1. Якщо для деякої міри $\nu \in M(E)$ і деякої послідовності $T_n \to \infty$ послідовність мір $\{R^*_{T_n}\nu\}$ є щільною, то існує інваріантна міра для P_t.

2.2 Ядерні оператори і оператори Гільберта-Шмідта

Нехай E і G банахові простори і $L(E,G)$ - банахів простір всіх лінійних обмежених операторів з E в G із звичайною операторноою нормою. Позначимо E^* і G^* спряжені до E і G відповідно простори.

Елемент $T \in L(E,G)$ називається ядерним оператором якщо існують дві послідовності $\{a_i\} \in G$, $\{\varphi_i\} \subset E^*$ такі, що

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\|\|\varphi_i\| < \infty$$

і T має вигляд

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x), \quad x \in E.$$

Простір всіх ядерних операторів із E в G наділений нормою

$$\|T\|_1 = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\|\|\varphi_i\| : Tx\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)\},$$

є банаховим простором і позначається $L_1(E, G)$. Якщо $E = G$ то його позначають $L_1(E)$.

Якщо K інший банахів простір, то зрозуміло, що за умови $T \in L(EG)$ і $S \in L(G, K)$ матимемо $TS \in L_1(E, K)$ і $\|TS\|_1 \le \|T\| \cdot \|S\|$

Нехай тепер H є сепарабельним простором Гільберта, а $\{e_k\}$ – повна ортонормована система в H. Якщо $T \in L_1(H)$ то визначимо слід T:

$$TrT = \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, e_i),$$

де $(\cdot, \cdot)$ - скалярний добуток в H.

Твердження 2.1. *Якщо $T \in L_1(H)$ то TrT коректно визначений і не залежить від вибору ортонормованого базису $\{e_i\}$.*

Твердження 2.2. *Невід'ємний оператор $T \in L(H)$ є ядерним тоді і тільки тоді, якщо для довільного ортонормованого базису $\{e_i\}$ в H виконана умова*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, e_i) < \infty.$$

При цьому $TrT = \|T\|_1$.

Нехай E і F два сепарабельних простори Гільберта з відповідними ортонормаваними базисами $\{e_i\} \subset H$ і $\{f_k\} \subset F$.

Лінійний обмежений оператор $T : H \to F$ називається оператором Гільберта-Шмідта якщо

$$\sum_{k=i}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty.$$

При цьому число $\|T\|_2 = (\sum_{k=i}^{\infty} \|Te_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$ не залежить від вибору базису і називається нормою Гільтерта-Шмідта оператора T.

Множину всіх операторів Гільтерта-Шмідта при цьому позначають $\Im_2(E,P)$. Неважко бачити, що даний простір є сепарабельним, гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(S,T)_2 = \sum_{k=1} \infty (Se_k, Te_k).$$

Твердження 2.3. *Нехай E, F і G - сепарабельні простори Гільтерта. Якщо $T \in L_2(E,F)$, а $S \in L_2(F,G)$ то $ST \in L_1(E,G)$*

$$\|ST\|_1 \leq \|S\|_2 \cdot \|T\|_2.$$

2.3 Нескінченновимірний процес Вінера і стохатичний інтеграл

Нехай (Ω, Z, P) - ймовірнісний пострі і задано нормальну фільтрацію $\{F_t\}$, $t \geq 0$.

Позначимо через U і H два сепарабельних гільбертових простори і розглянемо симетричний, невід'ємний оператор $Q \in L(U)$, де $L(U)$ - множина лінійних, обмежених операторів із U в U. Припустимо також, що $TrQ < \infty$.

Тоді існує повна ортонормована система $\{e_k\}$ в U і послідовність невід'ємних чисел λ_k така, що

$Qe_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, \ldots$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Позначимо $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(U)$.

Випадковий процес $W(t)$ називається Q - вінеровським процесом в U $t \geq 0$. якщо він допускає представлення

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} e_i \beta_i(t),$$

де $\beta_i(t)$ стандатні, скалярні процеси Вінера, незалежні у сукупності.

Стохастичний інтеграл в H а саме $\int_0^t \Phi(s) dW(s)$ вводиться наступним чином.

Нехай $T < \infty$ фіксоване.

Припустимо, що $W(t)$ задовольняє умови:

1. $W(t) \in F_t$вимірним при $t \in [0, T]$;
2. $W(t+h) - W(t)$незалежить відF_t, для $\forall h \geq 0, \quad \forall t \geq 0$.

$L(U, H)$ значний процес $\phi(t), t \in [0, T]$ називаєтсья елементарним, якщо існує скінченна послідовність $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$ і послідовність $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_{k-1}$ $L(U, H)$ значних випадкових величин таких, що $\phi_k \in F_{t_k}$ - вимірний і

$\phi(t) = \phi_i$, для $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Для елементарного процесу Φ стохастичний інтеграл визначаєтсья наступним чином

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s) = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_i (W(t_{i+1} - W(t_i)).$$

Для конструкції стохастичного інтеграла від більш загальних процесів важливу роль відіграє простір операторів Гільберта-Шмідта $L_2(U_0, H) = L_2^0$.

Нехай $\Phi(t)$, $t \in [0, T]$ є вимірним $L_2(U_0, H)$ значним процесом. Для нього визначається норма

$$|||\Phi|||_t = (E \int_0^t \|\Phi(S)\|_2^2 ds)^{\frac{1}{2}} = E(\int_0^t Tr((\Phi(s) Q^{\frac{1}{2}})(\Phi(s) Q^{\frac{1}{2}})^*) ds)^{\frac{1}{2}}.$$

Легко бачити, що для елементарного процесу Φ такого, що $|||\Phi|||_T < \infty$,

$$E \| \int_0^t \Phi(s) dW(s) \| = |||\Phi|||_t^2. \tag{2.3}$$

Позначимо $M_W^2(O, T; L_2^0)$ простір всіх L_2^0 значних, вимірних,F_t - вимірних процесів Φ таких, що $|||\Phi\|_T < \infty$.

Можна показати, що множина елементарних процесів є всюди щільною в $M_W^2(O, T; L_2^0)$.

Тоді, з використанням (2.3) (ізмоорфізм Іто) стохастичний інтеграл для процесів із $M_W^2(O, T; L_2^0)$ визначається як границя за ймовірністю стохастичних інтегралів від елементарних процесів.

Для процесів, що задовольняються слабкішу умову

$$P\{\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0} ds < \infty\} = 1$$

стохастичний інтеграл будується методом локалізації.

2.4 Напівгрупи обмежених операторів, генератори та дробові степені операторів

Нехай на E задано еволюційне рівняння вигляду

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

де $u'(t) = \frac{du(t)}{dt}$ - означає сильну похідну, A лінійний, взагалі кажучи, необмежений оператор $A : E \to E$ із щільною в E областю визначення $D(A)$. Припустимо, що задача Коші (2.4) має єдиний розв'язок для всіх початкоих даних $u_0 \in E$, який неперервно від них залежить. Позначимо його $u(t, u_0)$.

Очевидно тоді що $u(t, u_0)$ породжує сім'ю лінійних неперервних операторів $S(t) : E \to E$, $t \geq 0$ формулою $S(t)u_0 = u(t, u_0)$.

Дана напівгрупа має властивості:

1. $S(0) = E$ - тотожній оператор
2. $S(t + s) = S(t)S(s)$, для всіх $t, s \geq 0$ напівгрупова властивість;
3. $\lim_{t\downarrow 0} S(t)u = u$, для всіх $u \in E$.

Взагалі, довільна сім'я $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ лінійних обмежених операторів із E в E, що задовольняє умови 1-3 називається напігрупою класу C_0 або коротко C_0 - напівгрупою.

Інфінітеземальним генератором (або просто генератором) C_0 - напівгрупи $S(t)$ називаєтося лінійних оператор, визначений наступним чином

$$D(A) = \{u \in E : \exists \lim_{t\to 0_+} \frac{S(t)u - u}{t}\}$$

і

$$Ax = \lim_{t\to 0_+} \frac{S(t)u - u}{t} = \frac{d^+(S(t)u)}{dt} \,|_{t=0}, \quad \text{для} \quad u \in D(A).$$

Неважко довести, що $D(A)$ є щільною в E, а A є замкненим оператором. При цьому мають місце наступні властивості. Якщо $u \in D(A)$ то

1. $S(t)u \in D(A), \quad$ для всіх $\quad t \geq 0$;
2. $AS(t)u = S(t)Au, \quad t \geq 0$;
3. відображення $\quad t \longrightarrow S(t)u \quad$ є диференційовним при $\quad t > 0$ і $\frac{d}{du}(S(t)u) = AS(t)u, \quad t > 0$

Порівнюючи властивості розв'язку задачі Коші (2.4) і з даними властивостями доходимо висновку, що існування C_0 - напівгрупи $S(t)$ із генератором A рівносильне коректній розв'язаності відповіної задачі Коші (2.4).

C_0 - напівгрупа $S(t)$ називається компактною при $t > t_0$ якщо при всіх $t > t_0$ $S(t)$ є компактним оператором. Із напівгрупової властивості та властивостей компактних операторів випливає, що якщо $S(t_0)$ є компактниим оператором $(t_0 > 0))$, то тоді $S(t)$ є компатним для всіх $t \geq t_0$.

Якщо $S(t)$ є компактною напівгрупою при $t > t_0$ то $S(t)$ є неперервною у рівномірній операторній топології при $t > t_0$.

C_0 - напігрупа $S(t)$ називається диференційовною при $t > t_0$ якщо для всіх $u \in E$ відображення $t \longrightarrow S(t)u$ є диференційовним у сильному сенсі при $t > t_0$.

Якщо дане відображення є дійсною аналітичною функцією, то відповідну напівгрупу назвемо аналітичною.

Оператор A назвемо секторіальним, якщо $-A$ є генератором аналітичної напівгрупи. Це означення еквівалентне тому, що спектр оператора A лежить у деякому секторі.

Для секторіального оператора вводиться поняття його дробової степені, а саме для довільного $\alpha > 0$ покладемо

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt,$$

де через e^{-At} позначена C_0 - напігрупа $S(t)$ із генератором $-A$. Можна довести, що у випадку $Re(\sigma(A)) > 0$ оператор $A^{-\alpha}$ є обмеженим лінійним оператором, що взаємно-однозначно відображеє E на E. Обернений до цього оператора позначимо A^α, який і називається дробовим степенем оператора A. При цьому A^α є замкнутим, щільно визначеним оператором. Якщо $\alpha \geq \beta$, то $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ і $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ на множині $D(A^\alpha)$ де $j = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

Розділ 3

Стохастичні функціонально-диференціальниі рівняння нейтрального типу в гільбертових просторах

Розглядається стохастичне функціонально-диференціальне рівняння нейтрального типу у формі

$$d[u(t)+g(u_t)] = [Au + f(u_t)]dt + \sigma(u_t)dW(t) \text{ for } t > 0; \qquad (3.1)$$
$$u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0), \ h > 0.$$

Тут A інфінітезимальний генератор C_0 напівгрупи $\{S(t), t \geq 0\}$ обмежених лінійних операторів у дійсному сепарабельному просторі Гільберта H. Випадковий шум $W(t)$ є Q-вінеровським випадковим процесом у сепарабельному гільбертовому просторі K. Для $h > 0$ позначимо через $C_h := C([-h, 0], H)$ простір неперервних H-значних функцій $\varphi : [-h, 0] \to H$, з нормою

$$\|\varphi\|_{C_h} := \sup_{t\in[-h,0]} \|\varphi(t)\|_H,$$

де $\|\cdot\|_H$ означає норму в H. У цьому розділі, $\|\cdot\|_H$ буде позначатися $\|\cdot\|$ для зручності. Розв'язок $u(t)$ of (3.1) інколи називають процесом станів. Ми також позначимо $u_t := u(t+\theta)$, де $\theta \in [-h, 0)$. Функціонали f і g є відображеннями з C_h в H, і $\sigma : C_h \to \mathcal{L}_2^0$, де $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}(Q^{1/2}K, H)$ є простором операторів Гільберта-Шмідта з $Q^{1/2}K$ в H. Наостанок, $\varphi : [-h, 0] \times \Omega \to H$ є початковими даними (початковою функцією), де $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ повний ймовірнісний простір.

Даний розділ побудований таким чином. У підрозділі 3.1 дається строга постановка задачі та приведені деякі, необхідні в подальшому, допоміжні твердження. У підрозділі 3.2 доводиться снування, єдиність та неперервна залежність розвязків задачі (3.1) від початкових даних. Підрозділ 3.3 присвячений отриманюю умов існування нваріантних мір.

Результати цього розділу надруковані в статтях [74, 90] та апробовані на конференціях

3.1 Постановка задачі та допоміжні твердження.

Нехай H і K гільбертові простори з нормами $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|_K$ відповідно. При цьому $(\Omega, \mathcal{F}, P)$– повний ймовірнісний простір і Q є лінійним, обмеженим коваріаційним оператором таким, що $tr(Q) < \infty$. Введемо наступний випадковий процес

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \beta_i(t) e_i(x), \ t \geq 0,$$

що є Q-вінеровським процесом при $t \geq 0$. Тут $\beta_i(t)$ є стандартними, скалярними, незалежними у сукупності процесами Вінера, $\{e_k, k \geq 1\}$ –ортонормована система (базис) в K, і послідовність невід'ємних дійсних чисел λ_k задовольняє умови

$$Qe_k = \lambda_k e_k, k = 1, 2, ...$$

і

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty,$$

тобто, є власними векторамами і відповідно власними числами оператора Q. Також, нехай $\{F_t, t \geq 0\}$ є нормальною фільтрацією, що задовольняє умови:

- $W(t)$ is $\mathcal{F}_t$-вимірний;
- $W(t + h) - W(t)$ не залежить від $\mathcal{F}_t$ $\forall h \geq 0, t \geq 0$.

Як було сказано раніше, нехай

$$\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_2(Q^{1/2}K, H)$$

є простором всіх операторів Гільберта-Шмідта, що діють з простору $Q^{1/2}K$ у простір H зі скалярним добутком

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathcal{L}_2^0} = tr(\Phi Q \Psi^*).$$

Нехай також A є інфінітезимальним генератором аналітичної напівгрупи обмежених операторів $\{S(t), t \geq 0\}$ в H. Тоді, як відомо, [45] (див. також Розділ 2), оператор $-A$ є секторіальним. Відносно нього будемо вважати виконаною наступну умову

Умова (H1). Якщо $\sigma(-A)$ є спектром $(-A)$, то вимагатимемо, щоб

$$Re\ \sigma(-A) > \delta > 0, \ \text{ і } \ A^{-1} \text{ є компактним оператором в } H.$$

Тоді, як випливає з [75] для $0 \leq \alpha \leq 1$ ми можемо визначити дробові степені оператора $(-A)^{\alpha}$, що є замкненим лінійним оператором із областю визначення $D(-A)^{\alpha}$. Позначимо H_{α} банахів простір $D(-A)^{\alpha}$ із введенням наступної норми

$$\|u\|_{\alpha} := \|(-A)^{\alpha} u\|,$$

яка є рівносильною нормі графіка оператора $(-A)^{\alpha}$. При цьому $H_0 = H$. Як випливає тоді із [45], Sec. 1.4, що, якщо A^{-1} є компактним операторм, то напівгрупа $S(t)$ є компактною для всіх $t > 0$. Далі, як випливає з [75], Th. 3.2, p.48, що за умови (H1) напівгупа $S(t)$ є неперервною у рівномірній операторній топології для $t > 0$. Отже, використовуючи [75], Th. 3.3, p.48 ми можемо дійти висновку, що оператор A має компактну резольвенту. Значить, з використанням [45], Th. 1.4.8, ми отримуємо наступний результат:

Лема 3.1. *При виконанні умови (H1) вкладення $H_{\alpha} \subset H_{\beta}$ є компактним, якщо $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$.*

Лема 3.2. *([45], Th. 1.4.3) При виконанні умови (H1), для всіх $\alpha \geq 0$ існує стала $C_{\alpha} > 0$ така, що*

$$\|(-A)^{\alpha} S(t)\| \leq C_{\alpha} t^{-\alpha} e^{-\delta t}, t > 0.$$

Зокрема,

$$\|S(t)\| \leq C_0 e^{-\delta t}, t > 0. \tag{3.2}$$

Лема 3.3. *[30] Нехай $p > 2$, $T > 0$ і нехай також Φ є $\mathcal{L}_2^0$ значним, прогнозованим процесом таким, що*

$$\mathbb{E} \int_0^T \|\Phi(t)\|^p_{\mathcal{L}_2^0} dt < \infty.$$

Тоді існує стала $M_T > 0$ така, що

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t S(t-s)\Psi(s)dW(s)\right\|^p \leq M_T\mathbb{E}\int_0^T \|\Psi(s)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}ds.$$

Далі приведемо основні умови на коефіцієнти рівняння (3.1):

Умова (H2). Відображення $f : C_h \to H$ і $\sigma : C_h \to \mathcal{L}_2^0$ є неперервними і задовольняють умови

[i] Існує додатна стала $K > 0$ так, що

$$\|f(\varphi)\| + \|\sigma(\varphi)\|_{\mathcal{L}_2^0} \leq K(1 + \|\varphi\|_C) \text{ для всіх } \varphi \in C_h.$$

[ii] Існує функція $N : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ така, що

(a) функція N неперервною, неспадною, опуклою вгору і $N(0) = 0$;

(b) Для $p > 2$ і для всіх $\varphi_1, \varphi_2 \in C_h$ маємо

$$\|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\|^p + \|\sigma(\varphi_1) - \sigma(\varphi_2)\|^p_{\mathcal{L}_2^0} \leq N\left(\|\varphi_1 - \varphi_2\|^p_{C_h}\right).$$

(c) Якщо невід'ємна функція $z(t)$ задовольняє нерівність

$$z(t) \leq \int_0^t N(z(s))ds \text{ for all } t \in [0, T]$$

то $z \equiv 0$.

Зауваження 3.1. [81] Умова (c) виконана, наприклад, для функції N, що задовольняє (a) і

$$\int_0^1 \frac{ds}{N(s)} = +\infty.$$

Умова(H3). Існують додатні сталі $0 < \alpha \leq 1$ і $0 < M_g < 1$ такі, що для $\varphi_1, \varphi_2 \in C_h$ функція $g : C_h \to H_\alpha$ задовольняє умову

$$\|g(\varphi_1) - g(\varphi_2)\|_{H_\alpha} \leq M_g\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C_h}.$$

Умова (H4). Початкова функція $\varphi : [-h, 0] \times \Omega \to H$ є $\mathcal{F}_0$ - вимірною випадковою величиною, що незалежить від of W і має неперервні траєкторії.

Наразі приведемо означення, у сенсі якого ми будемо розуміти розв'язок задачі (3.1.

Означення 3.1. *[81] Неперервний $\mathcal{F}_t$-адаптований процес $u : [-h, T] \times \Omega \to H$ is a називається м'яким розв'язком для (3.1) на $t \in [0, T]$ якщо він задовольняє інтегральне рівняння*

$$u(t) = S(t)(\varphi(0) + g(\varphi)) - g(u_t) - \int_0^t AS(t-s)g(u_s)ds + \int_0^t S(t-s)f(u_s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(u_s)dW(s), \quad (3.3)$$

and $u(t) = \varphi(t)$ a.s. for $t \in [-h, 0]$.

Основними результатами даного розділу є теорема 3.1, теорема 3.2 і теорема 3.4, сформульвані нижче.

Теорема 3.1. *(Існування і єдиність) Нехай виконані умови (H1)-(H4). Тоді для всіх $T > 0$ рівняння (3.1) має єдиний м'який розв'язок u на $[0, T]$. Більше того, даний розв'язок задовольняє співвідношення*

$$\|u_t - u_0\|_{C_h} = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|u(t+\theta) - \varphi(\theta)\| \to^P 0, t \to 0.$$

Основна ідея доведення теореми 3.1 полягає у розгляді допоміжного напівлінійного рівняння, що у свою чергу дозволяє побудувати збіжну апроксимаційну послідовність. На відміну від стохастичних диференціально-функціональних рівнянь звичайного типу (з $g \equiv 0$), перша складність даних рівнянь (3.1) полягає у члені $AS(t-s)g(u_s)$. Взагалі кажучи, якщо $g(u_s) \in H$, даний член дає неінтегровну сингулярність при $t = s$. Ми долаємо дану складність введенням дробових степенів оператора $(-A)$. Більш точно ми покажемо, що якщо відображення g є достатньо регулярним, а саме $g(u_s) \in D(-A)^\alpha$ для $\alpha > 0$, тоді дана сингулярність стає інтегровною.

Зауваження 3.2. При доведенні теореми 3.1 ми використаємо метод роботи [81], де подібний результат отримано для нейтральних рівнянь у більш простому випадку. Однак, зазаначимо, що теорема 3.1 має інші умови на сталу Ліпшиця для g. А саме, у [81] подібна умова виглядає наступним чином

$$4^{p-1}\|(-A)^{-\alpha}\|^p M_g < 1,$$

що значно ускладніше для перевірки ніж $M_g < 1$. Аналогічні умови на $(-A)^{-\alpha}$ виникають і в роботах [1, 68] та інших. на додаток, ми послаблюємо умови регулярності для відображення $g(\varphi)$. Зокрема, ми вимагаємо, щоб $g \in H_\alpha$ для $\alpha \in (0,1)$, в той час, коли в [81] автори вимагають виконання наступної умови $\alpha \in (\frac{1}{p}, 1)$ для $p > 2$.

Наступна теорема стосується неперервної залежності розв'язків від початкових даних. Вона відіграє важливу роля для подальших досліджень щобо існування інваріантних мір. Саме звідси випливає важлива умова феллеровості відповідної перехідної напівгрупи (див. Частину 2), що є важливою умовою для застосування підходу компактоності.

Теорема 3.2. *(Неперервна залежність від початкових даних) Нехай виконані умови теореми 3.1, а $u(t,\varphi)$ і $u(t,\Psi)$ два неперервних розв'язки задачі(3.1) із початковими даними φ і Ψ, що задовольняють умову (H4). Тоді*

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \left[\|u(t,\varphi) - u(t,\Psi)\|^p + \|u_t(\varphi) - u_t(\Psi)\|^p_{C_h} \right] \to 0,$$

при $\mathbb{E}\|\varphi - \Psi\|^p_{C_h} \to 0$.

З'ясуємо тепер питання марковості і феллеровості розв'язків та пов'язаних із ними перехідних напівгруп. Позначимо через $B_b(C_h)$ як і раніше, банахів простір всіх обмежених дійсних вимірних за Борелем функцій над C_h і $C_b(C_h)$ простір всіх обмежених, неперервних функцій на C_h. Оскільки теорема 3.1 гарантує існування і єдиність розв'язку при всіх $t \geq 0$, то замінивши початковий інтервал $[-h, 0]$ на $[-h+s, s]$ для кожного $s \geq 0$ ми можемо гарантувати існування та єдиність розв'язку на довільному інтервалі $[s,t]$ із початковою $\mathcal{F}_s$ вимірною функцією φ, що задовольняє умови на $[s-h, s]$. Ці розв'язки позначимо як $u(t,s,\varphi)$. Аналогічно, позначимо через $u_t(s,\theta) = u(t+\theta, s,\varphi), \theta \in [-h, 0]$ зсув розв'язку $u(t,\varphi)$, так, що $u_s(s,\varphi) = u(s+\theta, s,\varphi) = \varphi(\theta)$.

Дотримуючись [100], визначимо сім'ю операторів зсуву

$$U_s^t \varphi := u(t+\theta, s, \varphi) = u_t(s,\varphi). \tag{3.4}$$

Позначимо $\mathcal{F}_s^t(dW)$ мінімальну σ - алгебру, що містить $W(\tau) - W(s), \tau \in [s,t]$, і G^t мінімальну σ - алгебру, що містить $W(\tau) - W(t)$ для $\tau \geq t$. Для довільного невипадкового $\varphi \in C_h$ з $s \geq 0$ і $t \geq s$ розв'язок $U_s^t\varphi = u_t(s,\varphi)$ є $\mathcal{F}_s^t(dW)$- вимірною випадковою функцією, що приймає значення в C_h. Зазначимо, що у цьому випадку, оскільки φ є не випадковим, $u_t(s,\varphi)$ є незалежним від σ - algebra G^t. Наступне твердження доведене у [49]:

Твердження 3.1. *Оператор (3.4) задовольняє рівність*

$$U_\tau^t U_s^\tau \varphi = U_s^t \varphi$$

для всіх $t \geq \tau \geq s \geq 0$, і $\varphi \in C_h$.

Нехай D є σ-алгеброю борелівських підмножин із C_h. Для кожної множини $A \in D$ визначимо функцію

$$\mu_t(A) = P\{u_t(s,\varphi) \in A\} = P\{U_s^t \varphi \in A\} = P(s,\varphi,t,A). \tag{3.5}$$

Таким чином $u_t(s,\varphi)$ природнім чином задає міру на D. Формула (3.5) визначає перехідну функцію, що відповідає випадковому процесу $u_t(s,\varphi), t \geq s \geq 0$. Аналогічним шляхом, як і в скінченномірному випадку [100], можна показати, що ця функція задовольняє всі властивості перехідної ймовірності. Аналогічно маємо

Теорема 3.3. *(Марковська властивість) За виконання умов теореми 3.1, випадковий процес $u_t(s,\varphi)$ є процесом Маркова на C_h із перехідною функцією, визначеною як (3.5).*

Має місце наступне твердження.

Твердження 3.2. *Для всіх $t \geq s \geq 0$ і кожної множини $A \in D$ маємо*

$$P(s,\varphi,t,A) = P(0,\varphi,t-s,A).$$

Доведення. Нехай $\tilde{u}(t) = u(s+t,s,\varphi)$. Тоді $\tilde{u}_0 = u(s+\theta,s,\varphi), \tilde{u}_t = u(s+t+\theta,s,\varphi) = u_{s+t}(s,\varphi)$, for $\theta \in [-h,0]$. Із іншої сторони,

$$\tilde{u}(t) = u(s+t,s,\varphi) = S(t)(\varphi(0)+g(\varphi)) - g(u_{t+s}) - \int\limits_s^{s+t} AS(t+s-\tau)g(u_\tau)d\tau$$

$$+ \int\limits_s^{s+t} S(t+s-\tau)f(u_\tau)d\tau + \int\limits_s^{s+t} S(t+s-\tau)\sigma(u_\tau)dW(\tau)$$

$$= S(t)(\varphi(0)+g(\varphi)) - g(u_{t+s}) - \int\limits_0^t AS(t-\tau)g(u_{\tau+s})d\tau + \int\limits_0^t S(t-\tau)f(u_{\tau+s})d\tau$$

$$+\int_0^t S(t-\tau)\sigma(u_{\tau+s})d\tilde{W}(\tau),$$

де $\tilde{W}(\tau) := W(s+\tau) - W(s)$ є Q-вінеровським процесом. Таким чином

$$\tilde{u}(t) = S(t)(\varphi(0) + g(\varphi)) - g(\tilde{u}_t) - \int_0^t AS(t-\tau)g(\tilde{u}_\tau)d\tau \tag{3.6}$$

$$+\int_0^t S(t-\tau)f(\tilde{u}_\tau)d\tau + \int_0^t S(t-\tau)\sigma(\tilde{u}_\tau)d\tilde{W}(\tau).$$

Проте, таке ж рівняння задовольняє і $u(t,0,\varphi)$, з початковою умовою $u(0,0,\varphi) = \varphi(0)$ і $u_0 = \varphi(\theta)$. Єдина відмість полягає в тому, $u(t,0,\varphi)$ розв'язує (3.6) з іншим Q-вінеровським процесом $\tilde{W}$. Але, оскільки розподіли процесу W співпадають із розподілами процесу $\tilde{W}$, то із єдиністі розв'язку випливає, що розподіли $u(s+t,s,\varphi)$ і $u(t,0,\varphi)$ співпадають. Іншими словами, розподіли $u(s+t,s,\varphi)$ незалежать від s. Отже розподіл $u_t(s,\varphi) = u(t+\theta,s,\varphi) = u(t-s+\theta+s,s,\varphi)$ співпадає з розподілами $u(t-s+\theta,0,\varphi) = u_{t-s}(0,\varphi)$. Тому справедливі наступні рівності

$$\begin{aligned} & P(s,\varphi,t,A) = P\{u_t(s,\varphi) \in A)\} = P\{u(t+\theta,s,\varphi) \in A\} \\ = \; & P\{u(t+\theta-s,0,\varphi) \in A\} = P\{u_{t-s}(0,\varphi) \in A\}, \end{aligned}$$

що й доводить твердження. □

Для $g \in B_b(C_h)$, і для всіх $\varphi \in C_h$ і $t \geq s \geq 0$ визначимо

$$P_{s,t}(\varphi) := \mathbb{E}\, g(u_t(s,\varphi)).$$

Із твердження 3.2 отримуємо, що $P_{s,t}(\varphi) = P_{0,t-s}(\varphi)$. Покладемо також $P_t\varphi = P_{0,t}(\varphi)$. Наступне твердження випливає із теореми 3.2.

Твердження 3.3. *При виконанні умов (H1)-(H4) перехідна напівгрупа $P_t, t \geq 0$ є стохастично неперервною та задовольняє властивість феллеровості*

$$P_t : C_b(C_h) \to C_b(C_h) \; and \; \lim_{t\to 0} P_t\varphi = \varphi.$$

Сформолюємо також тут основний результат даного розділу відносно поведінки розв'язків (3.1) на нескінченності. Він стосується існування інваріантної міри.

Теорема 3.4. *Нехай виконані умови теореми 3.1. Якщо рівняння (3.1) має розв'язок $u(t)$ який обмеженим за ймовірністю для $t \geq 0$ in C_h, а саме*

$$\sup_{t\geq 0} P\{\|u_t\|_{C_h} > R\} \to 0, R \to \infty. \tag{3.7}$$

Тоді існує інваріантна міра μ in C_h, тобто

$$\int_{C_h} P_t\varphi(x)d\mu(x) = \int_{C_h} \varphi(x)d\mu(x), \text{ for any } t \geq 0, \text{ and } \varphi \in C_b(C_h).$$

Зауваження 3.3. Умова (3.7) є стандартною умовою для існування інваріантних мір(див, наприклад [28]). Нижче ми продемонструємо перевірку цієї умови в термінах коефіцієнтів стохастичного фінкціонально-диференціального рівняння нейтрального типу у випадку еліптичного головного оператора A рівняння (3.1).

3.2 Існування, єдиність та неперервна залежність розв'язків від початкових даних

3.2.1 Доведення теореми існування та єдиності

В цьому підрозділі ми доведемо теорему 3.1. Для доведення застосуємо підхід роботи [81]. Припустимо спочатку, що $\mathbb{E}\sup_{\theta\in[-h,0]}\|\varphi(\theta)\|^p < \infty, p > 2$. Нехай $\mathcal{L}^p_{\mathcal{F}}([0,T],H)$ є банаховим простором всіх H-значних, $\mathcal{F}_t$-адаптованих випадкових процесів із нормою

$$\|\zeta\|^p_{H,T} := \mathbb{E}\int_0^T \|\zeta(t)\|^p dt.$$

Аналогічно, нехай $\mathcal{L}^p_{\mathcal{F}}([0,T],\mathcal{L}^0_2)$, є банаховим простором $\mathcal{L}^0_2$ значних $\mathcal{F}_t$-адаптованих випадкових процесів $\Phi(t)$ з нормою

$$\|\Phi\|^p_{L^0_2,T} := \mathbb{E}\int_0^T \|\Phi(t)\|^p_{L^0_2} dt.$$

Далі, визначимо $\mathcal{B}_{p,T}$ –банахів простір всіх H-значних, вимірних, неперервних $\mathcal{F}_t$-адаптованих (для $t \geq 0$) процесів $u(t,\omega) : [-h,T]\times\Omega \to H$, оснащених нормою

$$\|u\|^p_{\mathcal{B}_{p,T}} := \mathbb{E}\sup_{t\in[-h,T]}\|u(t)\|^p.$$

Нарешті, введемо замкнену множину

$$\mathcal{B}_{p,T}(\varphi) := \{u \in \mathcal{B}_{p,T}, u(t) = \varphi(t) \text{ for } t \in [-h, 0]\}.$$

Далі використаємо наступну лему:

Лема 3.4. *Нехай для $T > 0$, let $u(t), -h \leq t \leq T$ є випадковим процесом із неперервними траєкторіями. Тоді, якщо $p \geq 1$ і $u_0 = \varphi$, то справедлива наступна нерівність*

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} \|u_t\|_{C_h}^p \leq \mathbb{E}\|\varphi\|_{C_h}^p + \mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|^p.$$

Доведення даної леми 3.4 безпосередньо випливає із означення u_t.

Подальше доведення розіб'ємо на кілька етапів:

Step 1. Почнемо із допоміжного рівняння. Для довільних $(a, b) \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^p([0, T], H) \times \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^p([0, T], L_2^0)$ розглянемо наступне рівняння

$$\begin{cases} d(u(t) + g(u_t)) = [Au(t) + a(t)]dt + b(t)dW(t), t \geq 0; \\ u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{3.8}$$

Лема 3.5. *За виконання умов (H3) рівняння (3.8) має єдиний м'який розв'язок в $\mathcal{B}_{p,T}(\varphi)$.*

Доведення. Введемо оператор $\Psi : \mathcal{B}_{p,T}(\varphi) \to \mathcal{B}_{p,T}(\varphi)$ наступним чином

$$[\Psi u](t) := S(t)(\varphi(0) + g(\varphi)) - g(u_t) - \int_0^t AS(t-s)g(u_s)ds + \int_0^t S(t-s)a(s)ds + \int_0^t S(t-s)b(s)dW(s), \tag{3.9}$$

визначений для всіх $t \in [0, T]$, із $u(t) = \varphi(t)$ for $t \in [-h, 0]$. Покажемо, що відображення $\Psi : \mathcal{B}_{p,T}(\varphi) \to \mathcal{B}_{p,T}(\varphi)$ є відображенням стиску. Для цього спочатку доведемо, що Ψ приймає значення в $\mathcal{B}_{p,T}(\varphi)$. Використовуючи лему 3.4, отримаємо

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} \|g(u_t)\|^p \leq \mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} \|g(u_t)\|_\alpha^p \leq M_g^p(\|g(0)\|_{C_h}^p + \mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|^p).$$

Далі,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t AS(t-s)g(u_s)ds\right\|^p=\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t(-A)^{1-\alpha}S(t-s)(-A)^{\alpha}g(u_s)ds\right\|^p$$
$$\leq\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t\left\|(-A)^{1-\alpha}S(t-s)\right\|\|(-A)^{\alpha}g(u_s)\|\,ds\right)^p$$
$$\leq\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t C_{1-\alpha}(t-s)^{-(1-\alpha)}ds\right)^p\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\|g(u_t)\|_{\alpha}^p.$$

Решту два доданки можна оцінити стандартним способом (див, напр [81]):

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t S(t-s)a(s)ds\right\|^p\leq C_0^p\|a\|_{H,T}^p$$

і

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t S(t-s)b(s)dW(s)\right\|^p\leq C_0^p\|b\|_{L_2^0,T}^p,$$

де стала C_0 визначається через (3.2).

Доведемо тепер, що оператор Ψ є стискаючим.Зафіксуємо $T_1\in[0,T]$. Для кожного $\rho\in(0,1)$, і $a,b\geq 0$ використаємо нерівність

$$(a+b)^p\leq\frac{a^p}{\rho^{p-1}}+\frac{b^p}{(1-\rho)^{p-1}}.$$

Для всіх $u,v\in B_{p,T_1}$, матимемо

$$\|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{B_{p,T_1}}^p\leq\frac{1}{M_g^{p-1}}\|g(u_t)-g(v_t)\|_{B_{p,T_1}}^p$$
$$+\frac{1}{(1-M_g)^{p-1}}\left\|\int_0^t AS(t-s)(g(u_s)-g(v_s))ds\right\|_{B_{p,T_1}}^p$$
$$\leq\frac{1}{M_g^{p-1}}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T_1]}\|g(u_t)-g(v_t)\|^p$$
$$+\frac{1}{(1-M_g)^{p-1}}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T_1]}\left(\int_0^t\|(-A)^{1-\alpha}S(t-s)\|\|(-A)^{\alpha}(g(u_s)-g(v_s)\|ds\right)^p$$
$$\leq M_g\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T_1]}\|u_t-v_t\|_{C_h}^p+\frac{M_g^pC_{1-\alpha}^pT_1^{\alpha p}}{(1-M_g)^{p-1}\alpha^p}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T_1]}\|u_t-v_t\|_{C_h}^p$$

$$= \gamma(T_1)\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T_1]} \|u_t - v_t\|^p_{C_h}.$$

Тут ми використали лему 3.4 та лему 3.2. Врахувавши умову (H3), можемо вибрати T_1 так, щоб

$$\gamma(T_1) := M_g + \frac{M_g^p C_{1-\alpha}^p T_1^{\alpha p}}{(1-M_g)^{p-1}\alpha^p} < 1, \tag{3.10}$$

отже, оператор Ψ є оператором стиску в $\mathcal{B}_{p,T_1}(\varphi)$.Таким чином, Ψ має єдину нерухому точку, що є єдиним м'яким розв'язком рівняння (3.8) на відрізку $[0, T_1]$.

Покажемо, що даний розв'язок має неперервні траєкторії. Для цього безпосередньо перевіримо неперервність першого, другого та третього членів у рівнянні (3.9).Неперервність першого члена випливає із методу факторизації [30], Prop. 7.3.

Тепер встановимо неперервність другого доданка.Дійсно, оскільки u є непервним, то

$$\|g(u_{t+s}) - g(u_t)\| \le M_g\|u_{t+s} - u_t\|_{C_h} = \sup_{\theta\in[-h,0]} \|u(t+s+\theta) - u(t+\theta)\| \to 0, s \to 0 \ a.s.$$

Тепер ми можемо розглянути нову початкову задачу і новими початковими даними на $[T_1 - h, T_1]$, і так далі. Даним способом продовжимо розв'язок на весь інтервал $[0, T]$ за скінченну кількість кроків. Отже, рівняння (3.8) має єдиний м'який розв'язок, визначений на $[0, T]$, що і завершує доведення леми. □

Step 2. Для заданої $\varphi \in C_h$ визначимо оператор

$$\Phi_\varphi : L^p_{\mathcal{F}}([0,T], H) \times L^p_{\mathcal{F}}([0,T], L_2^0) \to \mathcal{B}_{p,T}$$

наступним чином

$$(\Phi_\varphi(a,b))(t) := \begin{cases} \varphi(t), t \in [-h, 0]; \\ u(t), t \in [0, T], \end{cases}$$

де u єдиний розв'язок рівняння (3.8).

Лема 3.6. *Якщо виконані умови (H3), то для довільного $p > 2$, існують додатні сталі B, D і L, залежні лише від T, M_g, p і α такі, що для довільного $t \in [0, T]$, довільних φ і ψ із C_h, і для всіх пар*

$$(a, b), (a_1, b_1) \ and \ (a_2, b_2) \in L^p_{\mathcal{F}}([0,T], H) \times L^p_{\mathcal{F}}([0,T], L_2^0),$$

виконані нерівності

$$\|\Phi_\varphi(a_1,b_1)-\Phi_\psi(a_2,b_2)\|^p_{\mathcal{B}_{p,t}} \le L\|\varphi-\psi\|^p_{C_h} \tag{3.11}$$
$$+B\int\limits_0^t \left[\mathbb{E}\|a_1(s)-a_2(s)\|^p+\mathbb{E}\|b_1(s)-b_2(s)\|^p_{L_2^0}\right]ds, \quad \text{та}$$

$$\|\Phi(a,b)\|^p_{\mathcal{B}_{p,t}} \le D+B\int\limits_0^t \left[\mathbb{E}\|a(s)\|^p+\mathbb{E}\|b(s)\|^p_{L_2^0}\right]ds. \tag{3.12}$$

Доведення. Для всіх (a_1,b_1) та (a_2,b_2) маємо

$$\Phi_\varphi(a_1,b_1):=u=S(t)(\varphi(0)+g(\varphi))-g(u_t)-\int\limits_0^t AS(t-s)g(u_s)ds$$
$$+\int\limits_0^t S(t-s)a_1(s)ds+\int\limits_0^t S(t-s)b_1(s)dW(s),$$

і

$$\Phi_\psi(a_2,b_2):=v=S(t)(\psi(0)+g(\psi))-g(v_t)-\int\limits_0^t AS(t-s)g(v_s)ds$$
$$+\int\limits_0^t S(t-s)a_2(s)ds+\int\limits_0^t S(t-s)b_2(s)dW(s).$$

Визначимо функцію

$$\beta(s):=\mathbb{E}\|a_1(s)-a_2(s)\|^p+\mathbb{E}\|b_1(s)-b_2(s)\|^p_{L_2^0}.$$

Тепер виберемо $T_1>0$, що задовольняє як (3.10) так і

$$M_g+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\left(\frac{C_{1-\alpha}T_1^\alpha M_g}{\alpha}\right)^p<1. \tag{3.13}$$

Зазначимо, що така стала T_1 завжди існує, оскільки $M_g<1$. Далі розділимо інтервал $[0,T]$ точкими kT_1, і розглянемо спочатку перший інтервал $t\in[0,T_1]$. Для кожного t матимемо

$$\|u-v\|^p_{\mathcal{B}_{p,t}}=\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s)-v(s)\|^p\le\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\Big[\|S(s)(g(\varphi)-g(\psi))\| \tag{3.14}$$

$$+\|S(s)(\varphi(0)-\psi(0))\|+\|g(u_s)-g(v_s)\|+\left\|\int_0^s AS(s-\tau)(g(u_\tau)-g(v_\tau))d\tau\right\|$$

$$+\left\|\int_0^s S(s-\tau)(a_1(\tau)-a_2(\tau))d\tau\right\|+\left\|\int_0^s S(s-\tau)(b_1(\tau)-b_2(\tau))dW(\tau)\right\|\Bigg]^p$$

$$\leq \frac{1}{M_g^{p-1}}\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|g(u_s)-g(v_s)\|^p+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}C_0^p(1+M_g^p)\|\varphi-\psi\|_{C_h}^p$$

$$+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\left(\int_0^s\|(-A)^{1-\alpha}S(s-\tau)\|\|(g(u_\tau)-g(v_\tau)\|_\alpha d\tau\right)^p$$

$$+C_0^p\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\int_0^t\beta(s)ds,$$

де C_0 задано в (3.2). Оцінимо кожний доданок в (3.14) окремо:

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|g(u_s)-g(v_s)\|^p\leq\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|g(u_s)-g(v_s)\|_\alpha^p\leq M_g^p\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u_s-v_s\|_{C_h}^p$$
$$=M_g^p\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\sup_{\theta\in[-h,0]}\|u(s+\theta)-v(s+\theta))\|^p=M_g^p\mathbb{E}\sup_{s\in[-h,t]}\|u(s)-v(s)\|^p$$
$$\leq M_g^p\|\varphi-\psi\|_{C_h}^p+M_g^p\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s)-v(s)\|^p. \tag{3.15}$$

Далі маємо

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\left(\int_0^s\|(-A)^{1-\alpha}S(s-\tau)\|\|(g(u_\tau)-g(v_\tau)\|_\alpha d\tau\right)^p$$
$$\leq\left(\frac{M_gC_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p\mathbb{E}\sup_{s\in[-h,t]}\|u(s)-v(s)\|^p$$
$$\leq\left(\frac{M_gC_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p\left(\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s)-v(s)\|^p+\|\varphi-\psi\|_{C_h}^p\right). \tag{3.16}$$

Використовуючи (3.14) - (3.16), отримаємо

$$\|u-v\|_{\mathcal{B}_{p,t}}^p\leq M_g\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s)-v(s)\|^p$$
$$+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\left(\frac{M_gC_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s)-v(s)\|^p$$

$$+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1} C_0^p \int_0^t \beta(s)ds + \tilde{L}_1\|\varphi-\psi\|^p_{C_h},$$

або

$$\|u-v\|^p_{\mathcal{B}_{p,t}} \le C_{T_1}\int_0^t \beta(s)ds + L_1\|\varphi-\psi\|^p_{C_h}, \tag{3.17}$$

де

$$C_{T_1} = \frac{\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}}{1-M_g-\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\left(\frac{M_g C_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p} C_0^p$$

і

$$L_1 = \left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\frac{C_0^p + M_g^p C_0^p + M_g^p + \left(\frac{M_g C_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p}{1-M_g-\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\left(\frac{M_g C_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p}.$$

Розглянемо тепер другий інтервал $t \in [T_1, 2T_1]$. Для нього матимемо

$$u(t) = S(t-T_1)(u(T_1)+g(u_{T_1})) - g(u_t) - \int_{T_1}^t AS(t-s)g(u_s)ds$$
$$+\int_{T_1}^t S(t-s)a_1(s)ds + \int_{T_1}^t S(t-s)b_1(s)dW(s), \tag{3.18}$$

і

$$v(t) = S(t-T_1)(v(T_1)+g(v_{T_1})) - g(v_t) - \int_{T_1}^t AS(t-s)g(v_t)ds$$
$$+\int_{T_1}^t S(t-s)a_2(s)ds + \int_{T_1}^t S(t-s)b_2(s)dW(s).$$

Отже

$$\begin{aligned} \|u-v\|^p_{\mathcal{B}_{p,t}} = \quad & \mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s)-v(s)\|^p \\ &= \max\{\mathbb{E}\sup_{s\in[0,T_1]}\|u(s)-v(s)\|^p, \mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p\} \\ &\le \mathbb{E}\sup_{s\in[0,T_1]}\|u(s)-v(s)\|^p + \mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Оцінимо другий член в(3.19). З (3.18) випливає, що

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p \le \mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\Big(\|g(u_s)-g(v_s)\|+\|S(s-T_1)\|(\|u(T_1)-v(T_1)\|$$

$$+\|g(u_{T_1})-g(v_{T_1})\|)+\int_{T_1}^{s} C_{1-\alpha}(s-\tau)^{-(1-\alpha)}M_g\|u_\tau-v_\tau\|_{C_h}d\tau+$$

$$\left\|\int_{T_1}^{s} S(s-\tau)(a_1(\tau)-a_2(\tau))d\tau\right\|+\left\|\int_{T_1}^{s} S(s-\tau)(b_1(\tau)-b_2(\tau))dW(\tau)\right\|\Bigg)^p \tag{3.20}$$

$$\le \frac{1}{M_g^{p-1}}\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|g(u_s)-g(v_s)\|^p+\frac{5^{p-1}}{(1-M_g)^{p-1}}\Big(C_0^p\Big(\mathbb{E}\|u(T_1)-v(T_1)\|^p$$

$$\mathbb{E}\|g(u_{T_1})-g(v_{T_1})\|^p\Big)\Big)+\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\left(\int_{T_1}^{s} C_{1-\alpha}(s-\tau)^{-(1-\alpha)}M_g\|u_\tau-v_\tau\|_{C_h}d\tau\right)^p$$

$$+C_0^p\int_{T_1}^{t}\beta(\tau)d\tau.$$

Поклавши $t=T_1$ in (3.17), матимемо

$$\mathbb{E}\|u(T_1)-v(T_1)\|^p\le C_{T_1}\int_0^{T_1}\beta(s)ds+L_1\|\varphi-\psi\|_{C_h}^p$$

і

$$\mathbb{E}\|g(u_{T_1})-g(v_{T_1})\|^p\le M_g^p\mathbb{E}\sup_{\theta\in[-h,0]}\|u(T_1+\theta)-v(T_1+\theta)\|^p$$

$$\le M_g^p\mathbb{E}\sup_{s\in[-h,T_1]}\|u(s)-v(s)\|^p\le M_g^pC_{T_1}\int_0^{T_1}\beta(s)ds+L_{21}\|\varphi-\psi\|_{C_h}^p.$$

Використавши результат леми 3.4, прийдемо до наступної оцінки:

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|g(u_s)-g(v_s)\|^p\le M_g^p\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\sup_{\theta\in[-h,0]}\|u(s+\theta)-v(s+\theta)\|^p$$

$$\le M_g^p\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1-h,t]}\|u(s)-v(s)\|^p$$

$$\le M_g^p\max\{\mathbb{E}\sup_{s\in[0,T_1]}\|u(s)-v(s)\|^p,\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p\}$$

$$\le M_g^pC_{T_1}\int_0^{T_1}\beta(s)ds+M_g^p\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p+M_g^pL_1\|\varphi-\psi\|_{C_h}^p.$$

Далі оцінимо інтегральний член в (3.20). Використавши лему 3.4 ще раз, матимемо

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\left(\int_{T_1}^{s}\frac{C_{1-\alpha}}{(s-\tau)^{1-\alpha}}M_g\|u_\tau-v_\tau\|_{C_h}d\tau\right)^p$$

$$\leq\left(\frac{M_gC_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\left(\sup_{\tau\in[T_1,s]}\left(\sup_{\theta\in[-h,0]}\|u(\tau+\theta)-v(\tau+\theta)\|^p\right)\right)$$

$$=\left(\frac{M_gC_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1-h,t]}\|u(s)-v(s)\|^p\leq\left(\frac{M_gC_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^pC_{T_1}\int_0^{T_1}\beta(s)ds \tag{3.21}$$

$$+\left(\frac{M_gC_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p+L_{22}\|\varphi-\psi\|_{C_h}^p.$$

З (3.20)-(3.21) випливає, що

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p\leq M_gC_{T_1}\int_0^{T_1}\beta(s)ds+M_g\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p$$

$$\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}C_0^pC_{T_1}\int_0^{T_1}\beta(s)ds+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}C_0^pC_{T_1}M_g^p\int_0^{T_1}\beta(s)ds$$

$$+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\left(\frac{M_gC_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p$$

$$+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}C_0^p\int_{T_1}^{t}\beta(s)ds+L_{23}\|\varphi-\psi\|_{C_h}^p,$$

або

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[T_1,t]}\|u(s)-v(s)\|^p\left(1-M_g-\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\left(\frac{M_gC_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p\right)$$

$$\leq\left(M_gC_{T_1}+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}C_0^pC_{T_1}+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}C_0^pC_{T_1}M_g^p\right)\int_0^{T_1}\beta(s)ds$$

$$+\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}C_0^p\int_{T_1}^{t}\beta(s)ds+L_{23}\|\varphi-\psi\|_{C_h}^p.$$

Прийнявши до уваги (3.19), дійдемо висновку, що

$$\|u-v\|^p_{\mathcal{B}_{p,t}} \le C_2(T_1)\int\limits_0^t \beta(s)ds + L_2(T_1)\|\varphi-\psi\|^p_{C_h},$$

де

$$C_2(T_1) = \frac{\tilde{C}_2(T_1)}{1-M_g-\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\left(\frac{M_g C_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p}$$

з

$$\tilde{C}_2(T_1) = C_{T_1}M_g + \left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1} C_0^p[C_{T_1}+C_{T_1}M_g^p+1].$$

Повторивши дані міркування на наступних інтервалах $[kT_1,(k+1)T_1]$, матимемо

$$\|u-v\|^p_{\mathcal{B}_{p,t}} \le C_k(T_1)\int\limits_0^t \beta(s)ds + L_k(T_1)\|\varphi-\psi\|^p_{C_h},$$

де

$$C_k(T_1) = \frac{\tilde{C}_k(T_1)}{1-M_g-\left(\frac{5}{1-M_g}\right)^{p-1}\left(\frac{M_g C_{1-\alpha}T_1^\alpha}{\alpha}\right)^p}$$

і сталі $\tilde{C}_k(T_1)$ залежать лише від $C_i(T_1)$, $i=1,\ldots,k-1$, а, отже ми можемо визначити T_1, що задовольняє умови (3.10) і (3.13). Аналогічно, $L_k(T_1)$ залежать лише від $L_i(T_1)$, $i=1,\ldots,k-1$, а, отже, є також коректно визначеними для T_1, що задовольняє умови (3.10) та (3.13). Оскільки інтервал $[0,T]$ складається із N інтервалів довжини T_1 (де T_1 залежить лише від M_g), (3.11) справедливе із $B=\max_{0\le k\le N-1} C_k$. Накінець, нерівність (3.12) випливає з (3.11) якщо покласти $a_2=b_2=0$. □

Побудова апроксимуючої послідовності.

Існування та єдиність м'якого розв'язку рівняння (3.1) ми встановимо використовуючи ітераційну схему пікаровських наближень. Для фіксованого $T>0$, через $u^{(0)}$ позначимо м'який розв'язок рівняння (3.8) із $a\equiv b\equiv 0$. Тепер можна визначити послідовність випадкових процесів $u^{(n)}(t)$, як розв'язків рівняння

$$u^{(n)}(t) = S(t)(\varphi(0)+g(\varphi)) - g(u_t^{(n)}) - \int\limits_0^t AS(t-s)g(u_s^n)ds + \int\limits_0^t S(t-s)f(u_s^{n-1})ds$$
$$+\int\limits_0^t S(t-s)\sigma(u_s^{n-1})dW(s),\ \ t\in[0,T] \quad (3.22)$$

при цьому $u^{(n)}(t) = \varphi(t)$ для $t \in [-h, 0]$. У [81] показано, що якщо мають місце оцінки (3.11) і (3.12), то ітераційна схема (3.22) збігається до єдиного м'якого розв'язку рівняння (3.1). Отже, теорема 3.1 буде доведена якщо справедлива оцінка $\mathbb{E}\|\varphi\|^p_{C_h} < \infty$. на початкову функцію. У загальному випадку для доведення теореми використаємо метод локалізації, а саме визначимо послідовність зрізок, як у [30], Th.7.4.

$$\varphi_n := \begin{cases} \varphi, & \text{if } \|\varphi\|_{C_h} \le n \\ 0, & \text{if } \|\varphi\|_{C_h} > n. \end{cases}$$

Нехай u_n є розв'язком рівняння (3.1) із початковою функцією φ_n. Згідно [30], Th.7.4, послідовність u_n збігається за ймовірністю до процесу $u(t)$, що і є розв'язком рівняння (3.1). Останнє завершує доведення теореми 3.1.

3.2.2 Доведення теореми 3.2.

Використовуючи лему 3.6, отримаємо

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,t]} \|u^{(n)}(s)\|^p \le K_1 + C_1 \mathbb{E}\|\varphi\|^p_{C_h} + K \int_0^t \mathbb{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|u^{(n-1)}(s)\|^p d\tau.$$

Тоді аналогічна оцінка справедлива і для розв'язку $u(t)$ також. Тоді, з використанням леми Гронуолла матимемо

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\|^p \le (K_1 + C_1 \mathbb{E}\|\varphi\|^p_{C_h}) e^{Kt}. \tag{3.23}$$

Далі, для двох розв'язків $u(t)$ and $v(t)$ з випадковими початковими даними φ і ψ відповідно, з використанням леми 3.6 отримаємо

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,t]} \|u(s) - v(s)\|^p \le L\mathbb{E}\|\varphi - \psi\|^p_{C_h} + B \int_0^t \mathbb{E}N(\sup_{\tau\in[0,s]} \|u_\tau - v_\tau\|^p) ds$$

$$\le L\mathbb{E}\|\varphi - \psi\|^p_{C_h} + BtN(\|\varphi - \psi\|^p_{C_h}) + B \int_0^t \mathbb{E}N(\sup_{\tau\in[0,s]} \|u(\tau) - v(\tau)\|^p) ds,$$

де ми неявно використали той факт, що $\sup_{\tau\in[-h,s]} N(\|u(\tau) - v(\tau)\|^p)$ досягається або на $\tau \in [-h, 0]$ або на $\tau \in [0, s]$, і таким чином

$$\mathbb{E}N(\sup_{\tau\in[-h,s]}\|u(\tau)-v(\tau)\|^p)$$
$$=\max\{\mathbb{E}N(\sup_{\tau\in[-h,0]}\|u(\tau)-v(\tau)\|^p),\mathbb{E}N(\sup_{\tau\in[0,s]}\|u(\tau)-v(\tau)\|^p)\}$$
$$\leq \mathbb{E}N(\sup_{\tau\in[-h,0]}\|u(\tau)-v(\tau)\|^p)+\mathbb{E}N(\sup_{\tau\in[0,s]}\|u(\tau)-v(\tau)\|^p).$$

Із (3.23) і з того, що $\mathbb{E}\|\varphi_n-\varphi\|^p_{C_h}\to 0, n\to\infty$, матимемо

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s,\varphi_n)-u(s,\varphi)\|^p\leq B\int_0^t N(\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\sup_{\tau\in[0,s]}\|u(\tau,\varphi_n)-u(\tau,\varphi)\|^p)ds.$$

Отже, із умови (H2)(c), тоді отримуємо

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s,\varphi_n)-u(s,\varphi)\|^p=0,$$

що і завершує доведення теореми 3.2.

3.3 Інваріантні міри

В цьому підрозділі ми доведемо основний результат даного розділу, а саме теорему 3.4, про існування інваріантних мір. Ідея доведення базується на підході компактності [28]. Нехай $u(t)$ є м'яким розв'язком рівняння (3.1), що задовольняє умову (3.7). Нашою метою є доведення того факту, що сім'я розподілів $\mathcal{L}(u_t), t \geq T$, with $T \geq 2h$, породжених розв'язком є щільною в C_h. А саме, ми покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує компакт $K_\varepsilon \subset C_h$, такий, що

$$P\{u_t \in K_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon. \tag{3.24}$$

Справедива наступна рівність

$$\begin{aligned} u_T &= u(T+\theta) = S(T+\theta)(\varphi(0) + g(\varphi)) - g(u_{T+\theta}) - \int_0^{T+\theta} AS(T+\theta-s)g(u_s)ds \\ &+ \int_0^{T+\theta} S(T+\theta-s)f(u_s)ds + \int_0^{T+\theta} S(T+\theta-s)\sigma(u_s)dW(s). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Лема 3.7. *Нехай $\varphi(t,\omega) : C_h \times \Omega \longrightarrow C_h$ є випадковим процесом таким, що для всіх $\gamma > 0$*

$$\lim_{\sigma \to 0} P\{\omega : \sup_{t,s\in[-h,0],|t-s|<\sigma} \|\varphi(t,\omega) - \varphi(s,\omega)\|_{C_h} > \gamma\} = 0. \tag{3.26}$$

Тоді, для довільного $\varepsilon > 0$ існує множина $B_\varepsilon \in \Omega$ така, що:

1. *$P\{B_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon$;*
2. *сім'я функцій $\{\varphi(t,\omega), \omega \in B_\varepsilon\}$ є рівностепенево неперервною на $[-h, 0]$.*

Доведення. Із (3.26) випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\{\delta_k, k \geq 1\}$ таке, що $\delta_k \longrightarrow 0$ і

$$P\{\omega : \sup_{t,s\in[-h,0],|t-s|<\sigma} \|\varphi(t,\omega) - \varphi(s,\omega)\|_{C_h} > \frac{1}{k}\} \leq \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{3.27}$$

Позначимо

$$A_k := \{\omega : \sup_{t,s\in[-h,0],|t-s|<\sigma} \|\varphi(t,\omega) - \varphi(s,\omega)\|_{C_h} > \frac{1}{k}\}.$$

Тоді з (3.27) отримуємо, що

$$P\{\cup_{k\geq 1} A_k\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leq \varepsilon.$$

Покладемо

$$B := \overline{\cup_{k\geq 1}A_k} = \cap_{k\geq 1}\overline{A_k} = \cap_{k\geq 1}\{\omega : \sup_{t,s\in[-h,0],|t-s|<\sigma} \|\varphi(t,\omega) - \varphi(s,\omega)\|_{C_h} \leq \frac{1}{k}\}.$$

Тоді $P\{B\} > 1-\varepsilon$, а якщо $\omega \in B$, то $\omega \in \overline{A_k}$, і для кожного $\gamma > 0$ виберемо $k > \frac{1}{\gamma}$, що означатиме $\|\varphi(t,\omega) - \varphi(s,\omega)\|_{C_h} \leq \frac{1}{k} < \gamma$ for $|t-s| < \delta_k$. Це і завершує доведення леми 3.7. □

Лема 3.8. *Нехай D множина функцій $\varphi_t \in C([-h,0], C_h)$, що має наступні властивості:*

1. *існує $R > 0$ таке, що*

$$\|\varphi_0\|_{C_h} \leq R \text{ для всіх } \varphi_t \in D.$$

2. *множина функцій D є рівностепенево неперевною на $[-h,0]$ по t.*

Тоді множина $\{g(\varphi_t), \varphi \in D\}$ є компактом в C_h.

Доведення. Для доведення використаємо нескінченновимірну версію теореми Арцела-Асколлі. Для цього потрібнодовести два твердження:

[i] Для фіксованого $t \in [-h,0]$, множина $\{g(\varphi_t), \varphi \in D\}$ є компактом в H;

[ii] для довільного $\varepsilon > 0$, існує $\delta > 0$ таке, що

$$\|g(\varphi_t) - g(\varphi_s)\| < \varepsilon, \text{ якщо } |t-s| < \delta, \quad t,s \in [-h,0].$$

Як випливає із визначення множини D, існує $C > 0$ таке, що

$$\sup_{t\in[-h,0]} \|\varphi_t\|_{C_h} \leq C \text{ for any } \varphi_t \in D.$$

Використавши умову (H3), отримаємо

$$\|g(\varphi_t)\|_\alpha \leq M_g\|\varphi_t\|_{C_h} + \|g(0)\| \leq M_g C + \|g(0)\|.$$

Отже, множина D обмежена в H_α, тому, як випливає з леми 3.1, компактна в H. Більш того, для всіх $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність

$$\|g(\varphi_t) - g(\varphi_s)\| \leq \|g(\varphi_t) - g(\varphi_s)\|_\alpha \leq M_g\|\varphi_t - \varphi_s\|_{C_h},$$

що і завершує доведення леми. □

Лема 3.9. *Оператор*

$$[B\varphi](\theta) := \int_0^{T+\theta} AS(T+\theta-s)\varphi(s)ds$$

є компактним оператором з $C([0,T],H_\alpha)$ *в* C_h.

Доведення. Для доведення ми знову застосуємо нескінченновимірний аналог теореми Арцела-Асколлі. Для фіксованих $\theta \in [-h,0]$ і $\varepsilon > 0$ позначимо

$$[B^\varepsilon\varphi](\theta) := \int_0^{T+\theta-\varepsilon} AS(T+\theta-s)\varphi(s)ds = \int_0^{T+\theta-\varepsilon} AS(\varepsilon)S(T+\theta-\varepsilon-s)\varphi(s)ds,$$

Оскільки A є генератором аналітичної напівгрупи, то $S(T+\theta-\varepsilon-s)\varphi(s) \in D(A)$. Отже,

$$\int_0^{T+\theta-\varepsilon} AS(\varepsilon)S(T+\theta-\varepsilon-s)\varphi(s)ds = S(\varepsilon)\int_0^{T+\theta-\varepsilon} AS(T+\theta-\varepsilon-s)\varphi(s)ds.$$

Але

$$\left\|\int_0^{T+\theta-\varepsilon} AS(T+\theta-\varepsilon-s)\varphi(s)ds\right\|$$
$$\leq \int_0^{T+\theta-\varepsilon} C_{1-\alpha}(T+\theta-\varepsilon-s)^{\alpha-1}ds \sup_{s\in[0,T]}\|\varphi(s)\|_\alpha \leq \frac{C_{1-\alpha}T^\alpha}{\alpha}\sup_{s\in[0,T]}\|\varphi(s)\|_\alpha.$$

Оскільки множина $S(\varepsilon)$ компактна, то приходимо до висновку, що оператори B^ε компактні. Далі отримуємо

$$\|B^\varepsilon\varphi - B\varphi\| \leq \int_{T+\theta-\varepsilon}^{T+\theta} C_{1-\alpha}(T+\theta-s)^{\alpha-1}ds \sup_{s\in[0,T]}\|\varphi(s)\|_\alpha \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Отже, послідовність операторів B^ε збігається до оператора B в рівномірній операторній нормі, а тому B є компактним оператором і множина

$$\{B\varphi(\theta) : \sup_{t\in[0,T]}\|\varphi(t)\|_\alpha \leq 1\}$$

є компактом в H. Зафіксуємо θ і r так, що $-h \le \theta \le \theta + r \le 0$. Тоді для φ, що задовольняє нерівність $\sup_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\|_\alpha \le 1$ матимемо

$$\|(B\varphi(\theta+r) - B\varphi(\theta)\| \le \left\| \int_0^{T+\theta} (AS(T+\theta+r-s) - AS(T+\theta-s))\varphi(s)ds \right\| + \left\| \int_{T+\theta}^{T+\theta+r} AS(T+\theta+r-s)\varphi(s)ds \right\| := J_1 + J_2.$$

З урахуванням леми 3.2, для J_2 маємо оцінку:

$$J_2 \le \int_{T+\theta}^{T+\theta+r} C_{1-\alpha}(T+\theta+r-s)^{\alpha-1}ds \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\|_\alpha \to 0, r \to 0.$$

Щоб оцінити J_1 проведемо наступні міркування:

$$J_1 \le \int_0^{T+\theta} \|(AS(s+r) - AS(s))\varphi(T+\theta-s)\| \, ds.$$

Оскільки $S(s)\varphi(T+\theta-s) \in D(A)$, то використовуючи властивість неперервності напівгрупи, матимемо

$$(AS(s+r) - AS(s))\varphi(T+\theta-s) = S(r)AS(s)\varphi(T+\theta-s) - AS(s)\varphi(T+\theta-s) \to 0, r \to 0.$$

Більш того,

$$\|AS(s+r)\varphi(s)\| \le \frac{C_{1-\alpha}}{s^{1-\alpha}} \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\|_\alpha.$$

Отже, з використанням теореми Лебега про мажоровану збіжність $J_1 \to 0$ якщо $r \to 0$, що і завершує доведення леми 3.9. □

Наступний результат отримано в [49], Lemma 3.3:

Лема 3.10. *Для довільних $p > 2$ і $\beta \in (\frac{1}{p}, 1]$ оператор*

$$(G_\beta\varphi)(\theta) = \int_0^{T+\theta} (T+\theta-s)^{\beta-1}S(T+\theta-s)\varphi(s)ds$$

є компактним оператором із $L^p([0,T], H)$ в C_h.

Тепер для довільних $\varphi \in C_h$, $\psi, \eta \in L^p([0,T],H)$, і $\xi \in C([0,T],H)$, введемо

$$\mu[\varphi,\xi,\psi,\eta] := S(T+\theta)(\varphi(0)+g(\varphi)) - g(u_t) + \int\limits_0^{T+\theta} AS(T+\theta-s)\xi(s)ds + (G_1\psi)(\theta) + (G_\beta\eta)(\theta),$$

і позначимо

$$K(r) := \{\mu[\varphi,\xi,\psi,\eta] \in C_h : \|\varphi\|_{C_h} \le r, \sup_{t\in[0,T]} \|\xi\| \le r, \|\psi\|_{L^p([0,T],H)} \le r, \|\eta\|_{L^p([0,T],H)} \le r\}.$$

Із лем 3.9 і 3.10випливає, що множина $K(r)$ є компактом в C_h.

Нехай тепер $u(t,\varphi)$ є розв'язком рівняння (3.1) із початковими даними $\varphi \in C_h$.

Лема 3.11. *Далі введемо функцію*

$$z(\theta) := S(T+\theta)(\varphi(0)+g(\varphi)) + \int\limits_0^{T+\theta} AS(T+\theta-s)g(u_s(\varphi))ds + \int\limits_0^{T+\theta} S(T+\theta-s)f(u_s(\varphi))ds + \int\limits_0^{T+\theta} S(T+\theta-s)\sigma(u_s(\varphi))dW(s).$$

Нехай виконані умови теореми 3.1. Тоді існує стала $C > 0$ така, що для довільного $r > 0$ і довільного $\varphi \in C_h$ з $\|\varphi\|_{C_r} \le r$, маємо

$$P\{z(\theta) \in K(r)\} \ge 1 - Cr^{-p}(1 + \|\varphi\|_{C_r}^p).$$

Доведення. Зафіксвуємо $p > 2$ і $\beta \in \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right)$. Використовуючи факторизаційну формулу [28], Th.5.2.5, отримаємо

$$z(\theta) = S(T+\theta)(\varphi(0)+g(\varphi)) + \int\limits_0^{T+\theta} AS(T+\theta-s)g(u_s(\varphi))ds + (G_1 f(u_s))(\theta) + \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi}(G_\beta Y(s))(\theta),$$

де

$$Y(s) = \int\limits_0^s (s-\tau)^{-\beta} S(s-\tau)\sigma(u_\tau)dW(\tau).$$

Із леми 7.2 [78] випливає

$$\mathbb{E}\int_0^T \|Y(s)\|^p ds = \mathbb{E}\int_0^T \left\| \int_0^s (s-\tau)^{-\beta} S(s-\tau)\sigma(u_\tau)dW(\tau) \right\|^p$$
$$\le C_0^p \mathbb{E}\int_0^T \left(\int_0^s (s-\tau)^{-2\beta} \|\sigma(u_\tau\|^2_{\mathcal{L}_2^0} d\tau \right)^{p/2} ds.$$

Отже, використавши нерівність Хаусдорфа-Юнга для конволюцій та умову (H2)(i), отримаємо

$$\mathbb{E}\int_0^T \|Y(s)\|^p ds \le C_{21} \left(\int_0^T t^{-2\beta} dt \right)^{\frac{p}{2}} \left(1 + \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi\|^p_{C_h} \right).$$

Значить, прийнявши до уваги (3.23) і лему 3.4, матимемо

$$\mathbb{E}\int_0^T \|Y(s)\|^p ds \le C_{22} \left(1 + \|\varphi\|^p_{C_h} \right).$$

Аналогічно,

$$\mathbb{E}\int_0^T \|f(u_s)\|^p ds \le C_{23} \left(1 + \mathbb{E}\|\varphi\|^p_{C_h} \right).$$

Більш того, із використанням умови (H3), (3.23)і леми 3.4 дійдемо висновку

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,T]} \|g(u_s(\varphi))\|^p_\alpha \le C_{24} \left(1 + \|\varphi\|^p_{C_h} \right).$$

Таким чином

$$P\{z(\theta) \notin K(r)\} \le P\{\|f(u_s(\varphi))\|_{L^p([0,T],H)} > r\} + P\{\|Y(s)\|_{L^p([0,T],H)} > \frac{\pi r}{\sin(\beta\pi)}\}$$
$$+ P\{\sup_{s\in[0,\tau]} \|g(u_s(\varphi))\|_\alpha > r\} \le r^{-p} C \left(1 + \mathbb{E}\|\varphi\|^p_{C_h} \right),$$

що завершує доведення леми 3.11. □

Має місце наступне твердження.

Лема 3.12. *Випадковий процес $u_{T+\theta}$ задовольняє співвідношення (3.26) якщо* $\mathbb{E}\|u_0\|^p_{C_h} < \infty$.

Доведення. Доведення випливає із нерівності Чебишева. Дійсно, для довільного $\gamma > 0$ маємо

$$P\{\sup_{\theta_1,\theta_2\in[-h,0]} \|u_{T+\theta_1} - u_{T+\theta_2}\|_{C_h} > \gamma\} \leq \frac{1}{\gamma^p}\mathbb{E} \sup_{\theta_1,\theta_2\in[-h,0]} \|u_{T+\theta_1} - u_{T+\theta_2}\|^p_{C_h}.$$

Нехай $\mu := \theta_2 - \theta_1$. Тоді

$$\sup_{\theta\in[-h,0]} \|u_{T+\theta+\mu} - u_{T+\theta}\|^p_{C_h} \leq \sup_{\theta\in[-h,0]} \sup_{s\in[T-h,T]} \|u(s+\theta+\mu) - u(s+\theta)\|^p$$
$$\leq \sup_{s\in[0,T]} \|u(s+\mu) - u(s)\|^p,$$

оскільки $T > 2h$. Отже, $u(s,\omega)$ є неперервним в H з ймовірністю 1 на $[0,T]$. Таким чином $u(s)$ є рівномірно неперервним на $[0,T]$, отже

$$\sup_{s\in[0,T]} \|u(s+\mu) - u(s)\|^p \longrightarrow 0 \text{ a.s. as } \mu \longrightarrow 0.$$

Значить

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,T]} \|u(s+\mu)\|^p \leq \mathbb{E} \sup_{s\in[0,T+1]} \|u(s)\|^p < \infty,$$

згідно теореми Лебега про мажоровану збіжність, маємо

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,T]} \|u(s+\mu) - u(s)\|^p \longrightarrow 0 \text{ as } \mu \longrightarrow 0,$$

отже,

$$\mathbb{E} \sup_{\theta_1,\theta_2\in[-h,0],|\theta_1-\theta_2|<\delta} \|u_{T+\theta_1} - u_{T+\theta_2}\|^p_{C_h} \longrightarrow 0, \text{ якщо } \delta \longrightarrow 0,$$

що завершує доведення леми. □

Повернемось до доведення теореми 3.4. Для довільного $\varepsilon > 0$ покажемо існування компактної множини K_ε в C_h, що задовольняє умову (3.24). Із леми 3.12, $u_{T+\theta}$ випливає виконання умови (3.26), значить існує множина $B_{\varepsilon/3}$ така, що $P\{B_\varepsilon\} > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$, і так, що множина функцій

$$\{u_{T+\theta}(\omega), \omega \in B_{\varepsilon/3}\}$$

є рівностепеневою на $[-h,0]$. Далі виберемо $R_1 > 0$ так, щоб

$$P\{\|u_T\|_{C_h} > R_1\} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Згідно умови (3.7), такий вибір завжди можливий. Отже, згідно леми 3.8 існує компактна множина $K_{\frac{2\varepsilon}{3}} \in C_h$ така, що

$$P\{g(u_{T+\theta})(\omega) \in K_{\frac{2\varepsilon}{3}}\} \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{3.28}$$

Використовуючи марковську властивість при $t > T$, для довільної борелівської множини $K \subset C_h$ отримаємо

$$\begin{aligned} P\{u_t \in K\} &= \mathbb{E}(P(u_t \in K | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(P(0, u_{t-T}, T, K)) \\ &\geq \mathbb{E}(P(0, u_{t-T}, T, K)\chi_{\{\|u_{t-T}\|^p_{C_h} \leq R_1\}}). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Тепер, прийнявши до уваги лему 3.11, ми можемо вибрати $r > R_1$ так, що

$$P\{z(\theta) \in K(r)\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.30}$$

З (3.25), (3.28) і (3.30) випливає існування компакта $K_\varepsilon \subset C_h$ такого, що

$$P\{u_T \in K(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Поклавши $K = K_\varepsilon$ in (3.29) матимемо

$$P\{u_t \in K(\varepsilon)\} \geq (1 - \varepsilon) P\{\|u_{t-T}\|^p_{C_h} \leq R_1\}.$$

Із урахуванням тепер умови (3.7), доведення теореми 3.4 завершене.

3.4 Застосування до рівнянь параболічного типу

Достатні умови існування інваріантних мір, отримані у попередньому підрозділі, містять одну умову, яку досить складно перевіряти, а саме умову існування глобально обмеженого розв'язку. У застосуваннях бажано було б мати якісь коефіцієнтні умови існування такого розв'язку. В даному підрозділі ми приведемо такі умови для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у частинних похідних параболічного типу із головним еліптичним оператором A. Ми також приведемо приклад неліпшицевих нелінійностей f and σ, що задовольняють умови основної теореми.

Нехай D −обмежена область в $\mathbb{R}^d$ з межею ∂D, що задовольняє умову Ляпунова, у якості основного гільбертового простору візьмемо $H = L^2(D)$ і

$$Au = \sum_{i,j=1}^{d} (a_{i,j}(x) u_{x_i})_{x_j} = div(a(x)\nabla u).$$

Тут $a_{i,j}$ неперервні за Гельдером коефіцієнти із показником Гельдера $\beta \in (0,1)$, симетричні, обмежені і задовольняють умову рівномірної еліптичності

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}\eta_i\eta_j \geq C_0\|\eta\|^2, \eta \in \mathbb{R}^d,$$

для деякої сталої $C_0 > 0$. Нехай, також $e_n(x)$ є ортонорваним базисом в H таким, що $e_n \in L^\infty(D)$ і $\sup_n \|e_n\|_{L^\infty(D)} < \infty$. Введемо наступний коваріаційний оператор $Q \in \mathcal{L}(H)$ такий, що Q є невід'ємним і $Tr(Q) < \infty$, а також $Qe_n = \lambda_n e_n$. Це дозволяє визначити наступний випадковий процес

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\beta_i(t)e_i(x), t \geq 0,$$

що є Q-вінеровим процесом для $t \geq 0$, який приймає значення в $L^2(D)$. Визначимо також $U := Q^{\frac{1}{2}}(L^2(D))$. Із [70], Lemma 2.2, випливає, що $U \in L^\infty(D)$. Із [70] випливає, що даний оператор діє $\Psi : U \to H$. Для фіксованого $\varphi \in L^2(D)$, покладемо $\Psi(\varphi) = \varphi \cdot \psi$ for $\psi \in U$. Оскільки $\varphi \in L^2(D)$ і $\psi \in L^\infty(D)$, то оператор Ψ визначений коректно і отже $\Psi \circ Q^{1/2} : L^2(D) \to L^2(D)$ є оператором Гільберта-Шмідта і його норма Гільберта-Шмідта задовольняє нерівність

$$\|\Psi \circ Q^{1/2}\|^2_{\mathcal{L}_2^0} \leq Tr(Q)\sup_n \|e_n\|^2_\infty \|\varphi\|^2_{L^2(D)}.$$

Основним об'єктом нашого дослідження в даному підрозділі є наступне рівняння із запізненням:

$$d[u(t,x) + \int_D b(x, u(t-h,y), y)dy] = [div(a(x)\nabla u(t,x)) + f(u(t-h,x))]dt$$
$$+ \sigma(u(t-h,x))dW(t) \quad (3.31)$$

при $t > 0$, з $u(t,x) = \varphi(t,x)$ для $t \in [-h, 0]$ і $u(t,x) = 0$ при $x \in \partial D, t \geq 0$. Тут $b(x,z,y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Введемо наступне відображення

$$g(\varphi)(x) := \int_D b(x, \varphi(-h), y)dy$$

як відображення з C_h в $L^2(D)$. Тоді задача (3.31) може бути переписана в абстрактній формі (3.1), з $D(A) = H^2(D) \cap H_0^1(D)$.

Має місце наступне твердження.

Наслідок 3.1. *Нехай f і σ задовольняють умови (H2) (як відображення Немицького),а початкові дані φ задовольняють умову (H4). На додаток припустимо, що дійснозначна функція b є неперервною за всіма змінними та існують сталі $A > 0$ і $M_g > 0$ такі, що*

$$|b(x, 0, y)| + |\nabla_x b(x, z, y)| \le A$$

а також

$$|b(x, z_1, y) - b(x, z_2, y)| + |\nabla_x b(x, z_1, y) - \nabla_x b(x, z_2, y)| \le M_g |z_1 - z_2|$$

для всіх $x, y \in D$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ і

$$2M_g^2 \; meas^2(D) < 1. \tag{3.32}$$

Тоді рівняння (3.31) *має єдиний м'який розв'язок. Якщо, окрім того, функції f, σ і b обмежені, то існує інваріантна міра для відповідної перехідної напівгрупи, що відповідає рівнянню* (3.31).

Доведення. Для доведення даного факту потрібно перевірити умови теореми 3.1. Зауважимо, що оператор $(-A)$ є секторіальним, самоспряженим оператором. І як випливає, наприклад, з [35], p.335 на його спектр маємо умову $\sigma(-A) > \sigma_0 > 0$, а також $(-A)^{-1}$ є компактним оператором. Отже, умова (H1) виконана. Окрім того, слідуючи [40] введемо інтерполяційний простір $D_A(\frac{1}{2}, 2) = H_0^1$. Але, згідно Proposition A.17 [30] $D_A(\frac{1}{2}, 2)$ ізометричний до $D((-A)^{\frac{1}{2}})$, і

$$\|g(\varphi)\|^2_{\frac{1}{2}} = \|g(\varphi)\|^2_{H_0^1} = \int\limits_D |(g(\varphi)(x)|^2 dx + \int\limits_D |\nabla g(\varphi)(x)|^2 dx.$$

Тоді

$$\int\limits_D |g(\varphi)(x)|^2 dx = \int\limits_D dx \left(\int\limits_D b(x, \varphi(-h, y), y) dy \right)^2$$

$$\le L^2 meas^2(D) \left(\int\limits_D |\varphi(-h, y)|^2 dy + 1 \right) < \infty.$$

За теоремою Лебега про диференційовність інтеграла за параметром, маємо,

$$\nabla g(\varphi)(x) = \int\limits_D \nabla_x b(x, \varphi(-h, y), y) dy,$$

отже

$$\int_D |\nabla g(\varphi)(x)|^2 dx < \infty.$$

Нарешті,

$$\|g(\varphi_1) - g(\varphi_2)\|^2_{\frac{1}{2}} = \int_D |g(\varphi_1)(x) - g(\varphi_2)(x)|^2 dx$$

$$+ \int_D |\nabla_x g(\varphi_1)(x) - \nabla_x g(\varphi_2)(x)|^2 dx$$

$$\leq \int_D dx \left(\int_D |b(x, \varphi_1(-h, y), y) - b(x, \varphi_2(-h, y), y)| dy \right)^2$$

$$+ \int_D dx \left(\int_D |\nabla_x b(x, \varphi_1(-h, y), y) - \nabla_x b(x, \varphi_2(-h, y), y)| dy \right)^2$$

$$\leq 2 meas^2(D) M_g^2 \sup_{\theta \in [-h, 0]} \int_D |\varphi_1(\theta, y) - \varphi_2(\theta, y)|^2 dy$$

$$= 2 meas^2(D) M_g^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2_{C_h},$$

що гарантує виконання умови (H3). Таким чином [i] випливає із теореми 3.1.

Для отримання (3.7) тепер залишається застосувати теорему 3.4. Із умови на спектр оператора A випливає експоненціальна оцінка на норму відповідної напівгрупи, для якої оператор A є генератором

$$\|S(t)\| \leq K e^{-\sigma_0 t}, t \geq 0.$$

Нехай також

$$|f|^2 + |\sigma|^2 + |b|^2 + |\nabla_x b|^2 \leq C.$$

Тоді із леми 3.4 маємо

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}\|u_t\|^2_{C_h} \leq \mathbb{E}\|\varphi\|^2_{C_h} + \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}\|u(t)\|^2_{L^2(D)},$$

звідки отримуємо

$$\mathbb{E}\|u(t)\|^2 \leq 5\mathbb{E}\|S(t)(\varphi(0) + g(\varphi))\|^2 + 5\mathbb{E}\|g(u_t)\|^2 + 5\mathbb{E}\left\|\int_0^t AS(t-s) g(u_s) ds\right\|^2$$

$$+5\mathbb{E}\left\|\int_0^t S(t-s)f(u_s)ds\right\|^2 + 5\mathbb{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\sigma(u_s)dW(s)\right\|^2$$

$$\leq 5K^2e^{-2\sigma_0 t}\mathbb{E}\|\varphi(0)+g(\varphi)\|^2 + C^2 meas^2(D) + \mathbb{E}\left(\int_0^t \left\|A^{1/2}S(t-s)\right\|\|g(u_s)\|_{1/2}\right\| ds\right)^2$$

$$+K^2\int_0^t e^{-\sigma_0(t-s)}Cds + K^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \sup_{n\geq 1}\|e_n\|_\infty^2 \int_0^t e^{-\sigma_0(t-s)}ds.$$

Оскільки $\|g(u_s)\|_{1/2} < \infty$ і $\|A^{1/2}S(t-s)\| \leq C_{1/2}(t-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\sigma_0(t-s)}$, то ми отримуємо $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\|u(t)\|^2 < \infty$. Таким чином умова (3.7) виконана із врахуванням нерівності Чебишева. □

Нарешті приведемо приклад неліпшицевої нелінійності, що задовольняє умови тереми існування та єдиності.

Приклад 3.1. Нехай $meas(D) = 1$. Для $x \geq 0$ покладемо

$$N(x) := \begin{cases} 0,\ x = 0; \\ -x\ln(x),\ 0 < x \leq e^{-2}; \\ x + e^{-2},\ x > e^{-2}. \end{cases} \tag{3.33}$$

Із урахуванням зауваження 3.1, так вибрана функція N задовольняє умови (a) і (c) з (H2). Для $p > 2$ нехай тепер

$$f(x) := \begin{cases} 0,\ x = 0; \\ |x|p^{1/p}\left|\ln|x|\right|^{1/p},\ 0 < |x| \leq e^{-2}; \\ \text{будь яка ліпшицева функція із сталою Ліпшиця } L \leq 1,\ |x| > e^{-2}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Доведемо, що для всіх $x, y \in [0, e^{-2}]$ виконана нерівність

$$|f(x) - f(y)|^p \leq N(|x-y|^p) \tag{3.35}$$

Дійсно, оскільки f є вігнутою на $[0, e^{-2}]$ і $f(0) = 0$, то вона також є субадитивною на цьому інтервалі, тобто $\forall a, b : f(a) + f(b) \geq f(a+b)$. Остання нерівність означає, що якщо $0 < x < y < e^{-2}$, то матимемо

$$f(x) + f(y-x) \geq f(y),$$

або

$$(f(y) - f(x))^p \leq f^p(y - x) = N\left((y - x)^p\right).$$

Використавши такі ж міркування якщо $y < x$, доведемо виконання нерівності (3.35). Оскільки f є парною на інтервалі $[-e^{-2}, e^{-2}]$ і ліпшицевою поза ним, то неважко бачити що що нерівність (3.35) виконана для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. Зазначимо, що оскільки $meas(D) = 1$, то нерівність (3.35) рівносильна нерівності

$$\|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\|^p \leq N(\|\varphi_1 - \varphi_2\|^p) \tag{3.36}$$

що в свою чергу приводить до (H2) (b) для двох сталих початкових даних $\varphi_1(t, x) \equiv \varphi_1$ і $\varphi_2(t, x) \equiv \varphi_2$, $x \in D$, $t \in [-h, 0]$. Щоб отримати (H2) (b) для не сталих φ_1 і φ_2, ми поділимо область D на підобласті, далі апроксимуємо φ_1і φ_2 кісково сталими функціями, сталими у кожній підобласті та використаємо (3.35) в поєднанні з увігнутістю N, отримаємо (3.36) для кусково сталих функцій. Для отримання нерівності (3.36) у загальному випадку тепер залишається перейти до границі, коли число поділів області прямує до нескінченності.

Отже, рівняння (3.31) із неліпшицевою f, що задана формулою (3.34), є прикладом коректно розв'язного стохастичного функціонально-диференціального рівняння нейтрального типу, що допускає існування інваріантної міри. Ті ж міркування справедливі у випадку вибору $\sigma \equiv f$, що дається формулою (3.34).Єдина відмінність цього випадку полягає в тому, що ми повинні дещо модифікувати вибір N в (3.33), взявши $\tilde{N} := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sup_n \|e_n\|_{\infty}^2 N$.

3.5 Інваріантні міри одного класу лінійних систем

При дослідженні інваріантних мір для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь важливу роль відіграє поведінка лінійної частини рівняння із головним лінійним, необмеженим оператором. У даному розділі ми розглянемо приклад лінійного стохастичного рівняння, та приведемо необхідні і достатні умови єдиності інваріантної для нього міри. Отже, розглянемо наступне лінійне стохастичне рівняння в гільбертовому просторі H

$$du = Audt + dw_b(t), \tag{3.37}$$

де $A : D(A) \subset H \to H$, лінійний, замкнутий оператор, що генерує C_0- напівгрупу в H, а H – значний процес Вінера $W_b(t)$ має вигляд

$$W_b(t) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta_n(t), \tag{3.38}$$

де $\{\beta_n, n \geq 0\}$ – незалежні, скалярні процеси Вінера, задані на деякому ймовірнісному просторі (Ω, F, P), $t \geq 0$, $b_n \in H$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||b_n||_H^2 < \infty. \tag{3.39}$$

Перейдемо тепер до постановки задачі та формулювання результатів. Нехай u, $v \in H$. Через (u, v) позначимо скалярний добуток в H. Введемо в розгляд наступний лінійний оператор в H

$$u \otimes v[h] := u(v, h), h \in H.$$

Через Q позначимо наступний лінійний в H оператор, пов'язаний з $W_b(t)$

$$Q := \sum_{i=1}^{\infty} b_i \otimes b_i. \tag{3.40}$$

Лема 3.13. *Введений формулою (3.38) випадковий процес $W_b(t)$ є Q - вінеровським процесом в H з коваріаційним оператором (3.40).*

Нехай $\{F_t, t \geq 0\}$ нормальна фільтрація, узгоджена з $W_b(t)$. Позначимо через $S(t)$ напівгрупу обмежених в H операторів, генератором якої є оператор A. Процес

$$W_A(t) = \int_0^t S(t-s) dW_b(s) \tag{3.41}$$

згідно [30] називається стохастичною конволюцією. Із теореми 5.2 [30] випливає, що процес $W_A(t)$ є гаусівським і з наступним коваріаційним оператором

$$CovW_A(t) = Q_t = \int_0^t S(s) Q S^*(s) ds. \tag{3.42}$$

Наступний результат стосується сліду TrQ_t (ядерної норми) даного оператора.

Лема 3.14. *Має місце наступна рівність*

$$TrQ_t = \int\limits_o^y \sum_{i=1}^{\infty} ||S(s)b_i||^2 ds \tag{3.43}$$

Якщо TrQ_t скінчений, то згідно з теоремою 5.4 [30] рівняння (3.37) має для кожного $u_0(\omega) \in H$, $u_0 \in F_0$ вимірний єдиний слабкий розв'язок $u(t)$, $u(0) = u_0$, що задається формулою

$$u(t) = S(t)u_0 + \int\limits_o^t S(t-s)dW_b(s), t \geq 0 \tag{3.44}$$

Даний розв'язок є процесом Маркова із перехідною функцією

$$P(t, x, A) = P\{u((t, x) \in A\}, \tag{3.45}$$

тут $u(t, x)$ – розв'язок (3.37) з початковою умовою $u(0, x) = x \in H$.

Із перехідною функцією пов'язана перехідна напівгрупа P_t, $t \geq 0$

$$P_t\phi(x) = E\phi(u(t, x)), \phi \in B_b(H), t \geq 0, x \in H, \tag{3.46}$$

тут $B_b(H)$ простір борелевих, обмежених функціоналів на H.

Нехай $B(H)$ $-\sigma$-алгебра борелівських множин з H. Нагадаємо, що ймовірнісна міра μ на $(H, B(H))$ називається інваріантною відносно напівгрупи P_t, якщо

$$\int\limits_H P_t\phi(x)d\mu(x) = \int\limits_H \phi(x)d\mu(t)$$

для довільного $t \geq 0$ і довільної неперервної, обмеженої на H функції ϕ.

Відносно оператора A будемо вважати виконаною наступну умову:

а) $A \in$ самоспряженим оператором на H, що має дискретний спектр $\sigma = \{\lambda_k\}$ і існує $\varepsilon > 0$, що $|Re(\lambda_k)| > \varepsilon$, для всіх k.

Нехай $\{\phi_k\}$ відповідні власні значення оператора A.
Позначимо

$$U_A := Span\{\phi_k, Re(\lambda_k) < 0\}.$$

Тоді, як випливає з [45] section 7.6 оператор A є експоненціально дихотомічним і для довільного $b \in U_A$, $||S(t)b|| \to 0$, $t \to \infty$, а для довільного $b \notin U_A$, $||S(t)b|| \to \infty$, $t \to \infty$. Підпростір U_A при цьому називають стійким многовидом. Відносно затухання розв'язків, що стартують із стійкого многовиду, справедливий наступний результат.

Лема 3.15. $||S(t)u_0|| \leq e^{-\mu t}||u_0||$ *для довільного* $u_0 \in U_A$, *де* $\mu = max\{2Re\lambda_k\}$, *для тих* λ_k, *що* $Re\lambda_k < 0$.

Отже, дана лема показує, що напівгрупа $S(t)$ має експоненціально стискаючу властивість на U_A.

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 3.5. *Нехай для оператора A виконується умова a).*

Для рівняння (3.37) існує єдина інваріантна міра тоді і тільки тоді, коли $b_n \in U_A$, *для всіх* $n \geq 1$, *іншими словами*

$$b_n = \sum_{k:Re(\lambda_k)<0} b_k^{(n)}\phi_k.$$

В цьому випадку носій інваріантної міри лежить в U_A.

Перейдемо тепер до доведення лем та теореми.
Доведення леми 1. Порахуємо $E||W_b(t)||^2$. Маємо

$$E||W_b(t)||^2 = E(\sum_i b_i(t)\beta_i(t), \sum_i b_i\beta_i(t)) = t\sum_i |bi|^2 < \infty.$$

Отже $W_b(t) \in H$ з ймовірністю 1. Очевидно, що $W_b(t)$ є гаусівським процесом із незалежними приростами і має неперервні в H траєкторії. Покажемо, що оператор Q визначений формулою (3.40) є обмежений в H.
Дійсно для довільного $h \in H$ маємо

$$||Qh|| \leq \sum_i ||b_i(b_i, h)|| \leq \sum_i ||b_i||^2||h||.$$

Звідси в силу (3.39), випливає обмеженість Q.

Нехай h, y – довільні елементи в H. Зі співвідношення

$$(Qh, y) = (\sum_{i=1}^{\infty} b_i(b_i, h), y) = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i(b_i, h), y) = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i, h)(b_i, y)$$

та

$$(h, Qy) = (h, \sum_{i=1}^{\infty} b_i(b_i, y)) = \sum_{i=1}^{\infty}(h, b_i)(b_i, y)$$

випливає самоспряженість оператора Q, а при $h = y$ його невід'ємність. Доведемо його ядерність.

Нехай $\{e_i\}_1^{\infty}$ – ортонормований базис в H. Тоді

$$TrQ = \sum_{j=1}^{\infty}(Qe_j, e_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}((b_i \otimes b_i)e_j, e_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(b_i(b_i, e_j)e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(b_i, e_j)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}||b_i||^2 < \infty.$$

Залишилось порахувати $CovW_b[h]$ для довільного $h \in H$. Маємо:

$$CovW_b[h] := E(W_b \otimes W_b)[h] =$$

$$= E(\sum_{i=1}^{\infty} b_i\beta_i(t)(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\beta_j(t), h)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} b_i(b_it, h) = tQ[h],$$

що і доводить лему 1.

Доведення леми 2. Порахуємо слід оператора Q_t. Маємо

$$S(t)QS^*(t) = S(t)(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \otimes b_i)S^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty} S(t)(b_i \otimes b_i)S^*(t). \qquad (3.47)$$

Але

$$S(t)(b_i \otimes b_i)S^*(t) = (S(t)b_i) \otimes (S(t)b_i). \qquad (3.48)$$

.

Дійсно для довільного $h \in H$ маємо

$$S(t)(b_i \otimes b_i)S^*(t)h = S(t)(b_i(b_i, S^*(t)h)) =$$

$$= S(t)b_i(S(t)b_i, h)) = (S(t)b_i) \otimes (S(t)b_i),$$

згідно з означенням операції $\otimes$. Тоді із (3.48) випливає, що (3.47) набуває вигляду

$$S(t)QS^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty}(S(t)b_i) \otimes (S(t)b_i),$$

а тому

$$TrQ_t = \sum_{k=1}^{\infty}(Q_t e_k, e_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t (S(s)b_i) \otimes (S(s)b_i) \otimes (S(s)b_i)ds e_k, e_k) =$$

$$= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(S(s)b_i, e_k)^2 ds =$$

$$= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty}||S(s)b_i||^2 ds,$$

що і доводить лему 2.

Доведення леми 3. Якщо $u_0 \in U_A$, то він допускає розклад $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^0 \phi_k$, де $C_k^0 = 0$, якщо $Re\lambda_k > 0$. Нехай $u(t)$ розв'язок наступної задачі Коші

$$\begin{cases} u_t = Au \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.49}$$

Розкладаючи $u(t)$ за власним базисом $\{\phi_k\}$ оператора A, отримуємо

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)\phi_k. \tag{3.50}$$

Тоді, підставляючи (3.50) в (3.49) матимемо

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{'}(t)\phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)A\phi_k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k C_k(t)\phi_k,$$

Звідки

$$C_k(t) = C_k^0 e^{\lambda_k t}.$$

Тому, згідно рівності Парсеваля, отримуємо

$$||u(t)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k(t)|^2 = \sum_{k:Re(\lambda_k)<0} (C_k^0)^2 e^{2Re\lambda_k t} \leq$$

$$\leq e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^0)^2 = e^{-\mu t} ||u_0||^2.$$

Лема 3 доведена.

Перейдемо тепер до доведення основного результату даного підрозділу.

Доведення теореми. Із експоненціальної дихотомії A, як вказано вище, випливає, що або $||S(t)b|| \to 0$, $t \to \infty$, або $||S(t)b|| \to \infty$, $t \to \infty$ для кожного $b \in H$.

Тому з пропозиції 11.10 [30] випливає, що існує не більше однієї інваріантної міри для рівняння (3.37). Але з теореми 11.7 [30] тоді маємо, що існування інваріантної міри рівносильне виконанню умови

$$\sup_{t \geq 0} TrQ_t < \infty. \tag{3.51}$$

В силу леми 2 і 3 та умов теореми, маємо

$$TrQ_t = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} |S(s)b_i|^2 ds \leq$$

$$\leq \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mu t} |b_i|^2 \leq \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} |bi|^2 < \infty.$$

Отже (3.51) виконано.

Врахувавши тепер, що $||S(t)b|| \to \infty$, $t \to \infty$, якщо $b \notin U_A$ маємо (3.51), що виконана лише у випадку, коли $b \in U_A$. Отже для (3.37) існує єдина інваріантна міра.

Покажемо, що вона зосереджена на U_A.

Для цього доведемо інваріантність підпростору U_A для рівняння (3.37), тобто покажемо, що якщо $u_0 = u(0) \in U_A$, то $u(t) \in U_A$ для всіх $t > 0$ з ймовірністю 1.

Зазначимо, що згідно з теоремою 5.4 [30] єдиний слабкий розв'язок з початковою умовою $u(0) = u_0$ має вигляд

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)dW_b(s), \tag{3.52}$$

де $W_b(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_k \beta_k(t)$ і $b_k \in U_A$. Але для довільного $h \in H$, $Qh = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(b_k, h) \in U_A$, отже $Q : H \to U_A$.

Оскільки Q є самоспряжений, додатньо визначеним, компактним оператором, то існує в U_A його ортонормований базис $\{\psi_k\}$ із додатніми власними числами $\{\mu_k\}$, тобто

$$Q\psi_k = \mu\psi_k.$$

А отже $W_b(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i}\psi_i\beta_i(t)$, згідно з пропозицією 4.1 [30].

Звідси маємо, що

$$\int_0^t S(t-s)dW_b(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} \int_0^t S(t-s)\psi_i d\beta_i(s).$$

Але з іншої сторони, із означення U_A випливає, що ψ_k є базисом в U_A, а тому

$$\psi_i = \sum_k C_{k,i}^0 \psi_k$$

Аналогічно до доведення леми 3 маємо, що

$$S(t-s)\psi_i = \sum_k C_{k,i}^0 e^{\lambda_k(t-s)}\phi_k \in U_A.$$

Останнє означає, що $\int_0^t S(t-s)dW_b(s) \in U_A$. Очевидно також, що якщо $u_0 \in U_A$, то і $S(t)u_0 \in U_A$. Отже тоді з (3.52) отримуємо, що U_A є інваріантним підпростором для рівняння (3.37). Далі, використовуючи експоненціальне затухання $S(t)$ на U_A ми можемо показати існування інваріантної міри для (3.37) на U_A, аналогічно до того, як це зроблено в теоремі 5 [92].

Теорема доведена.

Приведемо тепер приклад оператора A, що задовольняє умови теореми.

Приклад 3.2. Нехай $Au := \frac{1}{\rho}div(\rho\nabla u)$, де $u = H = L^2_\rho(\mathbb{R}^d)$ і $\rho(x) \in L^1(R^d) \bigcap C^2(\mathbb{R}^d)$ і задовольняє умову

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} - \frac{|\nabla\rho|^2}{4\rho^2} \to \infty, |x| \to \infty. \tag{3.53}$$

Покажемо тоді, що A має дискретний спектр і U_A є підпростором натягнутим на всі, окрім скінченного числа, власні функції оператора A.

Для цього введемо оператора $Bu := \Delta u - q(x)u$, де $q(x)$ – дійсна функція в $\mathbb{R}^d$. Надалі використаємо наступний результат про характеризацію спектра оператора B в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Має місце теорема.

Теорема 3.6. *([97] секц. 16.4) Нехай $q(x)$ неперервна в $\mathbb{R}^d$ функція, що $q(x) \to \infty$, $|x| \to \infty$. Тоді спектр оператора B в $L^2(\mathbb{R}^d)$ є дискретним.*

При цьому, якщо $q(x) \geq q_0$, то власні значення $\{\lambda_n\}$ містяться в інтервалі $(-\infty; -q_0]$ і $\lambda_n \to -\infty$, $n \to \infty$.

Розглянемо тепер спектральну задачу:

знайти $\lambda \in \mathbb{R}$ і функції $u \in L^2_\rho(\mathbb{R}^d)$, що

$$\frac{1}{\rho}div(\rho\nabla u) + \lambda u = 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.54}$$

За допомогою заміни $u = v\rho^{-\frac{1}{2}}$ (3.54) перепишеться у вигляді

$$\Delta v + (\frac{|\nabla\rho|^2}{2\rho^2} - \frac{\Delta\rho}{4\rho})v + \lambda v = 0. \tag{3.55}$$

З теореми 2 тепер маємо, що якщо виконана умова (3.53), то спектральна задача (3.55) має дикретний від'ємний спектр $\{\lambda_k\}$ з відповідними власними функціями $\{v_k(x) \in L^2(\mathbb{R}^d\}$. Тоді $\{\lambda_k\}$ і $\{u_k = v_k\rho^{-\frac{1}{2}}\} \in L^2_\rho(\mathbb{R}^d)$ є спектром і власними функціями для (3.54).

3.6 Висновки до розділу 3

У цьому розділі вивчено стохастичні функціонально-диференціальні рівняння нейтрального типу у гільбертових просторах. Головним необмежним оператором рівняння є такий, що протилежний до нього є секторіальний. Праві частини рівняння не задовольняють умову Ліпшиця. Отримано такі нові результати:

1. доведено теорему існування та єдиності м'якого розвязку початкової задачі;
2. доведено теорему про неперевну залежність розв'язків від початкових даних;
3. для розв'язків встановлена умова марковості та феллеровості;
4. отримано достатні умови існування інваріантних мір у просторах зсувів;
5. для рівнянь у частинних похідних параболічного типу отримані коефіцієнтні умови існування інваріантних мір;
6. для лінійних стохастичних рівнянь у гільбертових просторах знайдено коефіцієнтні умови існування та єдиності інваріантних мір.

Розділ 4

Слабкі та сильні розв'язки спарених нескінченновимірних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь

У попередньому розділі вивчались розв'язки рівнянь у самому слабкому сенсі–м'які розв'язки (mild solution). Ідея формулювання такого поняття йде від звичайних диференціальних рівнянь, а саме від відомої формули Лагранжа варіації довільної сталої. Присутність лінійної частини (у випадку звичайних рівнянь) дозволяє записати розв'язок у еквівалентній інтегральній формі за допомогою згорток із використанням матриканта лінійної частини. Саме ця ідея і використана у понятті м'якого розв'язку, лише тут замість матриканта фігурує його нескінченновимірний аналог–напівгрупа $S(t)$, породжена відповідним генератором A. Дане поняття зручне тим, що при такому підході у відповідних інтегральних формулах не фігурують необмежені оператори. Правда дане зауваження не стосується рівнянь нейтрального типу, там необмежений оператор все таки залишається, але він діє на достатньо гладкі функції. Але дане поняття розв'язку має суттєвий недолік, воно не гарантує ніякої гладкості розв'язку, а лише його належність вихідному простору. Це особливо важливо у застосуваннях, зокрема там, де виникають рівняння у частинних похідних і гладкість розв'язку має принципове значення. Тому важливо мати поняття розв'язку, що гарантує певну гладкість. Так виникають поняття слабких та сильних розв'язків. В цьому розділі ми досліджуємо питання існування глобальних слабких та локальних сильних розв'язків спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах, при цьому одне із рівнянь є рівнянням із необмеженим оператором, а інше звичайним функціонально-диференціальним рівнянням. Важливим для застосувань є те, що коефіцієнти рівняння не є глобально ліпшицевими та задовольняють умову степеневого (не обов'язково лінійного) росту. Основним об'єктом дослідження є наступне рівняння у гільбертовому просторі

$$\begin{cases} du(t) = [Au(t) + f(u_t, y_t)]dt + \sigma(u_t, y_t)dW(t), \\ dy(t) = g(u_t, y_t)dt, \quad t \geq 0, \\ u(t) = \phi(t),\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad h > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Тут $u_t = u(t) + \theta$, $y_t = y(t) + \theta$, $\theta \in [-h, 0]$, A є знову інфінітизимальним оператором аналітичної напівгрупи обмежених операторів $\{S(t) : t \geq 0\}$ в сепарабельному гільбертовому просторі H, $W(t)$ Q-вінеровим процесом у сепарабельному просторі Гільберта K, $u(t)$ −простір станів, функціонали f і g є відображеннями із простору неперервних функцій на $[-h, 0]$ в H, σ відображення із цього ж простору у спеціальний простір операторів Гільберта-Шмідта. Нарешті, $\phi, \psi : [-h, 0] \to H$ є початковими функціями. Як уже говорилось у вступі, рівняння подібного роду моделюють різні процеси природознавства із "пам'яттю де задіяні випадкові сили. При цьому задані зовшні впливи, як правило, не є ліпшицевими і такими, що задовольняють умови лінійного росту. У застосуваннях зазвичай це деякі степеневі функції. Тому важливо отримати умови коректної розв'язності саме для таких нелінійностей.

Цей розділ побудований таким чином. У підрозділі 4.1 буде дана строга постановка задачі та приведені деякі допоможні твердження. Глобальне існування, єдиність та неперервна залежність слабких розвязків від початкових даних досліджується в підрозділі 4.2. В підрозділі 4.3 продемонстроване застосування отриманих абстрактних результатів до стохастичної моделі серцевого дефибрилятора, математичною моделлю якого є, так зване, бідоменне рівняння. Питанням існування сильних локальних розв'язків бідоменних рівнянь присвячено підрозділ 4.4.

Результати цього розділу надруковані у статті [88] та апробовані на конференціях [89, 116].

4.1 Постановка задачі, допоміжні твердження та формулювання основних теорем

Нехай K і H два сепарабельних гільбертові простори, а $V \subset H$ −рефлексивний банахів простір із дуальним простором H'. Для ідентифікації простору H з його дуальним H', маємо

$$V \subset H \cong H' \subset V', \tag{4.2}$$

де вкладення є неперервним і щільним. При цьому трійка (V, H, V') називається трійкою Гельфанда. Норми у просторах V, H і V' позначимо $||\cdot||_V$, $||\cdot||$ і $||\cdot||_{V'}$ відповідно. Скалярний добуток в H і спарку між V і V' позначимо $(\cdot,\cdot)$, і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ відповідно. Норму і скалярний добуток в K будемо позначати $||\cdot||_K$ and $(\cdot,\cdot)$ відповідно.

Нехай також $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ повний ймовірнісний простір із нормальною фільтрацією $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$, згенерованою Q-вінеровим процесом W в $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з лінійним, обмеженим коваріаційним оператором таким, що $\mathrm{tr}\, Q < \infty$. Нехай також існують повна ортонормована система $\{e_k\}$ в K і послідовність невід'ємних чисел λ_k такі, що $Qe_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, \ldots$, і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty. \tag{4.3}$$

Такий процес Вінера допускає розклад $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)e_k$, де $\beta_k(t)$ є дійсними, стандартними процесами Вінера, незалежними у сукупності.

Нехай $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(U)$ і $L_2^0 = L_2(U_0, H)$ простір всіх операторів Гільберта Шмідта, що діють з U_0 в H зі скалярним добутком $(\Phi, \Psi)_{L_2^0} = tr\ [\Phi Q \Psi^*]$ і нормою $||\Phi||_{L_2^0}$ відповідно. Через $C := C([-h, 0]; H)$ позначимо простір всіх неперервних відображень з $[-h, 0]$ в H наділений нормою $||u||_C = \sup_{[-h,0]} H$, і $L_V^2 := L^2((-h, 0); V)$ є простором V-значних відображень із нормою

$$||u||^2_{L_V^2} = \int_{-h}^{0} ||u(t)||_V^2 dt.$$

Далі приведемо умови на головний оператор A та нелінійності, що фігурують у системі. **Умови на оператор А**:

(A1) A є лінійним (взагалі кажучи, необмеженим) оператором із областю визначення $D(A)$, щільною в H так, що $A : V \to V'$.

(A2) Для всіх $u, v \in V$ існує стала $\alpha > 0$ така, що

$$|\langle Au, v\rangle| \leq \alpha||u||_V \cdot ||v||_V.$$

(A3) A задовольняє умову коерцетивності: існують сталі $\beta > 0$ і γ такі, що

$$\langle Av, v\rangle \leq -\beta||v||_V^2 + \gamma||v||^2, \quad \forall v \in V.$$

Умови на нелінійності:

(N1) f і g є відображеннями з $C \cap L_V^2 \times C$ в H, σ діє з $C \cap L_V^2 \times C$ в L_2^0.

(N2) (Умова росту) Існують додатні сталі $\alpha > 0$ і $\gamma \geq 1$ такі, що

$$||f(\phi, \psi)|| + ||g(\phi, \psi)|| \leq \alpha \left(1 + \left(\int_{-h}^{0} ||\phi||_V dt \right)^{\gamma} + ||\phi||_C^{\gamma} + ||\psi||_C^{\gamma} \right)$$

і

$$||\sigma(\phi, \psi)||_{L_2^0}^2 \leq \alpha \left(1 + ||\phi||_C^2 + ||\psi||_C^2 \right).$$

(N3) (Локальна умова Ліпшиця). Для кожного $N > 0$ існує стала $K_N > 0$ така, що

$$||f(\phi, \psi) - f(\phi_1, \psi_1)||^2 + ||g(\phi, \psi) - g(\phi_1, \psi_1)||^2 + ||\sigma(\phi, \psi) - \sigma(\phi_1, \psi_1)||^2$$
$$\leq K_N \left(||\phi - \phi_1||_C^2 + ||\psi - \psi_1||_C^2 \right)$$

для довільних $\phi, \phi_1 \in C \cap L_V^2$ і $\psi, \psi_1 \in C$ таких, що

$$||\phi||_C^2 + ||\psi||_C^2 < N, \quad ||\phi_1||_C^2 + ||\psi_1||_C^2 < N.$$

(N4) (Умова коерцетивності) Існують сталі $\beta > 0, \lambda$ і C_1 такі, що для довільного $\phi, \phi_1 \in C \cap L_V^2$ виконана нерівність

$$\langle A\phi(0), \phi(0)\rangle + (f(\phi, \psi), \phi(0)) + (g(\phi, \psi), \psi(0)) + ||\sigma(\phi, \psi)||_{L_2^0}^2$$
$$\leq -\beta||\phi(0)||_V^2 + \lambda(||\phi||_C^2 + ||\psi||_C^2) + C_1.$$

(N5) (Умова монотонності) Для всіх $\phi, \phi_1 \in C \cap L_V^2$ та $\psi, \psi_1 \in C$, маємо

$$2\langle A(\phi(0) - \phi_1(0), \phi(0) - \phi_1(0))\rangle + 2\left(f(\phi, \psi) - f(\phi_1, \psi_1), \phi(0) - \psi(0)\right)$$
$$+2\left(g(\phi, \psi) - g(\phi_1, \psi_1), \psi(0) - \psi_1(0)\right) + ||\sigma(\phi, \psi) - \sigma(\phi_1, \psi_1)||_{L_2^0}^2$$
$$\leq \delta \left(||\phi - \phi_1||_C^2 + ||\psi - \psi_1||_C^2 \right).$$

для деякої сталої δ.

Нехай $\phi(t) \in C \cap L^2_V$ і $\psi(t) \in C$, $t \in [-h, 0]$. Покладемо $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$.

Означення 4.1. Назвемо $\mathcal{F}_t$-адаптований, випадковий процес $(u(t), y(t)) \in V \times H$ слабким розв'язком початкової задачі (4.1) на $[0, T]$ якщо:
1) $u(t) = \phi(t),\ y(t) = \psi(t),\ t \in [-h, 0]$;
2) $u \in L^2(\Omega_T, V),\ y \in L^2(\Omega_T, H)$;
3) для всіх $v \in V$ та $z \in H$, рівності

$$(u(t), v) = (u(0), v) + \int\limits_0^t (\langle Au(s), v\rangle + (f(u_s, y_s), v))\, ds + \int\limits_0^t (\sigma(u_s, y_s) dW(s), v)\,, \quad (4.4)$$

$$(y(t), z) = (y(0), z) + \int\limits_0^t (g(u_s, y_s), z) dz,$$

виконуються із ймовірністю 1 для всіх $t \in [0, T]$.

Основними результатами даного розділу є теореми існування та єдиності слабкого розв'язку початкової задачі системи (4.1) та його неперервна залежність від початкових даних.

Теорема 4.1. (Існування та єдиність) *Нехай виконуються умови (A1)-(A3) and (N1)-(N5). Тоді для довільних початкових даних $\phi \in C \cap L^2_V$ і $\psi \in C$, початкова задача* (4.1) *має єдиний слабкий розв'язок $(u(t), y(t))$ на $[0, T]$ такий, що*

$$u \in L^2(\Omega; C([0, T]; H)) \cap L^2(\Omega_T, V),\ y \in L^2(\Omega, C([0, T]; H)).$$

При цьому справедлива наступна енергетична рівність:

$$||u(t)||^2 + ||y(t)||^2 = ||u(0)||^2 + ||y(0)||^2 + 2\int\limits_0^t \langle Au(s), u(s)\rangle ds$$
$$+ (f(u_s, y_s), u(s))ds + (g(u_s, y_s), y(s))ds$$
$$+ \int\limits_0^t ||\sigma(u_s, y_s)||^2_{L_2^0} ds + 2\int\limits_0^t (\sigma(u_s, y_s) dW(s), u(s)). \quad (4.5)$$

Теорема 4.2. (Неперервна залежність від початкових даних) *Нехай виконані умови теореми 2.1, а (ϕ, ψ) і (ϕ_1, ψ_1) є початковими умовами для розв'язків $(u(t, \phi, \psi), y(t, \phi, \psi))$ і $(u(t, \phi_1, \psi_1), y(t, \phi_1, \psi_1))$ для початкової задачі* (4.1)*, відповідно.*

Тоді існує стала $C(T)$ така, що

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}[||u_t(\phi,\psi)-u_t(\phi_1,\psi_1)||_C^2+||y_t(\phi,\psi)-y_t(\phi_1,\psi_1)||_C^2]$$
$$\leq C(T)(||\phi-\phi_1||_C^2+||\psi-\psi_1||_C^2). \qquad (4.6)$$

4.2 Доведення теорем існування, єдиністі та неперервної залежності

У цьому підрозділі доведемо теореми існування, єдиності слабких розв'язків початкової задачі та їх неперервної залежності від початкових даних, які були сформульовані у попередньому підрозділі. Основну трудність складає доведення факту існування слабких розв'язків. Тут ми застосовуємо підходи монотонності та компактності, добре відомі для рівнянь у частинних похідних. Для кращого розуміння коротко опишемо ідею доведення. Вона полягає у застосуванні гальоркінських апроксимацій, а саме:

1) спочатку розглядається проекція задачі (зрізки) на скінченновимірні підпостори та доводиться існування і єдиність розв'язків зрізаних, скінченновимірних задач;

2) наступним етапом є встановлення певних апріорних оцінок на розв'язки зрізаних рівнянь. Особливістю даних оцінок є їх рівномірність, тобто незалежність від розмірності. Ці оцінки власне означають слабку компактність послідовності розв'язків зрізаних рівнянь у певних функціональних просторах, а значить і існування слабко збіжних підпослідовностей у відповідних просторах;

3) останнім етапом доведення є обгрунтування можливості граничного переходу у зрізаних рівняннях, за умови прямування розмірності зрізок до нескінченності. Тут якраз і спрацьовує підхід монотонності.

При цьому, паралельно, граничним переходом встановлюється і енергетична рівність для квадратів норм. Тоді факт єдиності і неперервна залежність розв'язків є прямим наслідком енергетичної рівності.

4.2.1 Доведення теореми 4.1

Доведення. Єдиність. Спочатку, із використанням енергетичної рівності доведемо единість. Нехай $(u(t), y(t))$ і $(u^1(t), y^1(t))$ є двома різними слабкими розв'язками початкової задачі (4.1).

Тоді із урахуванням енергетичної рівності (4.5) та умови (N5), легко отримати наступне співвідношення

$$\mathbf{E}||u(t)-u^1(t)||^2+\mathbf{E}||y(t)-y^1(t)||^2 = 2\mathbf{E}\int_0^t \langle A(u(s)-u^1(s)), u(s)-u^1(s)\rangle ds$$

$$+2\mathbf{E}\int_0^t [(f(u_s,y_s)-f(u_s^1,y_s^1), u(s)-u^1(s)) + (g(u_s,y_s)-g(u_s^1,y_s^1), y(s)-y^1(s))]ds$$

$$+\mathbf{E}\int_0^t ||\sigma(u_s,y_s)-\sigma(u_s^1,y_s^1)||^2_{L_2^0}ds \le \delta\mathbf{E}\int_0^t \left(||u_s-u_s^1||^2_C + ||y_s-y_s^1||^2_C\right) ds. \tag{4.7}$$

Для подальших викладок нам буде потрібна наступна лема (див. також [34]).

Лема 4.1. *Має місце наступна нерівність:*

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}(||u_t||^2_C+||y_t||^2_C) \le \mathbf{E}(||\phi||^2_C+||\psi||^2_C) + \mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}(||u(t)||^2+||y(t)||^2). \tag{4.8}$$

Отже, прийнявши до уваги (4.8), із (4.7) матимемо

$$\sup_{s\in[0,T]}\mathbf{E}\left(||u(s)-u^1(s)||^2+||y(s)-y^1(s)||^2\right)$$

$$\le \delta\int_0^t \sup_{\tau\in[0,s]}\mathbf{E}\left(||u_\tau-u_\tau^1||^2_C+||y_\tau-y_\tau^1||^2_C\right) ds$$

$$\le \delta\int_0^t \sup_{\tau\in[0,s]}\mathbf{E}\left(||u(\tau)-u^1(\tau)||^2+||y(\tau)-y^1(\tau)||^2\right) ds,$$

звідки, з урахуванням нерівності Гронуолла, отримаємо

$$\mathbf{E}\left(||u(s)-u^1(s)||^2+||y(s)-y^1(s)||^2\right) = 0, \quad \forall t\in[0,T].$$

Тепер, використавши неперервність розв'язків відносно норми в H, приходимо до доведення єдиності.

Існування. Відповідно до [25], [77] та інших робіт, доведемо існування використовуючи метод гальоркінських апроксимацій. Як вище говорилось, розіб'ємо доведення на кілька кроків.

Крок 1. *Скінченновимірний випадок. Апроксимуючі розв'язки.*

Нехай $\{v_k\}$ повний ортонормований базис для простору H де $v_k \in V$, і нехай $H_n = \operatorname{span}\{v_1, .., v_n\}$. Позначимо через $P_n : H \to H_n$ ортогональний проектор такий, що $P_n h = \sum_{k=1}^{n}(h, v_k)v_k$ для $h \in H$.

Розширемо P_n до проекційного оператора $P'_n : V' \to V'_n$ визначеного як $P'_n w = \sum_{k=1}^{n}\langle w, v_k\rangle v_k$ для $w \in V'$. Очевидно, що, $V_n = H_n = V'_n$.

Нехай $K_n = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_n\}$. Далі позначимо через Π_n проекційний оператор з K в K_n так, що $\Pi_n = \sum_{k=1}^{n}(a, e_k)e_k$. Введемо ще наступні позначення:

$$A^n u = P'_n A u, \quad f^n(\phi, \psi) = P_n f(\phi, \psi),$$
$$g^n(\phi, \psi) = P_n g(\phi, \psi), \quad \sigma^n(\phi, \psi) = P^n \sigma(\phi, \psi),$$

для $u \in U, \phi \in C \cap L^2_U$, та $\psi \in C$.

Розглянемо тепер зрізані рівняння щодо рівнянь (4.1):

$$\begin{aligned} du^n(t) &= [A^n u^n(t) + f^n(u^n_t, y^n_t)]dt + \sigma^n(u^n_t, y^n_t)dW^n(t), \\ dy^n(t) &= g^n(u^n_t, y^n_t)dt, \\ u^n(t) &= P_n\phi(t), \quad y^n(t) = P_n\psi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{4.9}$$

для $t \in [0, T]$, де $W^n(t) = \Pi_n W(t)$.

Дані рівняння можна розгядати, як рівняння Іто у скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^n$. Неважко бачити, що за умов (N1)-(N5), коефіцієнти f^n, σ^n і g^n цих рівнянь є локально ліпшицевими і монотонними. Отже, виконанані умови теореми 2.3 з [101] (про існування та єдиність у скінченновимірному випадку), а тому система (4.9) має єдиний розв'язок $(u^n(t), y^n(t))$ в V_n надовільному скінченному інтервалі $[0, T]$. Більш того, даний розв'язок має властивість $u^n \in L^2(\Omega, C([0, T]; H)) \cap L^2(\Omega_T, U)$ та $y^n \in L^2(\Omega, C([0, T]; H))$.

Крок 2. *Апрірні оцінки*

Встановимо тепер потрібні апріорні оцінки для розв'язків скінченновимірних апроксимацій. Використавши тепер формулу Іто для квадрата норми розв'язків рівняння (4.9), отримаємо енергетичну рівність ускінченновимірному випадку

$$||u^n(t)||^2 + ||y^n(t)||^2 = ||u^n(0)||^2 + ||y^n(0)||^2 + 2\int_0^t \langle A^n u^n(s), u^n(s)\rangle ds$$

$$+2\int_0^t [(f^n(n_s^n, y_s^n), u^n(s)) + (g^n(n_s^n, y_s^n), y^n(s))]ds$$

$$+\int_0^t ||\sigma^n(u_s^n, y_s^n)||^2_{L_2^0} ds + 2\int_0^t (\sigma^n(u_s^n, y_s^n)dW^n(s), u^n(s)). \tag{4.10}$$

Тоді, із умови (N4), матимемо

$$||u^n(t)||^2 + ||y^n(t)||^2 + 2\beta\int_0^t ||u^n(s)||_U^2 \leq ||u^n(0)||^2 + ||y^n(0)||^2 + 2C_1T$$

$$+2\lambda\int_0^t (||u_s^n||_C^2 + ||y_s^n||_C^2)ds + 2\int_0^t (\sigma^n(u_s^n, y_s^n)dW^n(s), u^n(s)).$$

Далі отримуємо

$$||u^n(t)||^2 + ||y^n(t)||^2 + 2\beta\int_0^t ||u^n(s)||_U^2$$

$$\leq ||u^n(0)||^2 + ||y^n(0)||^2 + 2C_1T + 2\lambda\int_0^t \sup_{\tau\in[0,s]} (||u_\tau^n||_C^2 + ||y_\tau^n||_C^2)ds$$

$$+2\sup_{s\in[0,t]} |\int_0^s (\sigma^n(u_\tau^n, y_\tau^n)dW^n(\tau), u^n(\tau))|.$$

Отже, взявши до уваги (4.8), прийдемо до нерівностей

$$\sup_{s\in[0,t]} (||u^n(s)||^2 + ||y^n(s)||^2) + 2\beta\int_0^t ||u^n(s)||_U^2$$

$$\leq ||u^n(0)||^2 + ||y^n(0)||^2 + 2C_1T + 2\lambda T(||\phi||_C^2 + ||\psi||_C^2)$$

$$+2\sup_{s\in[0,t]} |\int_0^s \sup_{\tau\in[0,s]} (||u^n(\tau)||_C^2 + ||y^n(\tau)||_C^2)ds$$

$$+2\sup_{s\in[0,1]}|\int_0^s(\sigma^n(u^n_\tau,y^n_\tau)dW^n(\tau),u^n(\tau))|. \qquad (4.11)$$

Оцінимо останній член в (4.11), врахувавши другу нерівність в умові (N2) і максимальну нерівність для мартингалу (Theorem 2.3 in [25]). Взявши математичне сподівання, отримуємо

$$\mathbf{E}\sup_{s\in[0,t]}(||u^n(s)||^2+||y^n(s)||^2)+2\beta\int_0^t||u^n(s)||^2_U$$
$$\leq ||u^n(0)||^2+||y^n(0)||^2+2C_1T+2\lambda T(||\phi||^2_C+||\psi||^2_C)$$
$$+C_2+C_3\int_0^t\mathbf{E}\sup_{\tau\in[0,s]}(||u^n(\tau)||^2_C+||y^n(\tau)||^2_C)ds, \qquad (4.12)$$

для деяких додатніх сталих C_2 і C_3. Використавши тепер лему Гронуолла та лему 4.1, приходимо до нерівності

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}(||u^n(t)||^2+||y^n(t)||^2)+\int_0^T\mathbf{E}||u^n(s)||^2_U ds\leq A, \qquad (4.13)$$

для деякої додатної сталої A.

Крок 3. *Слабка границя.*

Перейдемо до обгрунтування слабких граничних переходів у зрізаних рівняннях. Із (4.13) випливає, що існують підпослідовності, для зручності позначені знову u^n і y^n такі, що

$$u^n\to u \text{ слабко в } L^2(\Omega_T,U); \qquad (*)$$

$$y^n\to y \text{ слабко в } L^2(\Omega_T,U). \qquad (**)$$

Далі, із умови (N2) маємо

$$\mathbf{E}\int_0^T||\sigma^n(u^n_s,y^n_s)||^2_{L^0_2}ds\leq\alpha\int_0^T(1+\mathbf{E}(||u^n_s||^2_C+||y^n_s||^2_C))ds=$$
$$=\alpha\int_0^T(1+\mathbf{E}(\sup_{\theta\in[-h,0]}(||u^n(s+\theta)||^2+||y^n(s+\theta)||^2)))ds.$$

Звідши, врахувавши (4.8) та (4.12), можна зробити висновок про існування сталої $B > 0$ такої, що

$$\mathbf{E}\int_0^T ||\sigma^n(u_s^n, y_s^n)||_{L_2^0}^2 ds \le B.$$

Отже, послідовність $\sigma^n(u_s^n, y_s^n)$ слабко збігається до Φ в $L^2(\Omega_T; L_2^0)$.

Надалі використаємо наступне твердження.

Лема 4.2. *При виконанні умов теореми 4.1, для довільного $p \in \mathbb{N}$ існує стала $C(p) > 0$ така, що нерівність*

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(||u^{(n)}(t)||^{2p} + ||y^{(n)}(t)||^{2p}\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T ||u^{(n)}||_U^2\right)^p \le C(p) \tag{4.14}$$

справедлива для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Доведення леми 4.2. Із 4.2.1 отримуємо

$$\sup_{s\in[0,t]}\left(||u^n(s)||^{2p} + ||y^n(s)||^{2p}\right) + \left(\int_0^t ||u^n(s)||_U^2\right)^p$$

$$\le C\left(||\phi||_C^{2p} + ||\psi||_C^{2p}\right) + \int_0^t \sup_{\tau\in[0,s]}\left(||u^n(\tau)||^{2p} + ||y^n(s\tau)||^{2p}\right) ds$$

$$+ \sup_{s\in[0,t]} |\int_0^s \left(\sigma^n(u_\tau^n, y_\tau^n) dW^n(\tau), u^n(\tau)\right) |^p, \tag{4.15}$$

де додатна стала C залежить лише від p і t і, що важливо, не залежить від n. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо момент зупинки

$$\tau_R^{(n)} = \min\{\inf\{t \in [0,T] : ||u^n(t)|| + ||y^n(t)|| > R\},\ T\}, \quad R > 0.$$

Тут $\inf \varnothing := \infty$. Очевидно, що

$$\lim_{T\to\infty} \tau_R^{(n)} = T \text{ з ймовірністю1 для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Останній член в (4.15) на інтервалі $[0, t \wedge \tau_R^{(n)}]$ оцінюється аналогічно до (4.11), з використанням нерівності Буркхолдера-Девіса-Ганді. Отже, маємо

$$\mathbf{E}\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_R^{(n)}]} |\int_0^s (\sigma^n(u_\tau^n, y_\tau^n) dW^n(\tau), u^n(\tau))|^p$$

$$\leq C_1(p)\mathbf{E}\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau_R^{(n)}} ||u^n(\tau)||^2 \cdot ||\sigma^n(u^n_\tau, y^n_\tau)||^2_{L^0_2} d\tau\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq C_1(p)\mathbf{E}\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau_R^{(n)}} ||u^n(\tau)||^2\alpha(1+||u^n_\tau||^2+||y^n_\tau||^2)d\tau\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq C_1(p)\mathbf{E}\left[\frac{\varepsilon}{2}\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_R^{(n)}]}||u^n(s)||^{2p}(\alpha)^{\frac{p}{2}}+\frac{(\alpha)^{\frac{p}{2}}}{2\varepsilon}\left(\int\limits_0^{0,t\wedge\tau_R^{(n)}}\left(1+||u^n_\tau||^2+||y^n_\tau||^2\right)d\tau\right)^p\right]$$

$$\leq C_1(p)\frac{\varepsilon(\alpha)^{\frac{p}{2}}}{2}\mathbf{E}\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_R^{(n)}]}||u^n(s)||^{2p}+C(\varepsilon,T)\int\limits_0^{0,t\wedge\tau_R^{(n)}}(1+||u^n_\tau||^{2p}+||y^n_\tau||^{2p})d\tau$$

$$\leq C_1(p)\frac{\varepsilon(\alpha)^{\frac{p}{2}}}{2}\mathbf{E}\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_R^{(n)}]}||u^n(s)||^{2p}+C_1(\varepsilon,T)(||\phi||^{2p}_C+||\psi||^{2p}_C)$$

$$+C_1(\varepsilon,T)\mathbf{E}\int\limits_0^{0,t\wedge\tau_R^{(n)}}(1+\sup_{\tau\in[0,s]}(||u^n(\tau)||^{2p}+||y^n(\tau)||^{2p}))ds. \tag{4.16}$$

Тут $\varepsilon > 0$ достатньо мала стала, а $C_1(p), C(\varepsilon,T)$ and $C_1(\varepsilon,T)$ −сталі із нерівності Юнга.

Зі співвідношень (4.15) та (4.16), використовуючи нерівність Гронуолла, матимемо

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,t\wedge\tau_R^{(n)}]}\left(||u^n(t)||^{2p}+||y^n(t)||^{2p}+\mathbf{E}\int\limits_0^{r_R^{(n)}}||u^n(s)||^2_U\right)^p ds$$

$$\leq C_2\left(||\phi||^{2p}_C+||\psi||^{2p}_C\right),\ t\in[0,T], \tag{4.17}$$

де C_2 −додатна стала, незалежна від R та n.

Перейшовши до границі $R\longrightarrow\infty$ в (4.17) та застосувавши лему Фату, отримаємо (4.14), що і завершує доведення леми. □

Повернемось тепер до доведення теореми 4,1. Із умови (N2) отримаємо оцінки

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^T ||f^n(u_s^n, y_s^n)||^2 ds \\
&\leq \alpha^2 \int_0^T \mathbf{E}\left[1 + \left(\int_{-h}^0 ||u^n(s+\theta)||_U d\theta\right)^j + \sup_{\theta\in[-h,0]} \left(||u^n(s+\theta)||^j + ||y^n(s+\theta)||^j\right)\right]^2 ds \\
&\leq C_3(T)\Bigg(||\phi||_C^{2j} + ||\psi||_C^{2j} + \mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]} \left(||u^n(t)||^{2j} + ||y^n(t)||^{2j}\right) \\
&\quad + h^j \int_0^T \mathbf{E}\left(\int_{-h}^0 ||u^n(s+\theta)||_U^2 d\theta\right)^j ds\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Для останнього доданка в (4.18) маємо наступну оцінку

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \mathbf{E}\left(\int_{-h}^0 ||u^n(s+\theta)||_U^2 d\theta\right)^j ds &= \int_0^T \mathbf{E}\left(\int_{s-h}^s ||u^2(t)||_U^2 dt\right)^j \\
&\leq \int_0^T \mathbf{E}\left(\int_{-h}^T ||u^2(t)||_U^2 dt\right)^j ds \\
&\leq T\left(\mathbf{E}(\int_{-h}^0 ||\phi(t)||_U^2 dt) + \mathbf{E}(\int_0^T ||u^n(t)||^2 dt)\right)^j.
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Із співідношень (3.12) і (3.13), з використанням (4.14), приходимо до існування сталої $C_5 > 0$ такої, що

$$
\mathbf{E}\int_0^T ||f^n(u_s^n, y_s^n)||^2 ds \leq C_5. \tag{4.20}
$$

Аналогічно маємо

$$
\mathbf{E}\int_0^T ||g^n(u_s^n, y_s^n)||^2 ds \leq C_5. \tag{4.21}
$$

Отже, $f^n(u_t^n, y_t^n)$ і $g^n(u_t^n, y_t^n)$ збігаються слабко в $L^2(\Omega_T; H)$ до деяких границь F та G, відповідно.

Тепер маємо

$$\int_0^t \sigma^n(u_s^n, y_s^n)dW^n(s) = \int_0^t P_n\sigma(u_s^n, y_s^n)\Pi_n dW(s). \tag{4.22}$$

Із властивостей стохастичного інтеграла випливає, що лінійний оператор, визначений формулою (4.22) є лінійним відображенням із $L^2(\Omega_T; L_2^0)$ у простір $L^2(\Omega_T; H)$. Зокрема, цей оператор є неперервним відносно слабкої топології. Отже,

$$\int_0^t \sigma^n(u_s^n, y_s^n)dW^n(s) \to \int_0^t \Phi(s)dW(s) \tag{4.23}$$

слабко в $L^\infty([0,T]; L^2(\Omega, H))$ (оснащеного супремною нормою).

Тому, з (4.9), для всіх $v \in Y$, $\phi \in L^\infty([0,T] \times \Omega)$, з використанням леми Фату, отримуємо

$$\mathbf{E}(\int_0^T (u^n(t), \phi(t)v)dt) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\int_0^T (u^n(t), \phi(t)v)dt)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\int_0^T (u^n(0), \phi(t)v)dt + \int_0^T \int_0^t \langle A^n u^n(t), \phi(t)v\rangle dsdt$$

$$+ \int_0^T \int_0^t (f^n(u_s^n, y_s^n), \phi(t)v)dsdt + \int_0^T (\int_0^t (\sigma^n(u_s^n, y_s^n)dW^n(s), \phi(t)v))dt]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\mathbf{E}((u^n(0), v)\int_0^T \phi(t)dt) + \mathbf{E}(\int_0^T \langle A^n u^n(s), \int_0^T \phi(t)dt \cdot v\rangle ds)$$

$$+ \int_0^T \mathbf{E}(\phi(t)(\int_0^t \sigma^n(u_s^n, y_s^n)dW^n(s), v))dt]$$

$$= \mathbf{E}\left(\int_0^T \langle u(0) + \int_0^t Au(s)ds + \int_0^t F(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dW(s), \phi(s)v\rangle dt\right). \tag{4.24}$$

Аналогічно, для всіх $z \in H$ маємо

$$\mathbf{E}(\int_0^T (y(t), \phi(t)z)dt) = \mathbf{E}(\int_0^T \langle y(0) + \int_0^t G(s)ds, \phi(t)z\rangle dt). \tag{4.25}$$

Отже, пара $(u(t), y(t))$ є слабким розв'язком лінійного рівняння типу Іто

$$u(t) = u(0) + \int_0^t Au(s)ds + \int_0^t F(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dW(s),$$
$$y(t) = y(0) + \int_0^t G(s)ds, \tag{4.26}$$

і, згідно з теоремою 7.2 з [25], виконується енергетична рівність:

$$||u(t)||^2 + ||y(t)||^2 = ||u(0)||^2 + ||y(0)||^2 + 2\int_0^t \langle Au(s), u(s)\rangle ds$$
$$+2\int_0^t [(F(s), u(s)) + (G(s), y(s))]ds + \int_0^t ||\Phi(s)||^2_{L_2^0} ds + 2\int_0^t (\Phi(s)dW(s), u(s)). \tag{4.27}$$

Крок 4. *Слабкий розв'язок.*

Наразі ми покажемо, що $F(t) = f(u_t, v_t),\ G(t) = g(u_t, y_t)$ та $\Phi(t) = \sigma(u_t, y_t)$, таким чином пара $(u(t), y(t))$ буде слабким розв'язком задачі (4.1) та виконаною буде і енергетична рівність (4.5).

Спочатку зазначимо, що для довільної невід'ємної, обмеженої функції Ψ з $(*)$ та $(**)$, аналогічно до теореми 4.2.4 in [76], випливає, що

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T \Psi(t)||u(t)||^2 dt\right) \le \lim_{n\to\infty}\inf \mathbf{E}\left(\int_0^T \Psi(t)||u^n(t)||^2 dt\right) \tag{4.28}$$

та

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T \Psi(t)||y(t)||^2 dt\right) \le \lim_{n\to\infty}\inf \mathbf{E}\left(\int_0^T \Psi(t)||y^n(t)||^2 dt\right). \tag{4.29}$$

Застосувавши формулу для стохастичного диференціала добутку та енергетичну рівність 4.27 до виразу $e^{-\delta t}(||u(t)||^2 + ||y(t)||^2)$, отримаємо

$$\mathbf{E}\left(e^{-\delta t}(||u(t)||_H^2 + ||y(t)||_H^2)\right) - (||u(0)||^2 + ||y(0)||^2) = \mathbf{E}(\int_0^t e^{-\delta s}(2\langle Au(s), u(s))$$
$$+2(u(s), F(s)) + 2(y(s), G(s)) + ||\Phi(s)||^2_{L_2^0} - \delta(||y(s)||^2 + ||u(s)||^2)ds). \tag{4.30}$$

Далі, для довільних $v \in L^2(\Omega \times [-h, T]; V)$ та $w \in L^2(\Omega \times [-h, T]; H)$ матимемо

$$\mathbf{E}(e^{-\delta t}(||u^n(t)||^2 + ||y^n(t)||^2)) - (||u^n(0)||^2 + ||y^n(0)||^2)$$

$$= \mathbf{E}\int_0^t e^{-\delta s}(2\langle Au^n(s), u^n(s)\rangle + 2(f^n(u_s^n, y_s^n), u^n(s)) + (g^n(u_s^n, y_s^n), y^n(s))$$

$$+||\sigma^n(u_s^n, y_s^n)\Pi_n||^2_{L_2^0} - \delta(||u^n(s)||^2 + ||y^n(s)||^2)ds)$$

$$\leq \mathbf{E}(\int_0^t e^{-\delta s}(2\langle A(u^n(s) - v(s)), u^n(s) - v(s)\rangle) + 2(f^n(u_s^n, y_s^n)$$

$$-f^n(v_s, w_s), u^n(s) - v(s)) + 2(g^n(u_s^n, y_s^n) - g^n(v_s, w_s), y^n(s) - w(s))$$

$$+||\sigma(u_s^n, y_s^n) - \sigma(v_s, w_s)||^2_{L_2^0} - \delta(||y^n(s) - w(s)||^2 + ||u^n(s) - v(s)||^2)ds$$

$$+\mathbf{E}(\int_0^t e^{-\delta s}(2\langle Au^n(s), v(s)\rangle + 2\langle Av(s), u^n(s)\rangle - 2\langle Av(s), v(s)\rangle$$

$$-||\sigma(v_s, w_s)||^2_{L_2^0} + 2(\sigma(u_s^n, y_s^n), \sigma(v_s, w_s))_{L_2^0} - 2\delta(y^n(s), w(s)) - 2\delta(u^n(s), v(s))$$

$$+\delta||w(s)||^2 + \delta||v(s)||^2) + 2(f^n(u_s^n, y_s^n), v(s)) + 2(f^n(v_s, w_s), u^n(s))$$

$$-2(f^n(v_s, w_s), v(s)) + 2(g^n(u_s^n, y_s^n), w(s)) + 2(g^n(v_s, w_s), y^n(s)) - 2(g^n(v_s, w_s))ds). \tag{4.31}$$

Зазначимо, що в силу умови монотонності(N5), перший член у (4.31) є від'ємним. Перейшовши до границі при $n \to \infty$ в (4.31), та прийнявши до уваги теорему Фубіні, (4.28) і (4.29), для довільної невід'ємної, обмеженої функції Ψ отримаємо

$$\mathbf{E}(\int_0^T \Psi(t)\int_0^t (2\langle Au(s) - v(s), v(s)\rangle + 2\langle Av(s), u(s)\rangle - ||\sigma(v_s, w_s)||^2_{L_2^0}$$

$$+(\Phi(s), \sigma(v_s, w_s))_{L_2^0} - 2\delta(y(s), w(s)) - 2\delta(u(s), v(s)) + \delta||w(s)||^2 + 2(F(s), v(s))$$

$$+2(f(v_s, w_s), u(s)) - 2(f(v_s, w_s), v(s)) + 2(G(s), w(s))$$

$$+2(g(v_s, w_s), y(s)) - 2(g(v_s, w_s), w(s)))ds)dt. \tag{4.32}$$

Підставивши (4.30) у ліву частину (4.32), матимемо

$$\mathbf{E}(\int_0^T \Psi(t)(\int_0^t e^{-\delta s}(2\langle A(u(s) - v(s)), u(s) - v(s)\rangle$$

$$+2(F(s)-f(v_s,w_s),u(s)-v(s))+2(G(s)-g(v_s,w_s),y(s)-w(s))$$
$$+||\Phi(s)-\sigma(v_s,w_s)||^2_{L_2^0}-\delta(||u(s)-v(s)||^2+||y(s)-w(s)||^2))ds)dt)\leq 0. \quad (4.33)$$

Взявши тепер $v=u$ і $w=y$, отримаємо з (4.33), що $\Phi(t)=\sigma(u_t,y_t)$. Тоді з (4.33) випливає, що

$$\mathbf{E}(\int_0^T \Psi(t)(\int_0^t e^{-\delta s}(2\langle A(u(s)-v(s)),u(s)-v(s)\rangle$$
$$+2(F(s)-f(v_s,w_s),u(s)-v(s))+2(G(s)-g(v_s,w_s),y(s)-w(s))$$
$$-\delta(||u(s)-v(s)||^2+||y(s)-w(s)||^2))ds)dt)\leq 0. \quad (4.34)$$

Покладемо $v=u-\varepsilon z$, $w=y-\varepsilon z$, де $z\in L^2(\Omega\times[-h,T];V)$, $r\in(\Omega\times[-h,T];H)$, а $\varepsilon>0$-довільне. Тоді, вище написана нерівність перетворюється на наступну

$$\mathbf{E}(\int_0^T \Psi(t)(\int_0^t e^{-\delta s}(2\varepsilon\langle Az(s),z(s)\rangle$$
$$+2((F(s)-f(u_s(0)-\varepsilon z_s(0)),y_s(0)-\varepsilon r_s(0)),z(s))+(G(s)-g(u_s(0)-\varepsilon z_s(0),$$
$$y_s(0)-\varepsilon r_s(0)),r(s))-\varepsilon(||z(s)||^2+||r(s)||^2))ds)dt)\leq 0. \quad (4.35)$$

Спрямувавши тепер $\varepsilon\downarrow 0$ та використавши теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо

$$\mathbf{E}(\int_0^T \Psi(t)(\int_0^t (F(s)-f(u_s,y_s),z(s))+(G(s)-g(u_s,y_s),r(s))ds)dt)\leq 0. \quad (4.36)$$

Поклавши $z(s)=0$, також матимемо

$$\mathbf{E}(\int_0^T \Psi(t)(\int_0^t (G(s)-g(u_s,y_s),r(s))ds)dt)\leq 0, \quad \forall r\in L^2(\Omega\times[-h,T];H),$$

що означає рівність $G(s)=g(u_s,y_s)$. Отже, з (4.26) матимемо, що $F(s)=f(u_s,y_s)$. Таким чином, пара $(u(t),y(t))$ є слабким розв'язком рівняння (4.1). Теорема доведена. □

4.2.2 Доведення теореми 4.2

Доведення. Використовуючи енергетичну рівність (4.5), для різниць $a(t) = u(t,\phi,\psi) - u(t,\phi_1,\psi_1)$ та $b(t) = y(t,\phi,\psi) - y(t,\phi_1,\psi_1)$, аналогічно до (4.10), отримаємо

$$||a(t)||^2 + ||b(t)||^2 = ||a(0)||^2 + ||b(0)||^2 + 2\int_0^t \langle Aa(s), a(s)\rangle ds$$

$$+2\int_0^t [(f(u_s(\phi,\psi), y_s(\phi,\psi)) - f(u_s(\phi_1,\psi_1)), a(s))$$

$$+(g(u_s(\phi,\psi), y_s(\phi,\psi)) - g(u_s(\phi_1,\psi_1), y_s(\phi_1,\psi_1)), b(s))]ds$$

$$+\int_0^t ||\sigma(u_s(\phi,\psi), y_s(\phi,\psi)) - \sigma(u_s(\phi_1,\psi_1), y_s(\phi_1,\psi_1))||^2_{L_2^0} ds$$

$$+2\int_0^t (\sigma(u_s(\phi,\psi), y_s(\phi,\psi)) - \sigma(u_s(\phi_1,\psi_1), y_s(\phi_1,\psi_1))dW(s)$$

$$+\delta\int_0^t (||a_s||^2_C + ||b_s||^2_C)ds.$$

Звідси, із застосуванням максимальної нерівності для мартингала (Теорема 2.3 з [25]), другої нерівності в умові (N2), та леми 4.1, матимемо

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}(||a(t)||^2 + ||b(t)||^2) \le C_6(||\phi - \phi_1||^2_C + ||\psi - \psi_1||^2_C)$$

$$+||a(0)||^2 + ||b(0)||^2 + C_7\int_0^t \mathbf{E}\sup_{\tau\in[0,s]}(||a(s)||^2 + ||b(s)||^2)ds.$$

Використавши тепер нерівність Гронуолла, отримаємо

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}(||a(t)||^2 + ||b(t)||^2) \le C_8 e^T(||\phi - \phi_1||^2_C + ||\psi - \psi_1||^2_C). \tag{4.37}$$

Отже, із урахуванням (4.8), ми отримаємо нерівність

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}(||a(t)||^2 + ||b(t)||^2) \le ||\phi - \phi_1||^2_C + ||\psi - \psi_1||^2_C + \mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}(||a(t)||^2 + ||b(t)||^2).$$

Це, разом із (4.37) завершує доведення теореми. □

4.3 Застосування до стохастичної моделі дефибрилятора. Бідоменне рівняння

Отримані у попередньому підрозділі результати носили теоретичний характер, у тому сенсі, що як головний оператор так і решта відображень були абстрактними. Зараз ми продемонструємо їх застосування до конкретного рівняння, що є математичною моделлю реального процесу. Мова буде йти про так зване бідоменне рівняння, що моделює роботу серцевого дефібрилятора. Класичне бідоменне рівняння виникає у різних моделях, що описують розповсюдження імпульсів у електрофізіології. Ця модель має довгу історію, що почалась із моделі Ходжкіна-Хакслі в 1950 роках. Бідоменні рівняння детально описані у монографії Кеенера і Снейда [56].

Дана система рівнянь у класичному випадку має вигляд

$$\begin{cases} \partial_t u + f(u,w) - \nabla\cdot(a_i \nabla u_i) = I_i \quad \text{в } (0,\infty)\times Q, \\ \partial_t u + f(u,w) + \nabla\cdot(a_e \nabla u_e) = -I_e, \quad \text{в } (0,\infty)\times Q, \\ \partial_t w + g(u,w) = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times Q, \\ u_i - u_e = u, \quad \text{в } (0,\infty)\times Q, \end{cases} \tag{4.38}$$

із крайовими умовами

$$a_i \nabla u_i \cdot \nu = 0,\ a_l \nabla u_l \cdot \nu = 0 \quad \text{на } (0,\infty)\times Q,$$

та початковими даними $u(0) = u_0,\ w(0) = w_0$.

Тут $Q \subset \mathbb{R}^d$ −обмежена область, функції u_i та u_e моделюють внутрішні та зовнішні клітинні електричні потенціали, u є трасмембранним потенціалом і ν є зовнішнім вектором нормалі до межі ∂Q. Анізотропні властивості даної системи описуються матрицями провідності $a_i(x)$ та $a_e(x)$. При цьому функції I_i і I_e відповідають за внутрішньо- та позаклітинні струми стимуляції, відповідно. Найбільш відомими із них є наступні:

нелінійність Аллена-Кана, що задається формулами

$$\begin{cases} f(u) = u^3 - u, \\ g(u) = 0, \end{cases} \tag{4.39}$$

та Фітц-Хью-Нагумо

$$\begin{cases} f(u,w) = u(u-a)(u-1)+w, \\ g(u,w) = bw - cu, \end{cases} \tag{4.40}$$

де $0 < a < 1$ і $b, c > 0$ деякі сталі.

В [12], введенням нелокального інтегро-диференціального оператора

$$Au = -\nabla(\sigma_i \nabla u) + \nabla(\sigma_i \nabla(\{\nabla \cdot (\sigma_i + \sigma_l)\nabla\}^{-1}(\nabla \cdot \sigma_i \nabla u))),$$

що і називається бідоменним, система (4.38) переписана у абстрактній формі еволюційного рівняння

$$\begin{cases} \partial u_t + f(u,w) + Au = s, \\ \partial w_t + g(u,w) = 0, \\ u(0) = u_0, \ w(0) = w_0. \end{cases} \tag{4.41}$$

Для системи (4.41) при виконанні певних умов на нелінійності, доведені теореми існування розв'язків.

У роботі [47], розглянуто бідоменне рівняння збурене випадковими силами типу Q-вінеровського процесу. Там отримані теореми існування, єдиності, неперевної залежності від початкових даних та вивчені питання існування інваріантних мір.

Зараз ми розглянемо такого типу рівняння, що враховує ефект запізнення, тобто, наступне стохастичне функціонально-диференціальне рівняння із запізненням

$$\begin{cases} du(t) = [-Au(t) + f(u(t-h), y(t-h))]dt + dW(t), \\ dy(t) = g(u(t-h, y(t-h))dt, \\ u(t) = \phi(t), \ y(t) = \psi(t), \ t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{4.42}$$

де $h > 0$ визначає запізнення, $Q \subset \mathbb{R}^3$ є обмеженою областю із гладкою межею ∂Q. Щоб застосувати попередні результати, потрібно визначити функціональні простори, які утворюють трійку Гельфанда. Покладемо $H := L^2(Q)$, $H_0 := \{v \in H, \int_Q v dx = 0\}$, $V := H^1(Q)$ та $D(A) := \{u \in H^2(Q) \cap H_0, \ \nabla u \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial Q\}$.

Нехай σ_i та $\sigma_e : Q \to \mathbb{R}^{n\times n}$ є симетричними матрицями і функціями класу $C^1(\overline{Q})$. Більш того, нехай існують додатні сталі $\underline{\sigma}$ та $\overline{\sigma}$ де $0 < \underline{\sigma} < \overline{\sigma}$ такі, що

$$\underline{\sigma}|\xi|^2 \le \xi^* \sigma_i(x)\xi \le \overline{\sigma}|\xi|^2 \quad \text{and} \quad \underline{\sigma}|\xi|^2 \le \xi^* \sigma_e(x)\xi \le \overline{\sigma}|\xi|^2 \tag{4.43}$$

для всіх $x \in \overline{Q}$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Як показано в [12], при цьому оператор A задовольняє умови (A1)-(A3). Більш того, існує неспадна послідовність чисел $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, що $0 < \lambda_0 \le \ldots \le \lambda_i \le \ldots$, а також ортонормований базис в H, що складається із власних векторів $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ опратора A.

Тепер можна ввести Q-вінерів процес

$$W(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \psi_k(x)\beta_k(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty.$$

Далі ми розглянемо два види нелінійностей:

1) випадок Аллена-Кана, де $f = -u^3(t) + u(t-h)$, $g = 0$;

2) випадок Фітц-Хью-Нагумо, де

$$\begin{aligned} f &= -u^3(t) + (a+1)u^2(t) - au(t-h) - y(t-h), \\ g &= -by(t-h) + cu(t-h), \end{aligned}$$

$a \in (0,1)$, $b > 0$, $c > 0$.

Перевіримо для даних нелінійностей виконання умов (N1)-(N5).

У випадку Аллена-Кана ми маємо відображення $f(\phi) = -\phi^3(0) + \phi(-h)$. Отже,

$$||f(\phi)||^2 = \int_Q |\phi^3(0,x) - \phi(-h,x)|^2 dx \le 2\left(\int_Q \phi^6(0,x)dx + \int_Q \phi^2(-h,x)dx\right).$$

Із теорем вкадення Соболева випливає, що $V \subset L^6(Q)$ (якщо $d = 3$), а тому справедлива нерівність

$$\int_Q u^6(x)dx \le C\|u\|_V^6.$$

Тоді отримуємо

$$||f(\phi)||^2 \le 2C||\phi(0,x)||_V^6 + 2 \sup_{\theta\in[-h,0]} ||\phi(\theta)||^2 \,\mathrm{meas}(Q)$$

$$= \frac{2C}{h^6}\left(\int_{-h}^{0} ||\phi(0,x)||_V dt\right)^6 + 2||\phi||_C^2 \operatorname{meas}(Q).$$

Таким чином, умова (N2) виконана. Очевидне також виконання і умови (N3).

Перевіримо тепер умову (N4). Маємо

$$\begin{aligned}(f(\phi), \phi(0)) &= -(\phi^3(0), \phi(0)) + (\phi(-h), \phi(0)) \\ &= -\int_Q \phi^4(0,x)dx + \int_Q \phi(-h,x)\cdot\phi(0,x)dx \\ &\le 2\left[\int_Q \phi^2(-h,x)dx + \int_Q \phi^2(0,x)dx\right] \le 4||\phi||_C^2 \operatorname{meas}(Q).\end{aligned}$$

Оскільки бідоменний оператор A задовольняє умову коерцетивності(A3), то умова (N4) також виконана.

Перевіримо виконання умови монотонності (N5). Маємо

$$\begin{aligned}&2\langle A(\phi(0) - \phi_1(0)), \phi(0) - \phi_1(0)\rangle + 2(f(\phi) - f(\phi_1), \phi(0) - \phi_1(0)) \\ &\le -2\beta||\phi(0) - \phi_1(0)||^2 + 2\beta||\phi(0) - \phi_1(0)||^2 + 2(f(\phi) - f(\phi_1), \phi(0) - \phi_1(0)).\end{aligned} \quad (4.44)$$

Оцінимо останній доданок в (4.44):

$$\begin{aligned}&(f(\phi) - f(\phi_1), \phi(0) - \phi_1(0)) \\ &= (-\phi^3(0) + \phi_1^3(0), \phi(0) - \phi_1(0)) + (\phi(-h) - \phi_1(-h), \phi(0) - \phi_1(0)) \\ &= \int_Q (-\phi^3(0,x) + \phi_1^3(0,x))(\phi(0,x) - \phi_1(0,x))dx \\ &+ \int_Q (\phi(-h,x) - \phi_1(-h,x))(\phi(0,x) - \phi_1(0,x))dx \\ &\le ||\phi(0) - \phi_1(0)||^2 + 2||\phi - \phi_1||_C^2 \le 3||\phi - \phi_1||_C^2.\end{aligned}$$

Отже, умова (N5) виконана. Таким чином, рівняння (4.42) з нелінійністю Аллена-Кана має єдиний слабкий розв'язок.

Повернемось тепер до нелінійності Фітц-Хью-Нагумо. У цьому випадку ми маємо наступні відображення

$$f(\phi, \psi) = -\phi^3(0) + (a+1)\phi^2(0) - a\phi(-h) \quad \text{and} \quad g(\phi, \psi) = -b\psi(-h) + c\phi(-h).$$

Отже

$$||f(\phi,\psi)||^2 + ||g(\phi,\psi)||^2 \le 3\int\limits_Q (\phi^6(0,x) + (a+1)^2\phi^4(0,x) + a^2\phi^2(-h,x))dx$$
$$+b^2\int\limits_Q |\psi(-h,x)|^2dx + 2c^2\int\limits_Q |\phi(-h,x)|^2dx.$$

Як і у випадку Аллена-Кана нелінійності, використавши соболівські вкладення $V \subset L^6(Q)$ та $V \subset L^4(Q)$ $(d = 3)$, отримаємо

$$||f(\phi,\psi)||^2 + ||g(\phi,\psi)||^2 \le \frac{C}{h^6}\left(\int\limits_{-h}^{0} ||\phi(0,x)||_V dt\right)^6$$
$$+3||\phi||_C^2 \operatorname{meas}(Q) + \max\{2b^2 + 2c^2\} \operatorname{meas}(Q) + C_1$$

для деякої додатної сталої C_1. Таким чином, умова (N2) виконана.

Оскільки $f(\phi,\psi)$ та $g(\phi,\psi)$ є поліномами, то умова (N3) також виконана.

Перевіримо тепер умову (N4). Маємо

$$(f(\phi,\psi),\phi(0)) + (g(\phi,\psi),\psi(0))$$
$$= -\int\limits_Q \phi^4(0,x)dx + (a+1)\int\limits_Q \phi^3(0,x)dx - a\int\limits_Q \phi(-h,x)\phi(0,x)dx$$
$$-\int\limits_Q \phi(-h,x)\phi(0,x)dx - b\int\limits_Q \psi(-h,x)\psi(0,x)dx + c\int\limits_Q \phi(-h,x)\phi(0,x)dx$$
$$\le c + C_1(||\phi||_C^2 + ||\psi||_C^2).$$

Тут ми використали той факт, що

$$-\phi^4 + (a+1)\phi^3 \le constant.$$

Коерцетивність бідоменного оператора A передбачає виконання умови (N4).

Перевіримо тепер умову (N5). Для цього маємо

$$(f(\phi,\psi) - f(\phi_1,\psi_1),\phi(0) - \phi_1(0)) + (g(\phi,\psi) - g(\phi_1,\psi_1),\psi(0) - \psi_1(0))$$
$$= \int\limits_Q (-\phi^3(0,x) + \phi_1^3(0,x) + (a+1)(\phi^2(0,x) - \phi_1^2(0,x))$$
$$-a(\phi(-h,x) - \phi_1(-h,x))(\phi(0,x) - \phi_1(0,x))dx$$

$$+\int\limits_Q (-b(\psi(-h,x)-\psi_1(-h,x))+c(\phi(-h,x)-\phi_1(-h,x))(\psi(0,x)-\psi_1(0,x))dx$$

$$-\int\limits_Q (\psi(0,x)-\psi_1(0,x))(\phi(0,x)-\phi_1(0,x))dx$$

$$\leq \int\limits_Q (\phi(0,x)-\phi_1(0,x))^2(-(\phi^2(0,x)+\phi(0,x)\phi_1(0,x)+\phi_1^2(0,x))$$

$$+(a+1)(\phi(0,x)-\phi_1(0,x))dx+6||\phi-\phi_1||_C^2 \operatorname{meas}(Q)+6b||\psi-\psi_1||_C^2 \operatorname{meas}(Q).$$

Зазначимо, що

$$-(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)+(a+1)(u_1+u_2)\leq \frac{(1+a)^2}{3}\leq \frac{4}{3}$$

для всіх $a\in(0,1)$.

Отже, маємо

$$\int\limits_Q (\phi(0,x)-\phi_1(0,x))^2(-(\phi^2(0,x)+\phi(0,x)\phi_1(0,x)+\phi_1^2(0,x))$$

$$+(a+1)(\phi(0,x)-\phi_1(0,x))dx\leq \frac{4}{3}||\phi-\phi_1||_C^2 \operatorname{meas}(Q).$$

Таким чином, умова (N5) виконана.

Отже задача (4.42) має єдиний слабкий розв'язок як для нелінійності Аллена-Кана так і для нелінійності Фітц-Хью Нагумо.

4.4 Сильні локальні розвязки бідоменних рівнянь

У цьому підрозділі дослідимо існування сильних розв'язків бідоменних систем. Дані розв'язки у порівнянні зі слабкими, маю більшу гладкість, так щоб входити у область визначення бідоменного оператора. Оскільки даний оператор містить другу похідну, то і розв'язки повинні її мати. Доведення основного результату буде базуватись на теоремах типу Сірріна та на теорії критичних просторів.

Отже, розглянемо наступну стохастичну систему функціонально-диференціальних рівнянь із головним бідоменним оператором

$$\begin{cases} du(t) = [-Au(t) + f(u(t-h), y(t-h))]dt + dW(t), \\ dy(t) = g(u(t-h), y(t-h))dt, \\ u(t) = \phi(t),\ y(t) = \psi(t),\ t \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{4.45}$$

Тут бідоменний оператор A і Q-вінеровський процес $W(t) = W(t, x)$ були введені у попередньому підрозділі. Розв'язок будемо розуміти у наступному сенсі.

Означення 4.2. $\mathcal{F}_t$-адаптований випадковий процес $(u(t, \cdot), y(t, \cdot)) \in D(A) \times H$ назвемо сильним розв'язком рівняння (4.45) на $[0, T]$ якщо:
(a) $u(t) = \phi(t)$ and $y(t) = \psi(t)$ для майже всіх $t \in [-h, 0]$;
(b) для майже всіх $t \in [0, T]$, рівняння

$$\begin{cases} u(t) = u(0) - \int_0^t Au(s)ds + \int_0^t f(u(s-h), y(s-h))ds + W(t), \\ y(t) = y(0) + \int_0^t g(u(s-h), y(s-h))ds, \end{cases} \tag{4.46}$$

виконується із ймовірністю 1.

Для отримання основного результату, доцільно спочатку розглянути абстрактне детерміністичне функціонально-диференціальне рівняння виду

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u_t), \quad & t \in [0, T], \\ u(t) = \phi(t), \quad & t \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{4.47}$$

в банахому просторі X із нормою $\| \cdot \|$. Тут A є секторіальним оператором, а отже і визначені дробові його степені A^α, $\alpha \in [0, 1]$. Покладемо $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ і утворимо простір X^α із нормою графіка

$$\|u\|_\alpha = \|A_1^\alpha u\|, \quad u \in X^\alpha,$$

де $A_1 = A + aE$ і a вибране так, щоб $\mathrm{Re}\ \sigma(A_1) > 0$. Добре відомо, що норми, утворені різними a є еквівалентними (див, напр Теорему 1.4.6 [45]).

Позначимо через X_C^α простір функцій зі значеннями в X^α , неперервних на $[-h, 0]$, наділений нормою $\|u\|_C^\alpha = \sup\limits_{\theta \in [-h,0]} \|u(\theta)\|_\alpha$. Припустимо, що $f(t, \phi)$ є відображенням, що діє із відкритої множини $U \subset [0, T] \times X_C^\alpha$ в X для деякого

α, і воно локально гельдеровим по t та локально ліпшицевим по ϕ. Останнє означає, що якщо $(t_1, \phi_1) \in U$, то існує окіл $V \subset U$ точки (t_1, ϕ_1) такий, що для всіх $(t, \phi), (s, \psi) \in U$ виконана нерівність

$$\|f(t, \phi) - f(s, \psi)\| \leq L(|t - s|^j + \|\phi - \psi\|_\alpha^C), \tag{4.48}$$

для деяких сталих $L > 0$ та $j > 0$. Надалі нам потрібно буде поняття класичного розв'язку задачі (4.47).

Означення 4.3. X-значна функція $u(t)$ називається класичним розв'язком початкової задачі (4.47) на відрізку $[0, T]$ якщо $u(t)$ є неперервноюна $[0, T]$, неперервно диференційовною у сильному сенсі на $(0, T]$ і $u(t) \in D(A)$ для $t \in (0, T]$, $u(t) = \phi(t)$, $t \in [-h, 0]$ та задовольняється рівність (4.47).

Позначимо через $S(t)$ аналітичну напівгрупу на X, генератором якої є оператор A.

Нам будуть потрібні наступна лема та теорема, що є узагальненням відповідних результатів із [45] на клас функціонально-диференціальних рівнянь.

Лема 4.3. *Якщо $u(t)$ є розв'язком рівняння* (4.47) *на* $[0, T]$, *а ϕ є неперервною за Гельдером функцією з* $[-h, 0]$ *в* X^α, *то*

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t - s)f(s, u_s)ds, \quad t \in [0, T]. \tag{4.49}$$

Навпаки, якщо $u(t)$ є неперервною функцією з $[0, T]$ *в* X^α, $u(t) = \phi(t)$, $t \in [-h, 0]$, *що задовольняє інтегральне рівняння* (4.49), *то $u(t)$ є розв'язком функціонально-диференціального рівняння* (4.47) *на* $[0, T]$.

Доведення. Доведення даної леми подібне до доведення аналогічного результату , а саме леми 3.3.2 з [45] для рівнянь без запізнення, тому ми зупинимося лише на відмінних рисах, які відображають специфіку рівняння (4.47).

Для доведення нам будуть потрібні два твердження.

Твердження 4.1. *Якщо $u(t)$ є неперевною функцією з* $[-h, T]$ *в* X^α, *то функція u_t є також неперервною на* $[0, T]$ *за нормою простору* X_C^α.

Доведення твердження 5.1. Із неперервності функції $u(t)$ на $[-h, T]$ випливає її рівномірна неперервність на цьому відрізку. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує

$\delta > 0$ таке, що $\|u(t) - u(s)\|_\alpha < \varepsilon$ якщо $|t - s| < \delta$. Тому, для t, s із $[0, T]$ таких, що $|t - s| < \delta$ маємо

$$\|u(t + \theta) - u(s + \theta)\|_\alpha < \varepsilon$$

для всіх $\theta \in [-h, 0]$. Таким чином, $\|u_t - u_s\|_\alpha^C < \varepsilon$, що і завершує доведення даного твердження.

Наступне твердження стосується неперервності за Гельдером.

Твердження 4.2. *Якщо $u(t)$ є неперевною функцією з $[-h, T]$ в X^α та $u(t)$ є неперервною за Гельдером функцією, що діє з $[-h, 0]$ в X^α та з $[0, T]$ в X^α, то u_t є локально гельдеровою функцією на $[0, T]$ за нормою простору X_C^α.*

Доведення твердження 5.2. Нехай L спільна стала Гельдера, а γ_1 та γ_2 показники Гельдера на $[-h, 0]$ та $[0, T]$, відповідно. Необмежуючи загальності, будемо ввадати, що $\gamma_1 \leq \gamma_2$. Покладемо $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Візьмемо довільне $t \in [0, T]$ та $s \in (0, 1)$ такі, що $t + s \in (0, T]$. Далі, для $\theta \in [-h, 0]$ розглянемо різницю

$$\|u(t + s + \theta) - u(t + \theta)\|_\alpha.$$

Якщо $t + s + \theta$ належить $[-h, 0]$, то тоді маємо

$$\|u(t + s + \theta) - u(t + \theta)\|_\alpha \leq L|S|^{\gamma_1}. \tag{4.50}$$

Якщо ж $t + s$ належить інтервалу $[0, T]$, то у цьому випадку отримуємо, що

$$\|u(t + s + \theta) - u(t + \theta)\|_\alpha \leq L|S|^{\gamma_2}. \tag{4.51}$$

Припустимо, що $t + \theta \in [-h, 0]$ та $t + \theta + s \in [0, T]$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \|u(t + s + \theta) - u(t + \theta)\|_\alpha &\leq \|u(t + s + \theta) - u(0)\|_\alpha + \|u(t + \theta) - u(0)\|_\alpha \\ &\leq L(|t + s + \theta|^{\gamma_2} + |t + \theta|^{\gamma_1}) \leq L(|S|^{\gamma_1} + |S|^{\gamma_2}). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Отже із (4.50)-(4.52) отримуємо

$$\|u(t + s + \theta) - u(t + \theta)\|_\alpha \leq 2L|S|^\gamma.$$

Значить, $\|u_t - u_{t+s})\|_\alpha^C \leq 2L|S|^\gamma$, що і завершує доведення твердження. Повернемось тепер до доведення леми. Слідуючи міркуванням леми 3.3.2 з [45], можна показати, що $u(t)$ є неперервною за Гельдеромфункцією з $[0, T]$ в X^α.

Тоді із доведених щойно тверджень маємо, що u_t є локально гельдеровою функцією, що діє з $[0,T]$ в X^α. Отже, функція $t \mapsto f(t,u_t)$ є локально гельдеровою на $[0,T]$. Але, $u(t)$ задовольняє лінійне рівняння

$$\frac{dy}{dt} + Ay = f(t,u_t), \quad t \in [0,T], \quad y(0) = u(0),$$

а тому,згідно з теоремою 3.2.2 з [45], $u(t)$ є розв'язком задачі (4.47) на $[0,T]$. Лема доведена. □

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.3. *Нехай A секторіальний оператор, а $\alpha \in (0,1)$ та $f : U \to X$, де U відкрита підмножина в $[0,T] \times X_C^\alpha$. Нехай також $f(t,\phi)$ є локально гельдеровою по t та локально ліпшицевою за ϕ і ϕ є неперервною за Гельдером функцією з $[-h,0]$ в X^α.*

Тоді існує $t_1 = t_1(\phi)$ таке, що задача (4.47) *має єдиний класичний розв'язок на інтервалі $[0,t_1)$.*

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 3.3.3 з [45], достаньо показати, що на деякому інтервалі $[0,t_1)$ рівняння (4.49) має єдиний розв'язок, що є неперервною функцією з $[0,t_1)$ в X^α.

Виберемо $\delta > 0$ та $\tau > 0$ такими, щоб множина

$$V = \{(t,\psi) : t \in [0,\tau], \|\psi - \phi\|_\alpha^C \le \delta\}$$

містилась в U та

$$\|f(t,\phi_1) - f(t,\phi_2)\| \le L\|\phi_1 - \phi_2\|_\alpha^C$$

для $(t,\phi_1), (t,\phi_2) \in V$.

Нехай $B = \max\limits_{[0,\tau]} \|f(t,\phi)\|$. Виберемо t_1 так, щоб $t_1 \in (0,\tau]$ та

$$\|(S(h) - E)\phi(0)\|_\alpha \le \frac{\delta}{2} \quad \text{for } h \in [0,t_1],$$

$$M(B + L\delta)\int\limits_0^{t_1} t^{-\alpha}e^{at}dt \le \frac{\delta}{2},$$

де $\|A_1^\alpha S(t)\| \le Mt^\alpha e^{at}$, $t > 0$.

Позначимо через S множину всіх неперервних функцій $z(t) : [-h,t_1] \to X^\alpha$, що співпадають з ϕ on $[-h,0]$, та задовольняють умову $\|z(t) - \phi(0)\|_\alpha \le \delta$ for

$t \in [0, t_1]$. Веденням норми $\sup\limits_{t\in[-h,t_1} \|z(t)\|_\alpha$ простір S стає повним метричним простором.

Далі, для $z \in S$ визначимо оператор так, що $T(z)(t) = \phi(t)$, $t \in [-h, 0]$ та $T(z)(t) = S(t)\phi(0) + \int_0^t S(t-s)f(s, z_s)ds$, $t \in [0, t_1]$. Аналогічно до теореми 3.3.3 з [45], можна показати, що відображення T переводить S в себе та є відображенням стиску. Це і завершує доведення теореми. □

Тепер ми повернемось до задачі (4.45). У статті [12] було показано, що бідоменний оператор є секторіальним та його спектр задовольняє умову $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$. А отже $(-A)$ є генератором аналітичної напівгрупи обмежених операторів $S(t)$. Це означає, що A^α може бути коректно означеним для $\alpha \in (0, 1]$ та $\|A^\alpha u\|$ є еквівалентною нормі графіка оператора A^α.

Введемо у розгляд стохастичний інтеграл, що називається стохастичною конволюцією напівгрупи $S(t)$ та процесу W. Дана стохастична згортка визначається наступним чином

$$W_A(t) := \int\limits_0^t S(t-s)dW(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \int\limits_0^t S(t-s)\psi_i d\beta_i(s).$$

Ми скористаємося наступним результатом стохастичної згортки, стосовно її гладкості.

Лема 4.4. *Нехай $T > 0$ та припустимо, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k < \infty$. Тоді для майже всіх $\omega \in \Omega$ $W_A(t) \subset D(A)$, для всіх $t \in [0, T]$.*

Доведення. Оцінимо наступну норму

$$\mathbf{E}\|AW_A(t)\|^2 = \mathbf{E}\left\| A \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \int\limits_0^t S(t-s)\psi_k(x)d\beta_k(s) \right\|^2.$$

Із означень λ_i та ψ_i, як власних значень та власних функцій оператора A відповідно, отримуємо $S(t)\psi_i = e^{-\lambda_i t}\psi_i$, для всіх $i \in \mathbb{N}$ та $t > 0$.

Отже,

$$\mathbf{E}\|AW_A(t)\|^2 = \mathbf{E}\left\| A \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}\psi_k(x)d\beta_k(s) \right\|^2$$

$$= \mathbf{E}\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \psi_k(x) d\beta_k(s) \right\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda_k \|\psi_k\| \left| \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s) \right| \right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k^2 \int_0^t e^{-2\lambda_k(t-s)} ds \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k < \infty,$$

що і завершує доведення. □

Із леми з [30] випливає наступна рівність $W_A(t) = \int_0^t -AW_A(s) + W(t)$ для всіх $t \in [-h, 0]$. Визначимо $W_A(t) = W_A(-t)$ для $t \in [-h, 0]$. Ввівши нову змінну $U = u - W_A$, можна легко переконатись, що пара (U, y) задовольняє систему

$$\begin{cases} dU = [-AU + f(U(t-h) + W_A(t-h), y(t-h))]dt, \\ dy = g(U(t-h) + W_A(t-h), y(t-h))dt, \\ U(t) = \phi(t) - W_A(-t),\ y(t) = \psi(t),\ t \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{4.53}$$

Тепер якщо (U, y) є сильним розв'язком (4.53), то $U \in D(A)$ і $u = U + W_A \in D(A)$; отже, (u, y) є сильним розв'язком (4.45). Оскільки напігрупа $S(t)$ аналітична на $H = L^2(Q)$, то згідно з теоремою 5.14 in [30] для $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ маємо, що процес $W_A(t)$ має α-гельдерові траєкторії в H.

Тепер покладемо $Z := H \times B, B = L^\infty(Q)$ та $\mathcal{A} : D(A) \subset Z \to Z$, $\mathcal{A}z := (-Au, 0)$. Тут $z = (u, y)$ та $D(\mathcal{A}) = D(A) \times B$, де

$$D(A) = \{u \in H :\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 (u, \psi_i)^2 < \infty\}.$$

Покладемо також

$$Z^\alpha := \{u \in H :\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\alpha} (u, \psi_i)^2 < \infty\} \times B,$$

та визначимо дробові степені $\mathcal{A}^\alpha$ оператора $\mathcal{A}$ наступним рядом

$$\mathcal{A}^\alpha z = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\alpha} (u, \psi_i) \psi_i, 0 \right).$$

Тоді, взявши $0 \le \alpha \le \beta$, матимемо $D(\mathcal{A}) \subset Z^\beta \subset Z^\alpha$. Значить

$$W_A \in D((-A)^\alpha).$$

Із [45] маємо, що $Z^\alpha \subset B \times B$ if $\frac{d}{4} < \alpha < 1$. Нехай функції $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є локально ліпшицевими. Тоді із леми16 з [12], маємо, що

$$\mathcal{F}(z) := (u, y) \to (f(u, y), g(u, y))$$

є локально ліпшицевим відображенням з Z^α в Z. Отже, відображення

$$G(\phi, \psi) := (\phi, \psi) \to (f(\phi(-h), \psi(-h)), g(\phi(-h), \psi(-h)))$$

є локально ліпшицевим відображенням з Z_C^α в Z.Тут Z_C^α є банаховим простором із нормою $\|u\|_C^\alpha = \sup\limits_{t\in[-h,0]} \|u(t)\|_\alpha$.

Дійсно, маємо

$$|f(u, y) - f(u_1, y_1)| \le L(|y - y_1| + |u - u_1|)$$

якщо $|u| \le r$, $|y| \le r$. Оттже, якщо if $\|\phi(-h, x)\|_\infty \le r$, $\|\psi(-h, x)\|_\infty \le r$, $\|\phi_1(-h, x)\|_\infty \le r$, and $\|\psi_1(-h, x)\|_\infty \le r$, то матимемо

$$\begin{aligned}
&\|f(\phi(-h), \psi(-h)) - f(\phi_1(-h), \psi_1(-h))\| \\
&= \left(\int\limits_Q |f(\phi(-h, x), \psi(-h, x)) - f(\phi_1(-h, x), \psi_1(-h, x))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le L \operatorname{meas}(Q) \left(\|\phi(-h) - \phi_1(-h)\|_\infty + \|\psi(-h) - \psi_1(-h)\|_\infty\right) \\
&\le CL \operatorname{meas}(Q) \left(\|\phi(-h) - \phi_1(-h)\|_\alpha + \|\psi(-h) - \psi_1(-h)\|_\alpha\right) \\
&\le CL \operatorname{meas}(Q) \left(\|\phi - \phi_1\|_C^\alpha + \|\psi - \psi_1\|_C^\alpha\right).
\end{aligned}$$

Головним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.4. *Припустимо, що* $\{\gamma_k\}$ *задовольняє умову* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k^2 < \infty$. *Нехай також* $\alpha \in (0, \frac{d}{4})$, *а початкові функції* ϕ *та* ψ *такі, що* (ϕ, ψ) *є неперервними за Гельдером відображеннями з* $[-h, 0]$ *в* Z^α; *та нехай також* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *і* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *є локально ліпшицевими функціями.*

Тоді існує $T = T(\omega) > 0$ *таке, що початкова задача* (4.45) *має єдиний сильний розв'язок на* $[0, T)$.

Доведення. Маємо

$$\|W_A(t) - W_A(t_1)\|_{D(A)} = \|W_A(t) - W_A(t_1)\| + \|A(W_A(t) - W_A(t_1))\|.$$

Отже, з теореми 5.14 in [30] маємо, що

$$\|W_A(t) - W_A(t_1)\| \le C(\omega)|t - t_1|^{\alpha}, \quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

із ймовірністю 1. Більш того, оскільки

$$AW_A = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \int_0^t (-\lambda_k) e^{-\lambda_k(t-s)} \psi_k(x) d\beta_k(s),$$

то звідси випливає, що

$$\mathbf{E}\|A(W_A(t) - W_A(t_1))\|^2$$

$$= \mathbf{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\int_0^t (-\lambda_k) e^{-\lambda_k(t-s)} \psi_k(x) d\beta_k(s) - \int_0^{t_1} (-\lambda_k) e^{-\lambda_k(t_1-s)} \psi_k(x) d\beta_k(s)\right)\right\|^2$$

$$\le \mathbf{E}\| \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t_1} \gamma_k(-\lambda_k) \left(e^{-\lambda_k(t-s)} - e^{-\lambda_k(t_1-s)}\right) \psi_k(x) d\beta_k(s)$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \gamma_k(-\lambda_k) e^{-\lambda_k(t-s)} \psi_k(x) d\beta_k(s)\|^2$$

$$\le 2\left(\mathbf{E} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda_k \int_0^{t_1} \left(e^{-\lambda_k(t-s)} - e^{-\lambda_k(t_1-s)}\right) d\beta_k(s)\right)^2$$

$$+2\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda_k \int_{t_1}^{t} e^{-\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s)\right)^2 = 2J_1 + 2J_2.$$

Використовуючи властивості стохастичного інтеграла (див. [30], стр.132-133), матимемо наступні оцінки

$$J_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k^2 \int_0^{t_1} \left(e^{-\lambda_k(t-s)} - e^{-\lambda_k(t_1-s)}\right)^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k^2 \int_0^{t_1} \left(\int_{t_1-s}^{t-s} -\lambda_k e^{-\lambda_k \tau} d\tau\right)^2 ds$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k^2 \int_0^{t_1} \left(\int_{t_1-s}^{t-s} -\lambda_k \tau e^{-\lambda_k \tau} \frac{1}{\tau} d\tau\right)^2 ds \le C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k^2 \int_0^{t_1} \left(\int_{t_1-s}^{t-s} \frac{d\tau}{\tau}\right)^2 ds. \tag{4.54}$$

Тепер, для фіксованого $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$, оцінимо останній доданок в (4.54) наступним чином

$$\int\limits_{t_1-s}^{t-s} \frac{d\tau}{\tau} = \int\limits_{t_1-s}^{t-s} \frac{\tau^{\gamma-1}}{\tau^{\gamma}} d\tau \leq \frac{(t-s)^{\gamma} - (t_1-s)^{\gamma}}{\gamma(t_1-s)^{\gamma}}. \tag{4.55}$$

Комбінуючи (4.54) з (4.55), матимемо

$$J_1 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k^2 (t-t_1)^2.$$

Далі оцінимо J_2. Маємо

$$J_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k^2 \int\limits_{t_1}^{t} e^{-2\lambda_k(t-s)} ds \leq C(t-t_1),$$

і разом матимемо

$$\mathbf{E}\|AW_A(t) - AW_A(t_1)\|^2 \leq C(t-t_1)^{2\gamma}.$$

Згідно пропозиції 3.15 з [30],

$$\|AW_A(t) - AW_A(t_1)\| \leq C(\omega)|t-t_1|^{\alpha}, \quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{4\gamma}\right).$$

Прийнявши до уваги вкладення $D(A) \times B \subset Z^{\alpha}$ матимемо, що $W_A(t)$ є неперервним за Гельдером в Z^{α}. ПОчаткова функція $\phi - W_A(-t)$ є також неперервна за Гельдером, як функція з $[-h, 0]$ в Z^{α}.

Нарешті,з використанням локальної умови Ліпшиця, отримаємо

$$\begin{aligned} &\|f(\phi(-h) + W_A(t-h), \psi(-h)) - f(\phi_1(-h) + W_A(t_1-h), \psi_1(-h))\| \\ &\leq C(\|\phi - \phi_1\|_C^{\alpha} + \|\psi - \psi_1\|_C^{\alpha} + L_1\|W_A(t-h) - W_A(t_1-h)\|_{D(A)}), \end{aligned}$$

де L_1- константа вкладення $D(\mathcal{A}) \subset Z$.

Отже, система (4.53) задовольняє умови теореми 4.3 для майже всіх $\omega \in \Omega$. Останнє завершує доведення теореми.

□

4.5 Висновки до розділу 4

У цьому розділі розглянуто системи спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, одне із яких містить необмежений оператор, а інше є звичайним функціонально-диференціальним рівнянням. Такі пари часто виступають у ролі математичних моделей реальних явищ у яких частина параметрів мають розподілений характер, а решта–зосереджені. Отримано такі нові результати:

1. встановлено умови існування та єдиності глобальних слабких розв'язків початкових задач систем спарених рівнянь;
2. доведено неперервну залежність розв'язків від початкових функцій;
3. абстрактні результати застосовоно до дослідження стохастичної моделі серцевого дефібрилятора із "пам'яттю". Отримано коефіцієнтні умови існування та єдиності слабких розв'язків;
4. встановлено існування та єдиність сильних розв'язків (локальних) системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь бідоменного типу.

Висновки

У дисертаційній роботі одержано наступні результати.

Для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу у гільбертових просторах, праві частини яких не є ліпшицевими отримано такі нові результати:

1. доведено теорему існування та єдиності м'якого розвязку початкової задачі;
2. доведено теорему про неперевну залежність розв'язків від початкових даних;
3. для розв'язків встановлена умова марковості та феллеровості у просторах зсівів;
4. отримано достатні умови існування інваріантних мір у просторах зсувів;
5. для рівнянь у частинних похідних параболічного типу отримані коефіцієнтні умови існування інваріантних мір;
6. для лінійних стохастичних рівнянь у гільбертових просторах знайдено коефіцієнтні умови існування та єдиності інваріантних мір.

Для системи спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, одне із яких містить необмежений оператор, а інше є звичайним функціонально-диференціальним рівнянням, отримано такі нові результати:

1. встановлено умови існування та єдиності глобальних слабких розв'язків початкових задач систем спарених рівнянь;
2. доведено неперервну залежність розв'язків від початкових функцій;
3. абстрактні результати застосовоно до дослідження стохастичної моделі серцевого дефібрилятора із "пам'яттю". Отримано коефіцієнтні умови існування та єдиності слабких розв'язків;
4. встановлено існування та єдиність сильних розв'язків (локальних) системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь бідоменного типу.

Список використаних джерел

1. Anguraj A., Vinodkumar A. Existence, Uniqueness and Stability Results of Impulsive Stochastic Semilinear Neutral Functional Differential Equations with Infinite Delays // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2009. Vol. 67, no. 7. P. 1–13.
2. Anguraj A., Vinodkumar A. Existence, uniqueness and stability of impulsive stochactic partial neutral functional differential equations with infinite delays // J. Appl. Math. Informatics. 2010. Vol. 28, no. none. P. 739–751.
3. Assing S., Manthey R. Invariant Measures for Stochastic Heat Equations with Unbounded Coefficients // Stochastic Processes and their Applications. 2003. Vol. 103, no. 2. P. 237–256.
4. Balasubramaniam P., Ntouyas S. K., Vinayagam D. Existence of Solutions of Semilinear Stochastic Delay Evolution Inclusions in a Hilbert Space // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005. Vol. 305, no. 2. P. 438–451.
5. Bao H., Cao J. Existence and Uniqueness of Solutions to Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Infinite Delay // Applied Mathematics and Computation. 2009. Vol. 215, no. 15. P. 1732–1743.
6. Barbu V. A semigroup approach to an infinite delay equation in Hilbert space // Abstract Cauchy Problems and Functional Differential Equations. 1981. Vol. 48, no. 3. P. 1–25.
7. Bigun Y. I. Existence of a Solution and Averaging of Nonlinear Multifrequency Problems With Delay // Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. 2007. Vol. 59, no. 4. P. 435–446.

8. Bogachev V. I., Rockner M. Elliptic Equations for Measures on Infinite Dimensional Spaces and Applications // Probability Theory and Related Fields. 2001. Vol. 120, no. 4. P. 445–496.
9. Boichyc O., Jyravlyv V. P. Dichotomy on semi-axis and bounded on the entire axis solutions of linear systems with delay // Journal of Mathematical Sciences (United States),translation by Nonlinear oscillations. 2015. Vol. 18, no. 4. P. 431–445.
10. Boufoussi B., Hajji S., Lakhel E. Time-dependent neutral stochastic functional differential equations driven by a fractional Brownian motions // Commun. Stoch. Anal. 2016. Vol. 10, no. 1. P. 1–12.
11. Boufoussi B., Hajji S., Lakhel E.-H. Exponential Stability of Impulsive Neutral Stochastic Functional Differential Equation Driven by Fractional Brownian Motion and Poisson Point Processes // Afrika Matematica. 2018. Vol. 29, no. 1, 2. P. 233–247.
12. Bourgault Y.and Coudiére Y., C. P. Existence and uniqueness of the solution for the bidomain model used in cardiac electrophysiology // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2009. Vol. 10, no. 1. P. 458–482.
13. Brewer D. W. The asymptotic stability of a nonlinear functional differential equation of infinite delay // Houston J. Math. 1980. Vol. 43, no. 6. P. 321–330.
14. Britton N. F. Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology. Academic Press, New York, 1986. P. x+320.
15. Caraballo T. Asymptotic Exponential Stability of Stochastic Partial Differential Equations with Delay // Stochastics and Stochastics Reports. 1990. Vol. 33. P. 27–47.
16. Caraballo T., Liu K. Exponential Stability of Mild Solutions of Stochastic Partial Differential Equations with Delays // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1999. Vol. 17, no. 5. P. 743–763.
17. Caraballo T., Real J. Partial Differential Equations with Delayed Random Perturbations: Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions // Stochastic Analysis and Applications. 1993. Vol. 11, no. 5. P. 497–511.
18. Caraballo T., Real J., Garrido-Atienza M. J. Existence and Uniqueness of Solutions for Delay Stochastic Evolution Equations // Stochastic Analysis and Applications. 2003. Vol. 20, no. 6. P. 1225–1256.

19. Cerrai S. Second Order PDE's in Finite and Infinite Dimension. Springer, Berlin, 2001. P. xiv+332.
20. Cerrai S. Stochastic Reaction-Diffusion Systems with Multiplicative Noise and nonLipschitz Reaction Term // Probability Theory and Related Fields. 2003. Vol. 125, no. 2. P. 271–304.
21. Cerrai S. Asymptotic Behavior of Systems of SPDE's with Multiplicative Noise // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Stochastic Partial Differential Equations and Applications. 2006. Vol. 245, no. 7. P. 61–75.
22. Chen H., Yuan C. On the Asymptotic Behavior for Neutral Stochastic Differential Delay Equations // IEEE Transactions on Automatic Control. 2019. Vol. 64, no. 4. P. 1671–1678.
23. Chen H. Y. The existence of solutions to functional integrodifferential equations // Chinese J. Math. 1990. Vol. 5, no. 18. P. 315 – 333.
24. Chojnowska-Michalic A. Representation theorem for general stochastic delay equations // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1978. Vol. 26, no. 7. P. 634–641.
25. Chow P. Stochastic Partial Differential Equations. Springer Series in Statistics. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2007. P. ix+281.
26. Chueshov I., Scheutzow M. A stochastic Gronwall lemma // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2013. Vol. 16, no. 2. P. 1533–1554.
27. Colli Franzone P., Pavarino L. F., Scacchi S. Mathematical Cardiac Electrophysiology. Springer, 2014. Vol. 61 of Monographs on Statistics and Applied Probability. P. x+315. ISBN: http://isbndb.com/search-all.html?kw=0-412-04901-50-412-04901-5.
28. Da-Prato, Zabczyk J. https://doi.org/10.1017/CBO9780511662829Ergodicity for Infinite-Dimensional Systems. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. P. xiv+282.
29. Da Prato G., Iannelli M. Existence and regularity for a class of integrodifferential equations of parabolic type // J. Math. Anal. Appl. 1985. no. 112. P. 36–55.
30. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. P. xii+454.

31. Da Prato G., Zabczyk J., Kwapein S. Regularity of Solutions of Linear Stochastic Equations in Hilbert Spaces // Stochastics. 1988. Vol. 23, no. 1. P. 1–23.
32. Dawson D. A. Stochastic evolution equations // Math. Biosci. 1975. no. 3–4. P. 21–34.
33. Eckmann J.-P., Hairer M. Invariant Measures for Stochastic Partial Differential Equations in Unbounded Domains // Nonlinearity. 2001. Vol. 14, no. 1. P. 133–151.
34. Es-Sarhir A., Scheutzow M., van Gaans O. Invariant measures for stochastic functional differential equations with superlinear drift term // Differential Integral Equations. 2010. Vol. 23, no. 1, 2. P. 189–200.
35. Evans L. C. Partial Differential Equations, second edition. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Vol. 19 of Lecture Notes in Statistics. P. xx+662.
36. Fife P. C. Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems. Lect. Note. in Biomath., 1979. Vol. 28. P. x+250.
37. Goldys B., Maslowski B. Martingale Solutions and Invariant Measures for Stochastic Evolution Equations in Banach spaces // Stochastic Processes and their Applications. 1999. Vol. 84, no. 2. P. 187–225.
38. Goldys B., Maslowski B. Uniform Exponential Ergodicity of Stochastic Dissipative Systems // Czechoslovak Mathematical Journal. 2001. Vol. 51, no. 4. P. 745–762.
39. Govindan T. E. Stability of Mild Solutions of Stochastic Evolution Equations with Variable Delay // Journal of Financial Economics. 2003. Vol. 21, no. 5. P. 1059–1077.
40. Grisvald P. Commutativite de deux foncteurs d interpolation et applications // J. Math. Pures. Appl. 1966. Vol. 45. P. 207–290.
41. Gurtin M., Pipkin A. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rational Mech. Anal. 1968. Vol. 31, no. 2. P. 113–126.
42. Hairer M., Mattingly J., Scheutzow M. Asymptotic Coupling and a General Form of Harris' Theorem with Applications to Stochastic Delay Equations // Probability Theory and Related Fields. 2011. Vol. 149, no. 1,2. P. 223–259.
43. Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag New York, Inc., 1977. Vol. 3 of Applied Mathematical Sciences. P. x+365.
44. Henriquez H. R. Regularity of solutions of abstract retarded functional differential equations with unbounded delay // Preprint. 1995.

45. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. Vol. 840 of Lecture Notes in Mathematics. P. 376.
46. Hida T., Streit L. On quantum theory in terms of white noise // https://doi.org/10.1090/S0025-5718-97-00807-7Nagoya Math. J. 1977. Vol. 68, no. 217. P. 21–34.
47. Hieber M., Misiats O., Stanzhytskyi O. On the Bidomain equations driven by stochastic forces // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2020. Vol. 40, no. 11. P. 6159–6177.
48. Hieber M., Pruss J. On the bidomain problem with FitzHugh-Nagumo transport // Arch. Math. 2018. Vol. 111. P. 313–327.
49. Invariant measure for stochastic functional differential equations in Hilbert spaces / Clark J., Misiats O., Mogilova V., and Stanzhytskyi O. // Electron. J. Differential Equations. 2023. Vol. 35, no. none. P. 1–21.
50. Ivanov A. F., Kazmerchuk Y. I., Swishchuk A. V. Theory, Stochastic Stability and Applications of Stochastic Delay Differential Equations: a Survey of Recent Results // Differential Equations and Dynamical Systems. 2003. Vol. 11, no. 1,2. P. 55 – 115.
51. Jankovic S., Randjelovic J. On the p -th Moment Exponential Stability Criteria of Neutral Stochastic Functional Differential Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 8, no. 5. P. 234 – 247.
52. Jiang F., Shen Y. A note on the existence and uniqueness of mild solutions to neutral stochastic partial functional differential equations with non-Lipschitz coefficients // https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.01.027Comput. Math. Appl. 2011. Vol. 61, no. 2. P. 1590–1594.
53. Jianhong W. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Springer-Verlag New York, Inc., 1996. Vol. 119 of Applied Mathematical Sciences. P. x+431.
54. Jones D. G., Sleeman B. D. Differential Equations and Mathematical Biology. George Allen and Unwin, London, 1983. P. x+350.
55. Kapustyan O., Misiats O., Stanzhytskyi O. Strong solutions and asymptotic behavior of bidomain equations with random noise // Stochastics and Dynamics. 2022. Vol. 22, no. 6. P. 115–131.

56. Keener J. J., Sneyd J. Mathematical Physiology / ed. by Abramowitz M., Stegun I. A. Interdisciplinary Appl. Math, Springer, 1998.

57. Keller E., Segel L. Initiation of slide mold aggregation viewed as an instability // J. Theoret. Biol. 1970. Vol. 26.

58. Kenzhebaev K., Stanzhytskyi A., Tsukanova A. Existence and uniqueness results, and the markovian property of solutions for a neutral delay stochastic reaction-diffusion equation in entire space // Dynam. Systems Appl. 2019. Vol. 28, no. 1. P. 19– 46.

59. Khas'minskii R. Z. Stochastic stability of differential equanions. Sijthoff and Noordhoff, 1980. P. xii+345.

60. Kolmanovskii V., Myshkis A. Applied Theory of Functional Differential Equations. Kluwer Academic Publishers, DordrechtBoston-London, 1992. P. xii+232.

61. Kolmanovskii V., Nosov V. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0741-2Stability and Periodic Regimes of Regulated Systems with Aftereffect. Translations of Mathematical monographs, Americal Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1990. Vol. 113 of Applied Mathematical Sciences. P. x+448. ISBN: http://isbndb.com/search-all.html?kw=0-387-94501-60-387-94501-6. With applications to Schrödinger operators.

62. Kryloff N., Bogoliouboff N. La theorie generale de la mesure dans son application a l'etude des systemes dynamiques de la mecanique non lineaire // Annals of Math. 1937. Vol. 2, no. 38. P. 65–113.

63. Levin S. A. Spatial patterning in the structure of ecological communities // Lect. on Math. in the Life Sciences. 1976. Vol. 8. P. 1–36.

64. Levin S. A. Population models and community structure in heterogeneous environments // Studies in Mathematical Biology, II: Population and Communities. 1978. P. 439–476.

65. Liang J., Xiao T. J. Solutions to abstract functional differential equations with infinite delay // Acta. Math. Sci. 1991. no. 34. P. 631–644.

66. Liu K. Sensitivity to small delays of pathwise stability for stochastic retarded evolution equations // J. Theor. Probab. 2018. Vol. 31, no. 3. P. 1625–1646.

67. Liu K., Taniguchi T., Truman A. Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior of Mild Solutions to Stochastic Functional Differential Equations in Hilbert Spaces // Journal of Differential Equations. 2002. Vol. 35, no. 3. P. 1113 – 1128.

68. Luo J., Taniguchi T. The Existence and Uniqueness for non-Lipschitz Stochastic Neutral Delay Evolution Equations Driven by Poisson Jumps // Stochastics and Dynamics. 2009. Vol. 9, no. 1. P. 135–152.

69. M. H. Exponential Mixing Properties of Stochastic PDEs through Asymptotic Coupling // Probability Theory and Related Fields. 2002. Vol. 124, no. 3. P. 345–380.

70. Manthey R., Zausinger T. Stochastic evolution equations in $L_\rho^{2\nu}$ // https://doi.org/https://doi.org/10.1080/17442509908834186Stochastics Stochastics Rep. 1999. Vol. 66, no. none. P. 37–85.

71. Maslowski B., Seidler J. On Sequentially Weakly Feller Solutions to SPDE's // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni. 1999. Vol. 10, no. 2. P. 69–78.

72. Murray J. D. Mathematical Biology. Springer-Verlag New York, 1989. P. x+365.

73. Neutral Stochastic Differential Delay Equations with Markovian Switching / Kolmanovskii V., Koroleva N., Maizenberg T., and etc. // Stochastic Analysis and Applications. 2003. Vol. 21, no. 4. P. 819–847.

74. Novak I. H., Stanzhytsky A. Invariant Measures for One Class of Linear Stochastic Systems in Hilbert Spaces // https://doi.org/10.1007/s10958-021-05303-8Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021. Vol. 254 (2). P. 272–279.

75. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1983. Vol. 44 of Applied Mathematical Sciences. P. v+280.

76. Prévôt C., Röckner M. A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007. P. xi+115.

77. Röckner M., Zhu R., Zhu X. Existence and uniqueness of solutions to stochastic functional differential equations in infinite dimensions // Nonlin. Anal. 2012. Vol. 125, no. 4. P. 358–397.

78. Ruan D., Luo J. The existence, uniqueness, and controllability of neutral stochastic delay partial differential equations driven by standard Brownian motion and fractional Brownian motion.

79. Ruan S. G., Wu J. Reaction-diffusion equations with infinite delay // Canad. Appl. Math. Quart. 1994. Vol. 2, no. 2. P. 485–550.

80. Ruess W. Existence of Solutions to Partial Functional Differential Equations with Delay // Lecture Notes Pure Appl. Math. 1996. Vol. 178, no. 2. P. 259–288.

81. Samoilenko A., N.I. M., Stanzhytskyi A. Existence, uniqueness, and controllability results for neutral FSDES in Hilbert spaces // Dynam. Systems Appl. 2008. Vol. 17, no. 2. P. 53–70.

82. Samoilenko A. M., Mahmudov N. I., Stanzhitskii A. N. Existence, Uniqueness and Controllability Results for Neutral FSDEs in Hilbert Spaces // Dynamic Systems and Applications. 2008. Vol. 17, no. 1. P. 53–70.

83. Scheutzow M. A stochastic Gronwall lemma // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2013. Vol. 16, no. 02. P. 1 – 18.

84. Scheutzow M., Butkovsky O. Invariant measures for stochastic functional di?erential equations // Electron. J. Probab. 2017. no. 98. P. 1 – 23.

85. Sleeman B. D. Analysis of diffusion equations in biology // Bull. IMA. 1981. Vol. 17. P. 7–13.

86. Slyusarchuk V. The method of local linear approximation in the theory of nonlinear functional-dierential equations // Sbornik: Mathematics. 2010. Vol. 201, no. 8. P. 1193–1215.

87. Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer -Verlag, New York, 1983. P. x+340.

88. Stanzhytsky A. O. On weakfnd strong solutions of paired stochastic functional differential equations in infinite–dimentional spaces // https://doi.org/10.15421/142108Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications. 2021. Vol. 29. P. 48–75.

89. Stanzhytsky A. O. The long time behavior of nonlinear stochastic functional-differential equations of neutral type in Hilbert spaces with non-Lipschitz nonlinearities. June 21-25, 2021. P. 74.

90. Stanzhytsky A. O. M. O. O., Stanzhytskyi O. M. Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non–Lipschitz coeffitients // https://doi.org/https://doi.org/10.3934/eect.2022005Evolution equations and control Theory. 2022. Vol. 11(6). P. 1929–1953.

91. Stanzhytskyi A. N., Misiats O., Yip N. Existence and Uniqueness of Invariant Measures for Stochastic Reaction-Diffusion Equations in Unbounded Domains // Journal of Theoretical Probability. 2016. Vol. 29, no. 3. P. 996–1026.

92. Stanzhytskyi A. N., Misiats O., Yip N. Asymptotic Analysis and Homogenization of Invariant Measures // Stochastics and Dynamics. 2018. Vol. 18, no. 6. P. 1–27.

93. Stanzhytskyi O., Mogilova V., Tsukanova A. On comparison results for neutral stochastic differential equations of reaction-diffusion type. 2019. P. 351–395.

94. Steele J. R. Spatial heterogeneity and population stability // Nature (London). 1974. Vol. 248, no. 2. P. 83–85.

95. Taniguchi T. The Exponential Stability for Stochastic Delay Partial Differential Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 331, no. 1. P. 191–203.

96. Tessitore G., Zabczyk J. Invariant Measures for Stochastic Heat Equations // Probability and Mathematical Statistics. 1999. Vol. 18, no. 2. P. 271–287.

97. Titchmarsh E. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Oxford, at the Claredrom Press, 1958. Vol. 2. P. x+415.

98. Travis C. C., Webb G. F. Existence and Stability for Partial Functional Differential Equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1974. Vol. 200. P. 395–418.

99. Travis C. C., Webb G. F. Partial Differential Equations with Deviating Arguments in the Time Variable // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1976. Vol. 56, no. 2. P. 397–409.

100. Tsar'kov E. F. Random Perturbations of Functional Differential Equations. Zinatne, Riga, 1989. P. 421.

101. von Renesse M.-K., Scheutzow M. Existence and uniqueness of solutions of stochastic functional differential equations // Random Operators and Stochastic Equations. 2010. Vol. 18, no. 3. P. 267–284.

102. Wei F., Cai Y. Existence, Uniqueness and Stability of the Solution to Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Infinite Delay under non-Lipschitz Conditions // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2013. Vol. 2013. P. 1–12.

103. Xu Y., Hu S. The Existence and Uniqueness of the Solution for Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Infinite Delay in Abstract Space // Acta Applicandae Mathematicae. 2010. Vol. 110, no. 2. P. 627–638.

104. Yang J., Zhang T. The Existence and Uniqueness of Invariant Measure of SPDEs with Two Reflecting Walls // Journal of Theoretical Probability. 2012. Vol. 27, no. 3. P. 863–877.

105. Yang J., Zhou Q., Zhang T. The Small Time Asymptotics of SPDEs with Reflection // Abstract and Applied Analysis. 2014. Vol. 204, no. 2. P. 1–13.

106. Yang X., Zhu Q. Existence, Uniqueness and Stability of Stochastic Neutral Functional Differential Equations of Sobolev-Type // Journal of Mathematical Physics. 2015. Vol. 56, no. 12. P. 1–16.

107. Yong X., Bin P. Mild Solutions of Local non-Lipschitz Stochastic Evolution Equations with Jumps // Applied Mathematics Letters. 2015. Vol. 52. P. 80–86.

108. lmanovskii V., Shaikhet L. Control of systems with aftereffect. Translations of Mathematical monographs, Americal Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1992. P. x+340.

109. Мартынюк Д. И., Самойленко А. О периодических решениях нелинейных систем с запаздыванием // Мат.физика. 1967. № 3. С. 128–145.

110. Митропольский Ю., Мартынюк Д. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. К.: Вища шк., 1979. С. 247.

111. Митропольский Ю., Фодчук В. Асимптотические методы нелинейной механики применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом // Украинский математический журнал. 1966. Т. 18, № 3. С. 65–84.

112. Самойленко А., Мустафаев Х. О принципе усреднения для одного класса систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом //

Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. 1990. № 3. С. 104–107.

113. Самойленко А., Трофимчук О., Банцур Н. Періодичні та майже періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь з максимумами // Доп. НАН України. 1998. № 1. С. 53–57.

114. Сергєєва Л., Бігун Я. Про глобальні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. 2011. Т. 14, № 1. С. 100–110.

115. Слюсарчук В. Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. Рівне : Видавництво УДУВГП, 2003. С. 288.

116. Станжицький А. О. Слабкі розв'язки стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах. 28-30 жовтня 2021. С. 101–102.

117. Фодчук В. О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и малым параметром // Украинский математический журнал. 1962. Т. 14, № 4. С. 435–440.

118. Фодчук В. О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра // Украинский математический журнал. 1964. Т. 16, № 2. С. 273–279.

Додаток

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Novak I. H., Stanzhytsky A. O. Invariant Measures for One Class of Linear Stochastic Systems in Hilbert Spaces // https://doi.org/10.1007/s10958-021-05303-8Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021. Vol. 254 (2). P. 271–279.
2. Stanzhytsky A. O. On weakfnd strong solutions of paired stochastic functional differential equations in infinite–dimentional spaces // https://doi.org/https://doi.org/10.15421/142 of Optimization, Differential Equations and their Applications . 2021. Vol. 29 (2). P. 48–75.
3. Stanzhytsky A. O., Misiats O. O., Stanzhytskyi O. M. Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non–Lipschitz coeffitients // https://doi.org/10.3934/eect.2022005Evolution equations and control Theory. 2022. Vol. 11 (6). P. 1929–1953.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Станжицький А О. Гранична поведінка розв'язків і інваріантні міри для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу– 2019». Ворохта, Україна. 25 лютого–1 березня 2019. С. 20.
2. Станжицький А. О. Слабкі розв'язки стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах // XVI Міжнародна наукова конференція « Присвячена 75–річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85–річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка». Чернівці, Україна. 28-30 жовтня 2021. С. 101–102.
3. Stanzhytsky A. O. Asymptotic Behavior of Stochastic Functional Differential Equations in Hilbert Spaces // International Workshop QUALITDE – 2020. Tbilisi, Georgia. December 19-21, 2020. P. 189–193.

4. Stanzhytsky A. O. The long time behavior of nonlinear stochastic functional-differential equations of neutral type in Hilbert spaces with non-Lipschitz nonlinearities // International Conference "Differential Equations and Applications (MADEA-9) ". Bishkek, Kyrgyzstan. June 21-25, 2021. P. 74.
5. Stanzhytsky A. O. Invariant measure for stochastic functional differential equations // The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022. Chisinau, Republic of Moldova. August 25–27, 2022. P. 101–102.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу– 2019». 25 лютого–1 березня, 2019, Ворохта, Україна.
2. XVI Міжнародна наукова конференція « Присвячена 75–річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85–річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка». Чернівці, Україна : Київський університет. 18-20 квітня 2018., Київ, Україна.
3. International Workshop QUALITDE – 2020. Tbilisi, Georgia. December 19-21, 2020.
4. International Conference "Differential Equations and Applications (MADEA-9) ". Bishkek, Kyrgyzstan. June 21-25, 2021
5. The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022. Chisinau, Republic of Moldova. August 25–27, 2022.