НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СКОРОБОГАЧ ТЕТЯНА БОГДАНІВНА

УДК 517.927

ФРЕДГОЛЬМОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ У ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

111 – Математика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ Т. Б. Скоробогач

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор
Михайлець Володимир Андрійович

Київ – 2023

АНОТАЦІЯ

Скоробогач Т. Б. Фредгольмові крайові задачі з параметром у функціональних просторах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика. — Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського". - Україна, Київ, 2022.

Дисертація присвячена дослідженню характеристик розв'язності і неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних класів одновимірних неоднорідних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Соболєва-Слободецького на скінченному інтервалі.

Питання про обґрунтування граничного переходу щодо задач Коші та загальних крайових задач підлягало дослідженню з боку численної кількості математиків. Фундаментальні результати про неперервну залежність за параметром розв'язків задач Коші для нелінійних систем були встановлені в роботах І. І. Гіхмана (1952), М. А. Красносельського і С. Г. Крейна (1955), Я. Курцвейля і З. Ворела (1957), А. М. Самойленка (1962 – 1965). Уточнення та доповнення для лінійних систем даних результатів було проведено А. Ю. Левіним (1967 – 1973), З. Опялем (1967), В. Т. Рейдом (1967) та Нгуен Тхе Хоаном (1993).

І. Т. Кігурадзе (1975 – 2003) і М. Ашордіа (1996) було введено та було досліджено клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язки цих задач є абсолютно неперервними функціями на відрізку $[a, b]$. Були встановлені умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. В. А. Михайлець, Н. В. Ре-

ва, Т. І. Кодлюк і Г. О. Чеханова узагальнили вказані результати для комплекснозначних функцій та лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків у своїх роботах.

В. А. Михайлецем і його учнями (2008 – 2018) були введені і досліджені класи найбільш загальних крайових задач для лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь у різних функціональних просторах, зокрема у просторах Соболєва (Рева Н. В., Кодлюк Т. І., Гнип Є. В.), просторі неперервно диференційовних функцій (Чеханова Г. О., Солдатов В. О.), просторах Гельдера (Солдатов В. О., Маслюк Г. О.), просторі Соболєва-Слободецького (Гнип Є. В., Маслюк Г. О.). Було доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вищевказаних просторах.

Для найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку достатні умови неперервної залежності за параметром їх розв'язків у просторах Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, встановлено Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлецем (2010). Випадок $p = \infty$ розглянуто у роботі А. М. Атласюк та В.А. Михайлеця [2].

В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем, В.О. Солдатовим (2016) було доведено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера, Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем (2016) — у просторі Соболєва-Слободецького. Для систем вищих порядків зазначений критерій було доведено у просторах цілої гладкості — неперервно диференційованих функцій (Мурач О. О., Солдатов В.О.) і Соболєва (Гнип Є. В., Михайлець В. А., Мурач О.О.).

Ці результати було застосовано для дослідження багатоточкових крайових задач, матриць Гріна та були використані у спектральній теорії диферен-

ціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами. Проте у деяких задачах теорії диференціальних рівнянь використовуються не лише простори цілої гладкості, а й простори, де показником гладкості може бути і дробове число. Простори Гельдера та простори Соболєва-Слободецького є найвідоміші серед них.

Зважаючи на це, є актуальним дослідження найбільш загальних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь перших порядків у просторах Соболєва-Слободецького W_p^s, де $s \in (1, \infty) \backslash \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, зокрема питання про необхідні і достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків цих задач. Необхідно зазначити, що такі задачі можуть містити в крайових умовах похідні цілого та/чи дробового порядку більшого за порядок рівняння, тому вони мають істотні особливості, що відсутні у класичних задачах (Коші, дво- та багатоточкових, інтегральних та мішаних задачах).

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано, де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У першому розділі обговорено об'єкт і предмет, наведено огляд літератури за тематикою дисертаційного дослідження. Об'єктом дослідження є одновимірні фредгольмові крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Соболєва-Слободецького, а предметом — характер залежності за параметром розв'язків цих задач у відповідних нормованих просторах.

У другому розділі досліджено найбільш загальні крайові задачі та найбільш загальні багатоточкові крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва-Слободецького $(W_p^s)^m$, де $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Показано, що досліджуваним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом $m - r$ на парі нормованих просторів $(W_p^s)^m$ і $(W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r$. Доведено критерій однозначної розв'язності досліджуваних крайових задач у цих просторах. Встановлено, що вимірності ядра і коядра оператора неоднорідної крайової задачі дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра її характеристичної матриці.

У третьому розділі для крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^s)^m$. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва-Слободецького. Встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкової крайової задачі при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^s)^m$ у випадку $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.

Додаток містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертації:

- для найбільш загальних неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва-Слободецького $(W_p^s)^m$ встановлено їх нетеровість і знайдено індекс;

- у термінах спеціально введеної числової характеристичної матриці знайдено вимірності ядра і коядра розглянутих крайових задач;

- знайдено конструктивні достатні умови збіжності характеристичних матриць послідовності неоднорідних крайових задач;

- вперше досліджено неперервність за параметром розв'язків крайових задач у просторах Соболєва-Слободецького $(W_p^s)^m$ для всіх значень $1 \leq p < \infty$. Знайдено критерій неперервності розв'язків за параметром;

- доведено, що похибка і нев'язка розв'язків крайових задач мають однаковий порядок малості;

- отримано граничну теорему для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва-Слободецького $(W_p^s)^m$ з $1 \leq p < \infty$.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальшому розвитку теорії одновимірних фредгольмових крайових задач, зокрема багатоточкових, задач із похідними дробового порядку.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, крайова задача, простір Соболєва-Слободецького, фредгольмів оператор, неперервність за параметром, багатоточкова крайова задача, характеристична матриця.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті в наукових фахових виданнях

1. *Mikhailets V. A., Skorobohach T. B.* On solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev-Slobodetskiy spaces // Dopov. Nats. Acad. Nauk Ukr. — 2020, № 4. — P. 10 – 14. DOI: 10.15407/dopovidi2020.04.010

2. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б.* Фредгольмові крайові задачі в просторах Соболєва-Слободецького // Укр. мат. журн. — 2021. — **73**, № 7. — С. 920 – 930.

   Переклад англ. мовою:

   Mikhailets V. A., Skorobohach T. B. Fredholm boundary-value problems in Sobolev-Slobodetsky spaces // Ukrainian Mathematical Journal — 2021, № 7. — P. 1071 – 1083. DOI: 10.1007/s11253-021-01977-0, SCOPUS Q2, Web of Science Core Collection

3. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б.* Фредгольмові крайові задачі з параметром в просторах Соболєва- Слободецького // Доповіді національної академії наук України — 2021, № 4. — С. 3 – 8. DOI: 10.15407/dopovidi2021.03.03.

Тези наукових доповідей

1. *Михайлець В.А., Скоробогач Т. Б.* Про розв'язок одновимірних крайових задач у просторах Соболєва-Слободецького // Міжнародна науково-практична конференція "Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз", 15 – 16 квітня,

2020, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2020. — С. 33 – 34.

2. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б.* Про одновимірні фредгольмові крайові задачі з параметром у просторах Соболєва-Слободецького // X Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 16 – 17 квітня, 2021, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — С. 35-36.

3. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б.* Про фредгольмові крайові задачі з параметром в просторах Соболєва-Слободецького // Міжнародна конференція молодих математиків, 3 – 5 червня, 2021, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2021. — С. 69.

4. *Mikhailets V. A., Skorobohach T. B.* On Solvability of Inhomogeneous Boundary-Value Problems in Fractional Sobolev Spaces // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations (QUALITDE-2021), December 18-20, 2021, Tbilisi, Georgia: Abstracts. Tbilisi: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, — 2021. — P. 140 – 143.

ABSTRACT

Skorobohach T. B. Fredholm boundary-value problems with a parameter in function spaces. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the academic degree Doctor of Philosophy in speciality 111 – Mathematics.. National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institut". – Ukraine, Kyiv, 2022.

The thesis is devoted to the study of the characteristics of solvability and continuity in a parameter of solutions of the most general classes of one-dimensional inhomogeneous boundary-value problems for the systems of linear ordinary differential equations of the first order in Sobolev-Slobodetskiy spaces on a finite interval.

The question of the substantiation of the boundary transition with respect to Cauchy problems and general boundary-value problems has been subjected to study by a large number of mathematicians. The fundamental results on the continuous dependence with respect to the parameter of solutions of Cauchy problems for nonlinear systems were established by I. I. Gikhman (1952), M. A. Krasnosel'skii and S. G. Krein (1955), J. Kurzweil and Z. Vorel (1957), A. M. Samoilenko (1962 – 1965). The specification and supplementation of these results for linear systems was carried out by A. Yu. Levin (1967 – 1973), W. T. Reid (1967) and Nguyen Tho Hoan (1993), Z. Opial (1967).

The class of linear general boundary-value problems for systems of first-order differential equations was introduced and investigated by I. T. Kiguradze (1975 – 2003) and M. Ashordia (1996). Solutions to these problems are absolutely continuous functions on the compact interval $[a, b]$. The conditions of continuity in a parameter of these solutions in the space $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ were established. V. A. Mikhailets, N. V. Reva, T. I. Kodliuk, and H. A. Chekhanova generalized the indi-

cated results for complex-valued functions and linear systems of higher-order differential equations in their works.

V. A. Mikhailets and his disciples (2008 –2015) introduced and studied the most common classes of boundary-value problems for linear systems of ordinary differential equations that are generic with respect to the various functional spaces, in particular to Sobolev spaces (N. V. Reva, T. I. Kodliuk, Ye. V. Gnyp), to the spaces of continuously differentiable functions (H. A. Chekhanova, V. O. Soldatov), to Hölder spaces (V. O. Soldatov, H. O. Masliuk), to Sobolev-Slobodetskiy spaces (Ye. V. Gnyp, H. O. Masliuk). They proved that such problems are Fredholm, obtained conditions that are sufficient for their well-posedness and continuity in the parameter of their solutions in these spaces.

For the most general boundary-value problems for systems of differential equations of the first order, sufficient conditions of continuous dependence in the parameter of their solutions in Sobolev space W_p^n, with $1 \leq p < \infty$ were found by T. I. Kodliuk and V. A. Mikhailets (2010). The case $p = \infty$ was considered in the paper of A. M. Atlasiuk and V. A. Mikhailets [2].

The constructive criterion of continuity in a parameter of solutions of the most general boundary-value problems for systems of differential equations of the first order was proved by V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. O. Soldatov (2016) in Ho ?lder spaces and Ye. V. Gnyp, V. A. Mikhailets (2016) in Sobolev-Slobodetskiy spaces. For higher-order systems, the indicated criterion was proved with respect to spaces of complete smoothness continuously differentiated functions (A. A. Murach, V. O. Soldatov) and Sobolev (Ye. V. Gnyp, V. A. Mikhailets, A. A. Murach).

The above results have been applied to study multipoint boundary- value problems, Green's matrices and have been applied to the spectral theory of differential operators with singular coefficients. However, in some problems of the

theory of differential equations, not only the spaces of complete smoothness are applied, but also spaces where the smoothness index can be a fractional number. The most well-known among them are Ho ?lder's and Sobolev-Slobodetskiy spaces.

Therefore, in connection with the above, it is important to study the most general boundary-value problems for systems of ordinary differential equations of the first order with respect to Sobolev-Slobodetskiy spaces W_p^s, with $1 \leq p < \infty$, in particular, the question of the necessary and sufficient conditions of continuous dependence in the parameter of solutions to these problems. It should be noted that the most general problems may contain derivatives of integer and fractional order in boundary conditions. Therefore they have significant specificities that are absent in classical problems (Cauchy, two- and multipoint, integral and mixed problems). Considering the above,, the systematic study of their properties is of scientific interest.

The thesis consists of the annotation in Ukrainian and in English, list of symbols, introduction, three sections of its main part, conclusions, the list of references, and appendix.

The introduction substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of the research, outlines the scientific novelty of the results obtained, their practical significance, the connection of the work with scientific programs and the personal contribution of the applicant, and also points out where the results of the dissertation have been discussed and published.

In the first section, the object, subject are discussed, a review of the literature on the theme of the dissertation research is indicated. The object of research is one-dimensional Fredholm boundary-value problems, generic with respect to Sobolev-Slobodetskiy spaces. The subject of research covers the character of the

continuity in the parameter of solutions to these problems in the corresponding normed spaces.

In the second section, the most general boundary-value problems and the most general multipoint boundary-value problems for system of m ordinary differential equations of the first order whose solutions run through Sobolev-Slobodetskiy space $(W_p^s)^m$, with $1 \leq p < \infty$ are investigated. It is shown that these problems correspond to the the Fredholm operator with the index $m - r$ on a pair of normalized spaces $(W_p^s)^m$, and $(W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r$. The criterion of well-posedness of these boundary-value problems in these spaces is proved. It is proved that the dimensions of the kernel and cokernel of the operator of boundary-value problem are equal to the dimensions of the kernel and cokernel of the characteristic matrix of the boundary-value problem, respectively.

In the third section, for the generic boundary-value problems depending on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, the constructive criterion of continuity in the parameter of solutions at $\varepsilon = 0$ in the space $(W_p^s)^m$ is established. It is shown that the error and discrepancy of the solutions to boundary-value problems have the same order of smallness for $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding Sobolev-Slobodetskiy spaces. Sufficient conditions of continuity in the parameter of solutions to multipoint boundary-value problem at $\varepsilon = 0$ in normalized space $(W_p^s)^m$ in case $1 \leq p < \infty$ are established.

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the dissertation results.

The main results that determine the scientific novelty of the thesis:

- for the generic boundary-value problems in the Sobolev-Slobodetskiy spaces $(W_p^s)^m$ their Fredholm property is established and the index is found;

- in terms of a specially introduced numerical characteristic matrix, the dimensions of the kernel and cokernel of the considered boundary-value problems are found;

- constructive sufficient conditions for convergence of characteristic matrices of a sequence of inhomogeneous boundary-value problems are found;

- for the first time the continuity in the parameter of solutions of boundary-value problems in Sobolev-Slobodetskiy spaces $(W_p^s)^m$ is investigated for all values $1 \leq p < \infty$. The criterion of continuity of solutions in a parameter is found;

- it is proved that the error and discrepancy of the solutions to boundary-value problems have the same order of smallness;

- the limit theorems for solutions to multipoint boundary-value problems in Sobolev-Slobodetskiy spaces $(W_p^s)^m$ with $1 \leq p < \infty$.

Thesis is a theoretical investigation. Its results and the method for the obtaining of these results can be used in the further development of the theory of one-dimensional Fredholm boundary-value problems, in particular multipoint problems, and problems with derivatives of fractional order.

Keywords: system of differential equations, boundary-value problem, Sobolev-Slobodetskiy space, Fredholm operator, continuity in a parameter, multipoint boundary-value problem, characteristic matrix.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень 16

Вступ 20

РОЗДІЛ 1. **Огляд літератури** 36

1.1 Задача Коші 36

1.2 Загальні та багатоточкові крайові задачі 39

1.3 Крайові задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку 45

Висновки до розділу 1 49

РОЗДІЛ 2. **Розв'язність неоднорідних крайових задач** 50

2.1 Постановка задачі 50

2.2 Допоміжні результати 54

2.3 Теорема про гомеоморфізми 57

2.4 Розв'язність крайових задач 61

2.5 Збіжність послідовності характеристичних матриць крайових задач 69

Висновки до розділу 2 76

РОЗДІЛ 3. **Неоднорідні крайові задачі з параметром** 77

3.1 Неперервність за параметром розв'язків крайової задачі 77

3.2 Критерій неперервності за параметром розв'язків крайової задачі . 81

3.3 Двобічна оцінка швидкості збіжності розв'язків крайової задачі за параметром 85

3.4 Гранична теорема для розв'язків багатоточкової крайової задачі у випадку $1 \leq p < \infty$ 88

Висновки до розділу 3 95

Висновки до дисертації 96

Список використаних джерел 98

Додаток 114

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Основні позначення, які використано в роботі:

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ — відповідно множини усіх натуральних, цілих, дійсних і комплексних чисел; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. $\{k, \ldots, l\} := \{i \in \mathbb{Z} : k \leq i \leq l\}$, де $k, l \in \mathbb{Z}$ та $k \leq l$.

3. $\mathbb{C}^m$ — m-вимірний лінійний простір усіх комплексних числових векторів-стовпців $y = \mathrm{col}(y_1, y_2, ..., y_m)$, наділений нормою
$$\|y\| := |y| = \max_i |y_i|.$$

4. $\mathbb{C}^{m\times\mu}$ — лінійний простір усіх комплексних числових матриць порядку $m \times \mu$, наділений нормою
$$\|A\| := |A| = \max_{i,k} |a_{ik}|$$
матриці $A = (a_{i,k})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ k=1,\ldots,\mu}}$.

5. $\det A$ — визначник матриці A.

6. A^{-1} — матриця, обернена до A.

7. I_m та O_m — відповідно одинична та нульова $m \times m$-матриці.

8. $C := C\big([a, b]; \mathbb{C}\big)$ — простір всіх комплекснозначних функцій $y(t)$, визначених і неперервних на відрізку $[a, b]$, наділений нормою
$$\|y\|_\infty := \max_{a\leq t\leq b} \big|y(t)\big|.$$

9. $C^m := C^m\big([a, b]; \mathbb{C}\big)$ — простір всіх комплекснозначних $m \in \mathbb{N}_0$ разів неперервно диференційованих на $[a, b]$ функцій, наділений нормою
$$\|y\|_{C^m} := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \max_{a\leq t\leq b} \big|y^{(k)}(t)\big|.$$

Тут і далі $[a,b]$ є (скінченний) відрізок на дійсній осі. Простір C^m є банаховою алгеброю.

10. $(C)^m := C\big([a,b];\mathbb{C}^m\big)$ і $(C)^{m\times m} := C\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big)$ — простори всіх комплекснозначних вектор-функцій $y(t)\colon [a,b]\to\mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t)\colon [a,b]\to\mathbb{C}^{m\times m}$ з неперервними на відрізку $[a,b]$ елементами.

11. $L_\infty := L_\infty\big([a,b];\mathbb{C}\big)$ — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, визначених і суттєво обмежених на відрізку $[a,b]$, наділений нормою
$$\|y\|_{+\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{a\le t\le b}|y(t)|.$$

12. $(L_\infty)^m := L_\infty\big([a,b];\mathbb{C}^m\big)$ і $(L_\infty)^{m\times m} := L_\infty\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big)$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t)\colon [a,b]\to\mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t)\colon [a,b]\to\mathbb{C}^{m\times m}$ із суттєво обмеженими на відрізку $[a,b]$ елементами.

13. $L_p := L_p\big([a,b];\mathbb{C}\big)$, де $1\le p<\infty$, — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, які при піднесенні до степеня p є інтегровними за Лебегом, наділений нормою
$$\|y\|_p := \Big(\int\limits_a^b |y(t)|^p dt\Big)^{1/p}.$$

14. $(L_p)^m := L_p([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(L_p)^{m\times m} := L_p([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(t)\colon [a,b]\to\mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(t)\colon [a,b]\to\mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать простору L_p.

15. $W_p^n := W_p^n\big([a,b];\mathbb{C}\big)$, де $n\in\mathbb{N}$ і $1\le p\le\infty$, — простір С. Л. Соболєва, що складається з усіх комплекснозначних функцій y таких, що
$$W_p^n\big([a,b];\mathbb{C}\big) := \{y\in C^{n-1}[a,b]\colon y^{(n-1)}\in AC[a,b], y^{(n)}\in L_p[a,b]\},$$

де $AC[a,b]$ — множина всіх абсолютно неперервних комплекснозначних функцій на відрізку $[a,b]$. Простір W_p^n наділений нормою

$$\|y\|_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} \|y^{(k)}\|_p + \|y^{(n)}\|_p,$$

де $\|\cdot\|_p$ — норма у просторі $L_p\big([a,b];\mathbb{C}\big)$ і є банаховою алгеброю.

З метою уніфікації позначень покладаємо $W_p^0 := L_p$.

16. $(W_p^n)^m := W_p^n\big([a,b];\mathbb{C}^m\big)$ і $(W_p^n)^{m\times m} := W_p^n\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big)$ — комплексні банахові простори відповідно всіх вектор-функцій $y(t)\colon [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та квадратних матриць-функцій $A(t)\colon [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать простору Соболєва W_p^n. Норми у цих просторах дорівнюють сумі норм в W_p^n усіх компонентів вектор- або матриць-функцій. Усі ці норми позначаємо через $\|\cdot\|_{n,p}$. Із контексту завжди буде зрозуміло в якому просторі (скалярних, вектор-, або матриць-функцій) розглядається норма $\|\cdot\|_{n,p}$.

17. $W_p^s := W_p^s([a,b];\mathbb{C})$, де $1 < p < \infty$ і неціле $s > 0$, — простір Соболєва-Слободецького всіх комплекснозначних функцій, які належать простору Соболєва $W_p^{[s]}$ і задовольняють умову

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_{[s],p} + \left(\int_a^b \int_a^b \frac{|f^{[s]}(x) - f^{[s]}(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}} dxdy \right)^{1/p} < +\infty,$$

де $[s]$ є ціла, а $\{s\}$ є дробова частини числа s. Тут, нагадаємо, $\|\cdot\|_{[s],p}$ — норма у просторі Соболєва $W_p^{[s]}$. Ліва частина цієї нерівності задає норму $\|f\|_{s,p}$ у просторі W_p^s.

18. $(W_p^s)^m := W_p^s([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(W_p^s)^{m\times m} := W_p^s([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх комплекснозначних вектор-функцій $f : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$, елементи яких належать простору Слободецького W_p^s.

19. $\mathcal{L}[E_1, E_2]$ — простір усіх лінійних неперервних операторів, які діють із лінійного нормованого простору E_1 в лінійний нормований простір E_2.

20. $\mathcal{L}[E]$ — алгебра усіх лінійних неперервних операторів на лінійному нормованому просторі E.

21. $B_n \rightrightarrows B$ позначає рівномірну збіжність лінійних обмежених операторів.

22. $B_n \xrightarrow{s} B$ позначає сильну збіжність лінійних обмежених операторів.

У роботі вектор-функції і числові вектори подано у вигляді стовпців.

ВСТУП

Дисертація присвячена дослідженню розв'язності та розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, залежних за параметром, з найбільш загальними неоднорідними крайовими умовами у просторах Соболєва-Слободецького.

Актуальність теми. Питання, які пов'язані з граничним переходом щодо задач Коші та загальних крайових задач досліджувалися багатьма математиками. А саме, у роботах І. І. Гіхмана [11], М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [26], Я. Курцвейля і З. Ворела [27], А. М. Самойленка [52, 53, 103] було встановлено фундаментальні результати про неперервну залежність за параметром розв'язків задач Коші для нелінійних систем. Для лінійних систем ці результати уточнювалися та доповнювалися А. Ю. Лєвіним [28, 29], З. Опялем [101], В. Т. Рейдом [102] і Нгуен Тхе Хоаном [46].

Широкий клас лінійних загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку було введено і досліджено І. Т. Кігурадзе [18, 19, 20] і М. Ашордіа [66]. Розв'язки цих задач є абсолютно неперервними функціями на відрізку $[a, b]$, а крайові умови задані у найбільш загальному вигляді $By = q$, де $B\colon C\big([a, b], \mathbb{R}^m\big) \to \mathbb{R}^m$ є довільним лінійним неперервним оператором (m — число рівнянь системи). Було встановлено достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C\big([a, b], \mathbb{R}^m\big)$.

В. А. Михайлецем і його учнями було введено і досліджено максимально широкі класи найбільш загальних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь щодо різних функціональних просторів, зокрема щодо просторів Соболєва довільного натурального порядку [36, 74, 90], про-

сторів n разів неперервно диференційовних функцій [43, 44, 104], просторів Гельдера [93, 94, 99], просторів Соболєва-Слободецького [13, 75, 95].

Було встановлено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у відповідних банахових просторах.

Для найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку достатні умови неперервної залежності за параметром їх розв'язків у просторі Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, встановлено Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлецем [21]. Конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку у просторі Соболєва W_p^n, де $1 \leq p < \infty$, встановлено Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [86].

Ці результати знайшли застосування до дослідження багатоточкових крайових задач [12, 14, 22, 23, 56, 57, 62], матриць Гріна [25, 63, 89, 98] та використано у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами [77, 78, 79, 80].

Але у деяких задачах теоррії диференціальних рівнянь виникають оператори зі скінченним, але ненульовим індексом та крайові задачі у дробових просторах Соболєва.

Отже, з огляду на сказане, актуальним є дослідження крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку щодо просторів Соболєва-Слободецького W_p^s, де $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ з найбільш загальними неоднорідними крайовими умовами.

Зокрема, цікавим є питання про характер розв'язності, необхідні і достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків цих задач. Необхідно зазначити, що найбільш загальні задачі можуть містити в крайових умовах похідні цілого та/чи дробового порядку більшого за порядок рівняння і тому

мають істотні особливості, які відсутні у класичних задачах (Коші, дво- та багатоточкових, інтегральних та мішаних задачах). Зважаючи на це, систематичне вивчення їх властивостей представляє науковий інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені ігоря Сікорського" згідно із загальним планом роботи у рамках науково-дослідницької теми "Застосування стохастичних, статистичних та функціональних методів для аналізу асимптотичної поведінки випадкових полів" (номер державної реєстрації 0118U003614).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є аналіз характеру розв'язності, встановлення конструктивних необхідних і достатніх умов коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку щодо просторів Соболєва-Слободецького.

Об'єктом дослідження є одновимірні фредгольмові крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Соболєва-Слободецького.

Предметом дослідження є характер залежності за параметром розв'язків крайових задач, найбільш загальних у просторах Соболєва-Слободецького.

Завдання дослідження:

1. Знайти характер розв'язності крайових задач для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з найбільш загальними крайовими умовами, розв'язки яких належать простору Соболєва-Слободецького $(W_p^s)^m$, де $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.

2. Показати, що крайовим задачам для системи диференціальних рівнянь першого порядку відповідає фредгольмів оператор з індексом $m - r$ на парі нормованих просторів $(W_p^s)^m$ і $(W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r$ та встановити критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Довести, що вимірності ядра та коядра оператора неоднорідної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку дорівнюють відповідно вимірності ядра та коядра характеристичної матриці цієї крайової задачі.

4. Знайти конструктивні достатні умови збіжності характеристичних матриць послідовності неоднорідних крайових задач.

5. Для крайових задач для системи диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$, встановити конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^s)^m$ та показати, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва-Слободецького.

6. Ввести та дослідити найбільш загальний клас багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать простору Соболєва-Слободецького $(W_p^s)^m$. Встановити достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^s)^m$ у випадку $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи теорії звичайних диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у наступному:

1. Знайдено характер розв'язності крайових задач для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з найбільш загальними крайовими умовами, розв'язки яких належать простору Соболєва-Слободецького $(W_p^s)^m$, де $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.

2. Показано, що крайовим задачам для системи диференціальних рівнянь першого порядку відповідає фредгольмів оператор з індексом $m - r$ на парі нормованих просторів $(W_p^s)^m$ і $(W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r$ та встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.

3. Доведено, що вимірності ядра та коядра оператора крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку дорівнюють відповідно вимірності ядра та коядра введеної в роботі числові характеристичної матриці цієї крайової задачі.

4. Знайдено конструктивні достатні умови збіжності характеристичних матриць послідовності неоднорідних крайових задач.

5. Для крайових задач для системи диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^s)^m$ та показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва-Слободецького.

6. Введено та досліджено найбільш загальний клас багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать простору Соболєва-

Слободецького $(W_p^s)^m$. Встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^s)^m$ у випадку $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.

Результати дисертації є завершеними.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальшому розвитку теорії одновимірних фредгольмових крайових задач.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дисертації та постановка задач належать науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Основні наукові результати, які винесено на захист, отримано здобувачкою самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включено лише ті результати, що належать дисертантці.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародній науково-практичній конференції "Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз", 15 – 16 квітня, 2020 року, м. Київ, Україна.

- X Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків, 16 – 17 квітня, 2021, м. Київ, Україна.

- Міжнародній конференції молодих математиків, 3 – 5 червня, 2021, м. Київ, Україна.

- Міжнародному семінарі з Питань якісної теорії диференціальних рівнянь "QUALITDE – 2021", 18 – 20 грудня, 2021 року, м. Тбілісі, Грузія.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 6 наукових працях. Три із них [96, 42, 41] є статтям у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, одна з яких [41] входить до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та Web of Science Core Collection. Роботи [38, 39, 40, 97] опубліковано у матеріалах міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів основної частини, висновків і списку використаних джерел, що налічує 90 найменувань, і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи складає 116 сторінок друкованого тексту.

Подяки. Щиру подяку авторка висловлює своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Володимиру Андрійовичу Михайлецю за постановку задач, цінні зауваження та поради у процесі роботи над дисертацією.

Основний зміст дисертації. У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і сформульовано задачі дослідження, а також висвітлено наукову новизну отриманих результатів. Наведено відомості про апробацію роботи та публікації.

У *першому* розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за її темою.

Другий розділ присвячений дослідженню найбільш загальних крайових задачач та найбільш загальних багатоточкових крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробі-

гають простір Соболєва-Слободецького $(W_p^s)^m$, де $s \in (1,\infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$. Показано, що досліджуваним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом $m - r$ на парі нормованих просторів $(W_p^s)^m$ і $(W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r$. Доведено критерій однозначної розв'язності досліджуваних крайових задач у цих просторах. Встановлено, що вимірності ядра і коядра оператора крайової задачі дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці крайової задачі. Та показано застосування до послідовності характеристичних матриць та послідовності лінійних неперервних операторів.

Нехай задано скінченний інтервал (a,b) дійсної осі, дійсне число $p \in [1,\infty)$, натуральне число m і дробове число $s \in (1,\infty) \setminus \mathbb{N}$. Тоді $s = [s] + \{s\}$, де $[s]$ — ціла частина числа s, а $\{s\}$ — його дробова частина.

Розглядається лінійна крайова задача для систем m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$(Ly)(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$By = c. \tag{2}$$

Тут довільно задано матрицю-функцію $A(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot) \in (W_p^{s-1})^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^r$ і лінійний неперервний оператор

$$B\colon\ (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r, \tag{3}$$

а шуканою є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^s)^m$.

Коли права частина $f(\cdot)$ пробігає простір $(W_p^{s-1})^m$, то розв'язки рівняння (1) заповнюють весь простір $(W_p^s)^m$. Тому умова (2) з оператором (3) є найбільш загальною. Вона охоплює: задачі Коші, дво- і багатоточкові, інтегральні та мішані задачі, і ряд некласичних задач. Останні можуть містити похідні цілого і/чи дробового порядку більшого, ніж порядок рівняння.

Запишемо задачу (1), (2) у вигляді лінійного операторного рівняння $(L,B)y = (f,c)$, де (L,B) — лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L, B)\colon (W_p^{s+1})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^r. \tag{4}$$

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T\colon X \to Y$, де X і Y — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ скінченновимірні. Якщо оператор T є фредгольмовим, то його область значень $T(X)$ замкнена в Y, а індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(Y/T(X)) \in \mathbb{Z}$$

є скінченним.

Теорема 2.2. *Лінійний оператор* (4) *є обмеженим і фредгольмовим з індексом* $m - r$.

Теорема 2.2 допускає уточнення щодо значень вимірностей ядра та коядра.

Позначимо через $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ єдиний розв'язок матричної задачі

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \quad Y(a) = I_m, \tag{5}$$

де O_m — нульова, а I_m — одинична $(m \times m)$ — матриці.

Означення 2.1. *Прямокутна числова матриця*

$$M(L, B) \in \mathbb{C}^{m\times r}$$

є характеристичною для крайової задачі (1), (2), *якщо її* j*-й стовпчик є результатом дії оператора* B *на* j*-й стовпчик матриці-функції* $Y(\cdot)$.

Тут m є число диференціальних рівнянь системи (1), а r — число крайових умов.

Теорема 2.3. *Вимірності ядра і коядра оператора* (4) *дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці*

$$\dim\ker(L, B) = \dim\ker\big(M(L, B)\big),$$

$$\dim\operatorname{coker}(L, B) = \dim\operatorname{coker}\big(M(L, B)\big).$$

Із теореми 2.3 випливає критерій оборотності оператора (L, B), тобто умови, за якої неоднорідна крайова задача (2.1), (2.2) має єдиний розв'язок і він неперервно залежить від правих частин диференціального рівняння та крайової умови.

Наслідок 2.4. *Оператор (L, B) є оборотним тоді і тільки тоді, коли $r = m$ і квадратна матриця $M(L, B)$ є невиродженою.*

У випадку $1 \leqslant p < \infty$ для систем ЗДР порядку $n \in \mathbb{N}$ критерій доведений Гнип, Кодлюк і Михайлецем [12].

Наведемо деякі застосування цих результатів.

Розглядається поряд із задачею (1), (2) послідовність неоднорідних крайових задач

$$L(k)y(t,k) := y'(t,k) + A(t,k)y(t,k) = f(t,k), \quad t \in (a,b), \tag{6}$$

$$B(k)y(\cdot,k) = c(k), k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

Тут матриці-функції $A(\cdot,k)$, вектор-функції $f(\cdot,k)$, вектор $c(k)$ і лінійні неперервні оператори $B(k)$ задовольняють наведеним вище умовам для задачі (1), (2).

Пов'яжемо з крайовими задачами (6), (7) послідовність лінійних неперервних операторів $(L(k), B(k)) \colon (W_p^{s+1})^m \to (W_p^{s+1})^m \times \mathbb{C}^r$, та послідовність характеристичних матриць $M(L(k), B(k)) := [B(k)Y(\cdot,k)] \in \mathbb{C}^{m\times r}$залежних від параметра $k \in \mathbb{N}$. Сформулюємо достатню умову збіжності характеристичних матриць $M(L(k), B(k))$ до матриці $M(L, B)$.

Теорема 2.5. *Якщо послідовність операторів $(L(k), B(k))$ сильно збігається до оператора (L, B) при $k \to \infty$, то послідовність характеристичних матриць $M(L(k), B(k))$ збігається до матриці $M(L, B)$.*

Наслідок 2.6. *В умовах теореми 2.5 починаючи з достатньо великих k справджуються нерівності*

$$\dim\ker(L(k),B(k)) \le \dim\ker\big(M(L(k),B(k))\big),$$
$$\dim\operatorname{coker}(L(k),B(k)) \le \dim\operatorname{coker}\big(M(L(k),B(k))\big).$$

Зокрема

а) якщо $r=m$ і оператор (L,B) є оборотним, то оператори $(L(k),B(k))$ також є оборотними для великих k;

б) якщо крайова задача (1), (2) при будь-яких значеннях правих частин має розв'язок, то крайові задачі (6), (7) також мають розв'язок для великих k;

в) якщо існує не більш як один розв'язок деякої крайової задачі (1), (1), то задачі (6), (7) не можуть мати різні розв'язки для кожного досить великого k.

У *третьому* розділі для найбільш загальних крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \ge 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^s)^m$. Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва-Слободецького. Встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкової крайової задачі при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^s)^m$ у випадку $s \in (1,\infty)\setminus\mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$.

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$. Розглядається лінійна крайова задача, залежна від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) := y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{8}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{9}$$

Тут довільно задано матрицю-функцію $A(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot) \in (W_p^{s-1})^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon)\colon\ (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^m. \tag{10}$$

Згідно з теоремою 2.2 задача (8), (9) є фредгольмовою з нульовим індексом.

Вводяться аналогічно до випадку просторів Соболєва цілого порядку

Означення 3.1. *Розв'язок крайової задачі* (8), (9) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$, *якщо виконуються умови:*

(∗) *існує таке додатне число* $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, *що для кожного* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, *довільних правих частин* $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{s-1})^m$ *і* $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot;\varepsilon)$, *який належить простору* $(W_p^s)^m$;

(∗∗) *зі збіжності правих частин* $f(\cdot;\varepsilon) \to f(\cdot;0)$ *в* $(W_p^{s-1})^m$ *і* $c(\varepsilon) \to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^m$ *випливає збіжність розв'язків*

$$y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0) \quad y \quad (W_p^s)^m \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Встановимо критерій неперервності розв'язку $y = y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (8), (9) за параметром ε при $\varepsilon \to 0+$.

Введемо такі умови:

(0) гранична однорідна крайова задача

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad t \in (a,b), \quad B(0)y(\cdot,0) = 0 \tag{11}$$

має лише тривіальний розв'язок;

(I) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ в $(W_p^s)^{m\times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного значення $y \in (W_p^{s+1})^m$.

Умова (0) означає, що крайова задача (8), (9) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок.

Границі в умовах (I), (II) розглядаємо при $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 3.2. *Розв'язок крайової задачі* (8), (9) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I), (II).

У випадку цілого s критерій доведено Є. В. Гнип, В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем [15].

Попередній наш результат доповнює двобічна оцінка швидкості збіжності розв'язків. Розглянемо такі величини:

$$\left\| y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon) \right\|_{s,p}, \tag{12}$$

$$\widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon) := \left\| L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon) \right\|_{s-1,p} + \left\| B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}^m}, \tag{13}$$

де (12) є похибкою, а (13) — нев'язкою розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (8), (9), якщо $y(\cdot;\varepsilon)$ розглядати як її точний розв'язок, а $y(\cdot;0)$ — як наближений.

Теорема 3.3. *Нехай крайова задача* (8), (9) *задовольняє умови* (0), (I) *і* (II). *Тоді існують такі додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *має місце двобічна оцінка*

$$\gamma_1 \, \widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon) \le \left\| y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon) \right\|_{s,p} \le \gamma_2 \, \widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon), \tag{14}$$

де числа ε_2, γ_1 *і* γ_2 *не залежать від* $y(\cdot;\varepsilon)$ *і* $y(\cdot;0)$.

Згідно з цією теоремою похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (8), (9) мають однаковий порядок малості.

Застосуємо наші результати до багатоточкових крайових задач.

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$ пов'яжемо з системою (8) багатоточкову фредгольмову крайову задачу

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\sum_{l=0}^{s}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = q(\varepsilon), \tag{15}$$

де числа $\{r, \omega_j(\varepsilon)\} \subset \mathbb{N}$, вектори $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ і точки $\{t_j, t_{j,k}(\varepsilon)\} \subset [a,b]$ довільно задано.

Не припускається, що коефіцієнти $A(\cdot,\varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають певну регулярність (наприклад, неперервність чи вимірність) за параметром ε при $\varepsilon > 0$. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $j \in \{1,\ldots,r\}$ всі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, проте для точок нульової серії $t_{0,k}(\varepsilon)$ такої вимоги немає.

Згідно з означенням 3.1, розв'язок $y = y(\cdot,\varepsilon)$ багатоточкової крайової задачі (8), (15) неперервний за параметром ε, якщо він існує, є єдиним і задовольняє граничне співвідношення

$$\left\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\right\|_{s,p} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{16}$$

Для того, щоб сформулювати граничну теорему, ввведемо наступні

Припущення при $\varepsilon \to 0+$:

(α) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для всіх $j \in \{1,\ldots,r\}$ та $k \in \{1,\ldots,\omega_j(\varepsilon)\}$;

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для всіх $j \in \{1,\ldots,r\}$ та $l \in \{0,\ldots,s\}$;

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \to 0$ для всіх $k \in \{1,\ldots,\omega_0(\varepsilon)\}$ та $l \in \{0,\ldots,s\}$.

В умові (δ) вираз $\|\cdot\|$ є нормою комплексної числової матриці. Припущення (β) допускає, що норми коефіцієнтів $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ можуть необмежено зростати при $\varepsilon \to 0+$, але не надто швидко. З умови (δ) випливає, що не потрібно вимагати збіжність точок $t_{0,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ на відміну від умови (α).

Введемо додаткові

Припущення при $\varepsilon \to 0+$:

(γ_p) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(s)}(\varepsilon)\right\| \left|t_{j,k}(\varepsilon) - t_j\right|^{1/p'} = O(1)$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$ і $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$, де $1/p + 1/p' = 1$;

(γ') $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left|t_{j,k}(\varepsilon) - t_j\right| \to 0$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$, $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$ і $l \in \{0, \ldots, s-1\}$.

Сформулюємо достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкових крайових задач.

Теорема 3.4. *Нехай крайова задача* (8), (15)

Якщо, крім того, виконані умови (0) і (I), то для достатньо малих ε її розв'язок існує, єдиний і задовольняє граничне співвідношення (16).*при* $1 \leq p < \infty$ *задовольняє припущення* (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ). *Тоді вона задовольняє граничну умову* (II).

Якщо, крім того, виконані умови (0) *і* (I), *то для достатньо малих* ε *її розв'язок існує, єдиний і задовольняє граничне співвідношення* (16).

Зауваження. Системи умов (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ) не гарантують рівномірну збіжність неперервних операторів $B(\varepsilon)$ до $B(0)$ при $\varepsilon \to 0+$. Тому теореми 3.3, 3.4 не випливають із відомих фактів теорії лінійних операторів.

У роботах Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [22], [23] було досліджено багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в просторах Соболєва W_p^n, *де* $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, *але точки відрізка* $[a, b]$, *які фігурували у крайовій умові, були фіксованими і не залежали від параметра.*

У роботі Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [12] було досліджено некласичні багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку в просторах Соболєва W_p^n, *де* $1 \leq p < \infty$, *проте в цій роботі кількість точок у кожній серії була сталою і не залежала від пара-*

метру. Випадок просторів Соболева-Слободецького для таких задач раніше не вивчався.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Як зазначалося у вступі, об'єктом дисертаційного дослідження є одновимірні фредгольмові крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Соболєва-Слободецького, а предметом дослідження є характер розв'язності та залежність за параметром розв'язків крайових задач, найбільш загальних щодо просторів Соболєва-Слободецького. Цим питанням присвячено перший розділ дисертації.

1.1. Задача Коші

Питання, які пов'язані з граничним переходом у системах диференціальних рівнянь, виникають у багатьох задачах. Ці питання найкраще досліджено стосовно задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Й. І. Гіхман [11], а потім М. А. Красносельский та С. Г. Крейн [26], отримали фундаментальні результати про характер залежності за параметром розв'язків задачі Коші для нелінійних диференціальних систем, праві частини яких неперервні в інтегральному сенсі. Важливість таких теорем, зокрема, пов'язана з тим, що вони обґрунтовують відомий принцип усереднення М. М. Боголюбова та М. М. Крилова (див., наприклад, [10]).

Задачі Коші, для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, досліджували А. Ю. Левін [29, 30], Я. Курцвейль і З. Ворел [27], З. Опяль [101], У. Т. Рейд [102], Нгуен Тхе Хоан [46].

В 1962 році А. М. Самойленко [52, 53] доповнив існуючі результати Й. І. Гіхмана [11], М. А. Красносельского і С. Г. Крейна [26], Я. Курцвейля і З. Вореля [27, 91, 92]. Підхід запропонований А. М. Самойленком дозво-

ляє з'ясовувати питання про характер залежності розв'язків диференціальних рівнянь за параметром, відносно якого праві частини неперервні в інтегральному сенсі. Для цього достатньо перейти від диференціального рівняння до деякого, еквівалентного йому, інтегрального і досліджувати безпосередньо останнє.

Прикладом дослідження неперервної залежності від параметра розв'язків задачі Коші для лінійних систем диференціальних рівнянь високих порядків для комплекснозначних функцій можна навести роботу В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [35].

Для лінійної матричної задачі Коші вигляду

$$Y'(t;k) = A(t;k)Y(t;k) + F(t;k), \quad t \in [a,b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$Y(a;k) = I_m,$$

найпростішою і досить грубою умовою на коефіцієнти $A(t;k) \in (C)^{m\times m}$ та праві частини $F(t;k) \in (C)^{m\times m}$, яка забезпечує рівномірну збіжність на відрізку $[a,b]$ розв'язків $Y(t;k)$ до $Y(t;0)$, є рівномірна на $[a,b]$ збіжність матриць-функцій $A(t;k)$, $F(t;k)$ до $A(t;0)$ і $F(t;0)$ відповідно (див., наприклад, [81, 84]).

В загальнішому випадку елементи матриць-функцій $A(t;k)$ та $F(t;k)$ належать банаховому простору $(L_1)^{m\times m}$, а $A(t;k)$ та $F(t;k)$ збігаються в цьому просторі до матриць $A(t;0)$ і $F(t;0)$ відповідно, рівномірна збіжність розв'язків $Y(t;k)$ до $Y(t;0)$ на $[a,b]$ є прямим наслідком результату, встановленого ще в 1930 році Я. Д. Тамаркіним [105].

Більш тонкі достатні умови для виконання співвідношення

$$\left\|Y(t;k) - Y(t;0)\right\|_\infty \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.1}$$

у застосуванні до лінійного випадку є в результатах робіт М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [26].

Нехай

$$A^{\vee}(t;k) = \int_a^t A(s;k)ds, \quad F^{\vee}(t;k) = \int_a^t F(s;k)ds.$$

Ці достатні умови полягають у виконанні наступних збіжностей при $k \to \infty$*:*

$$\left\|A^{\vee}(t;k) - A^{\vee}(t;0)\right\|_{\infty} \to 0, \quad \left\|F^{\vee}(t;k) - F^{\vee}(t;0)\right\|_{\infty} \to 0, \tag{1.2}$$

та в існуванні сумовної мажоранти

$$\left|A(t;k)\right| \leq h(t) \in L_1, \quad t \in [a,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

А. Ю. Левін [29] удосконалив доведення, що дозволило послабити останню нерівність до такої:

$$\|A(t;k)\|_1 \leq c < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Крім цього, виявилося, що при виконанні (1.3)*, умова* (1.2) *є не лише достатньою, але й* необхідною *для збіжності* (1.1)*.*

В. Т. Рейд [102] встановив, що для виконання граничного співвідношення (1.1) *достатньо, щоб при* $k \to \infty$ *коефіцієнти* $R(t;k) = [A(t;k) - A(t;0)] \in (C)^{m\times m}$ *слабко збігалися в просторі* L_1 *до нуля.*

Якщо відкинути обмеження (1.3)*, то проблема стає суттєво складнішою. Хоча в деяких випадках, наприклад, для скалярного рівняння першого порядку, співвідношення* (1.3)*, очевидно, зайве. Але в цілому це не так, адже умова* (1.2) *сама по собі не є ні необхідною, ані достатньою для збіжності* (1.1)*.*

1.2. Загальні та багатоточкові крайові задачі

Загальні крайові задачі є класичним об'єктом досліджень теорії звичайних диференціальних рівнянь. У роботі І. Т. Кігурадзе [18] були отримані достатні умови рівномірної збіжності розв'язків сім'ї загальних лінійних крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з дійсними коефіцієнтами:

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1.4}$$

$$U(\varepsilon)y(t;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{1.5}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^m$, вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$, а лінійні неперервні оператори

$$U(\varepsilon)\colon C\big([a,b];\mathbb{R}^m\big) \to \mathbb{R}^m.$$

Теорема 1.1. *Нехай однорідна гранична крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \quad U(0)y(t;0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок і при $\varepsilon \to \infty$ виконуються умови:

1) $\sup\limits_{\varepsilon} \big\|A(\cdot;\varepsilon)\big\|_1 < \infty$;
2) $\sup\limits_{\varepsilon} \big\|U(\varepsilon)\big\| < \infty$;
3) $\max\limits_{t\in[a,b]} \big|\int\limits_a^t A(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t A(s;0)ds\big| \to 0$;
4) $\max\limits_{t\in[a,b]} \big|\int\limits_a^t f(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t f(s;0)ds\big| \to 0$;
5) $c_\varepsilon \to c(0)$;
6) $U(\varepsilon)y \to U(0)y, \quad \forall y \in (W_1^1)^m$.

Тоді, починаючи з деякого ε_0, задачі (1.4), (1.5) мають єдиний розв'язок і

$$\big\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to \infty.$$

Всі умови в теоремі є суттєвими. Умови 2) та 6) означають, що оператори $U(\varepsilon)$ сильно *збігаються до оператора* $U(0)$. *Тому в умові 6) множину* AC^m *можна замінити довільною підмножиною вектор-функцій, лінійна оболонка яких щільна в банаховому просторі* $C\big([a,b];\mathbb{R}^m\big)$. *Зі скінченовимірності простору* $\mathbb{R}^m$ *випливає, що дана умова рівносильна тому, що оператори* $U(\varepsilon)$ слабко *збігаються до оператора* $U(0)$. *Вона суттєво слабша, ніж умова рівномірної збіжності операторів:*

$$\big\|U(\varepsilon)-U(0)\big\|\to 0.$$

Можна показати, що для виконання умов 1), 4) і 2), 5) достатньо, щоб $A(\cdot;\varepsilon)$ слабко *збігалась в банаховому просторі* $(L_1)^{m\times m}$ *до матриці-функції* $A(\cdot;0)$, *а* $f(\cdot;\varepsilon)$ слабко *збігалась у банаховому просторі* $(L_1)^m$ *до вектор-функції* $f(\cdot;0)$. *Тим більше для цього достатньо збіжності в нормах відповідних просторів. Зазначимо, що з цих умов* не *випливає збіжність за мірою Лебега і тим більше поточкова збіжність майже скрізь на відрізку* $[a,b]$.

У роботах [37, 89] Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлець та Н. В. Рева узагальнили теорему І. Т. Кігурадзе та покращили його результати. А саме істотно послабити умови теореми Кігурадзе не лише на ростки відображень $A(\cdot;\varepsilon)$, *а й на* $f(\cdot;\varepsilon)$ *в точці* $\varepsilon=0$.

У роботах [19, 35, 37, 66] було знайдено достатні умови неперервної залежності від параметра ε *при* $\varepsilon\to 0+$ *розв'язків загальних крайових задач для систем рівнянь першого порядку за рівномірною нормою* $\|\cdot\|_\infty$.

Окремим випадком загальних крайових задач є багатоточкові задачі. Їх особливістю є те, що проміжні точки, які входять у крайові умови, породжують ряд проблем таких, як порушення гладкості функції Гріна, відсутність спряженої задачі та інше.

Питанню існування та єдиності і побудови наближених методів знаходження розв'язків багатоточкових крайових задач присвячено багато робіт таких відомих математиків, як І. Т. Кігурадзе [20], В. Д. Пономарьов [50], А. М. Самойленко [52, 54], Дж. Сансоне [55], К. А. Хасеінов [59, 60, 61], L. K. Jackson [83], А. Ю. Левін [28, 31], Ю. В. Покорний [47, 48, 49], Є. С. Чічкін [65], P. R. Beesack [71], L. J. Grimm і P. W. Eloe [82] та інші.

Теореми про існування та єдиність і неперервність за параметром розв'язків загальних і найбільш загальних крайових задач та методика їх доведень були застосовані до дослідження багатоточкових крайових задач у роботах Н. В. Реви [51], Т. І. Кодлюк [22, 24], Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [23], Г. О. Чеханової [62], Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [12], В. О. Солдатова [57], В. О. Солдатова і Г. О. Маслюк [34], Г. О. Маслюк [33].

У своїй роботі [51] Н. В. Рева розглянула параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *сім'ю багатоточкових крайових задач для системи* $m \in \mathbb{N}$ *диференціальних рівнянь першого порядку:*

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \tag{1.6}$$

$$U(\varepsilon)y(t;\varepsilon) := \sum_{j=1}^{n} B_j(\varepsilon)y(t_j;\varepsilon) = 0, \tag{1.7}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^{m\times m}$, *вектор-функції* $f(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^m$, *матриці* $B_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $t_j \in [a,b]$, $j \in J := \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

У роботі Н. В. Реви [51] встановлена

Теорема 1.2. *Нехай гранична однорідна крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0),$$

$$U(0)y(t;0) := \sum_{j=1}^{n} B_j(0)y(t_j;0) = 0,$$

має лише тривіальний розв'язок і виконуються умови:

1) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) = R(\cdot;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\big\|f(\cdot;\varepsilon)\big\|_1 = O(1)$;

3) $\big\|f^\vee(\cdot;\varepsilon) - f^\vee(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+$;

4) $\forall j \in J\colon \quad B_j(\varepsilon) \longrightarrow B_j(0), \quad \varepsilon \to 0+$.

Тоді для достатньо малих значень ε розв'язки $y(\cdot;\varepsilon)$ задачі (1.6), (1.7) *визначені однозначно і задовольняють граничне співвідношення*

$$\big\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тут $\mathcal{M}^m := \mathcal{M}^m[a,b]$, $m \in \mathbb{N}$ — клас всіх $m \times m$ комплекснозначних сумовних на $[a,b]$ матриць-функцій $R(\cdot;\varepsilon)\colon [0,\varepsilon_0] \to (L_1)^{m\times m}$, для яких нормований розв'язок $Z(\cdot;\varepsilon)$ системи

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \quad Z(a;\varepsilon) \equiv I_m$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \big\|Z(t;\varepsilon) - I_m\big\|_{(0)} = 0.$$

Випадок, коли коефіцієнти $A(\cdot)$ належать більш вузькому простору, а саме простору Соболєва $W_p^{n-1}\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big)$, де $1 \le p < \infty$, досліджено в роботах [22, 23] Т. І. Кодлюк.

У роботі [24] розглянута параметризована числом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ сім'я багатоточкових крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку наступного вигляду:

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)y(t_j;\varepsilon) = c_\varepsilon, \tag{1.9}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$, матриці $B_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, вектори $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$, $t, t_j \in [a,b]$, $j = \{1,2,...,k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

У цій роботі встановлена

Теорема 1.3. *Нехай гранична однорідна крайова задача вигляду* (1.8), (1.9) *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови:*

1) $\left\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\right\|_{n-1,p} \to 0;$

2) $\left\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\right\|_{n-1,p} \to 0;$

3) $c_\varepsilon \to c_0;$

4) $\left\|B_j(\varepsilon) \to B_j(0)\right\|, \quad j = \{1, 2, ..., k\}.$

Тоді для достатньо малих значень ε *розв'язки* $y(\cdot;\varepsilon)$ *задачі* (1.8), (1.9) *визначені однозначно і задовольняють граничне співвідношення*

$$\left\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\right\|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

У роботі Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [23] було досліджено багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в просторах Соболєва W_p^n, *де* $1 \le p < \infty$, *але точки відрізка* $[a, b]$, *які фігурують у крайовій умові, є фіксованими і не залежать від параметра. У роботі Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [12] також досліджено некласичні багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь у просторах Соболєва* W_p^n, *де* $1 \le p < \infty$, *проте в цій роботі кількість точок у кожній серії не залежить від параметра.*

Також у роботі [1] А. М. Атласюк було досліджено найбільш загальний клас багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^n)^m$, *де* $1 \le p \le \infty$ *та встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків при* $\varepsilon = 0$ *у нормованому просторі* $(W_p^n)^m$ *у випадку* $p = \infty$ *та у випадку* $1 \le p < \infty$.

Отже, залишається актуальним питання дослідження найбільш загального класу багатоточкових лінійних крайових задач для систем зви-

чайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва-Слободецького $W_p^{s-1}\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big)$, *де* $1 \le p < \infty$. *Ми розглянемо випадок, коли точки відрізка* $[a,b]$, *які фігурують у крайових умовах, не є фіксованими та залежать від числового параметра, а також кількість точок у кожній серії може залежати від параметра.*

1.3. Крайові задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку

Н. В. Ревою у дисертаційній роботі [51] було розглянуто найбільш загальні щодо простору W_1^1 крайові задачі, що містять у собі загальні крайові задачі, та досліджено неперервність за параметром розв'язків таких задач за нормою простору Соболєва W_1^1 на відрізку $[a,b]$. Розглянуто параметризовану числом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ сім'ю неоднорідних найбільш загальних щодо простору W_1^1 крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1.10}$$

$$\alpha_\varepsilon y(a;\varepsilon) + \int_a^b \Phi(t;\varepsilon)y'(t;\varepsilon)dt = c(\varepsilon), \tag{1.11}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^{m\times m}$, $\Phi(\cdot;\varepsilon) \in (L_\infty)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (L_1)^m$, матриці $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$.

У випадку, коли матриці-функції $\Phi(\cdot;\varepsilon)$ мають обмежену варіацію по t на $[a,b]$, умова (1.11) еквівалентна загальній крайовій.

Під розв'язком найбільш загальної щодо простору W_1^1 крайової задачі розуміється вектор-функція $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_1^1)^m$, яка задовольняє диференціальне рівняння (1.10) майже скрізь на відрізку $[a,b]$ та крайову умову (1.11).

Теорема 1.4. *Нехай однорідна гранична крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0) + f(t;0), \quad \alpha_0 y(a;0) + \int_a^b \Phi(t;0)y'(t;0)dt = c_0,$$

має лише тривіальний розв'язок і при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови:

1) $\left\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\right\|_1 \to 0+$;

2) $\left\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\right\|_1 \to 0+$;

3) $c_\varepsilon \to c(0)$;

4) $\alpha_\varepsilon \to \alpha_0$;

5) $\big\|\Phi(\cdot;\varepsilon) - \Phi(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0+$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *задача* (1.10), (1.11) *має єдиний розв'язок та виконується збіжність*

$$\big\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\big\|_{1,1} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Неперервну залежність за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач у нормах просторів Соболєва W_p^n, *де* $1 \le p < \infty$, *досліджено у роботі [24] Т. І. Кодлюк.*

У роботі [24] розглянуто параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *сім'ю неоднорідних найбільш загальних щодо простору* W_p^n *крайових задач для системи* $m \in \mathbb{N}$ *диференціальних рівнянь першого порядку:*

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1.12}$$

$$U(\varepsilon)y(t;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{1.13}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, *вектор-функції* $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$, *вектори* $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, *а лінійні неперервні оператори*

$$U(\varepsilon)\colon W_p^n\big([a,b],\mathbb{C}^m\big) \to \mathbb{C}^m.$$

Під розв'язком найбільш загальної щодо простору W_p^n *крайової задачі розуміється вектор-функція* $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, *яка задовольняє диференціальне рівняння* (1.12) *майже скрізь на відрізку* $[a,b]$ *та крайову умову* (1.13).

Теорема 1.5. *Нехай однорідна гранична крайова задача вигляду* (1.12), (1.13) *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються умови:*

1) $\big\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\big\|_{n-1} \to 0+$;

2) $\big\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\big\|_{n-1} \to 0+$;

3) $c_\varepsilon \to c(0)$;

4) $U(\varepsilon)y \to U(0)y$ *для кожного* $y \in (W_p^n)^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *розв'язок задачі* (1.12), (1.13) *однозначно визначений та виконується збіжність*

$$\left\| y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0) \right\|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Найбільш загальні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку щодо просторів дробової гладкості досліджено в роботах [13, 75, 99] та щодо просторів неперервно диференційовних функцій у роботі [44].

У роботі [2] А. М. Атласюк для крайових задач для системи диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, *встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при* $\varepsilon = 0$ *у просторі* $(W_p^n)^m$ *та показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при* $\varepsilon \to 0+$ *у відповідних просторах Соболєва.*

Разом з тим, відкритим залишається питання неперервності за параметром $\varepsilon \to 0+$ *розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем рівнянь першого порядку у просторі Соболєва-Слободецького* $(W_p^s)^m$, *де* $1 \leq p < \infty$.

Питання фредгольмових крайових задач у просторах Соболєва було розглянуто у дисертаційній роботі А. М. Атласюк, а саме:

-досліджено характер розв'язності найбільш загальних крайових задач для системи m *звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва* $(W_p^n)^m$, *де* $1 \leq p \leq \infty$ *[2];*

-показано, що крайовим задачам для системи диференціальних рівнянь першого порядку відповідає фредгольмів оператор з індексом $m - l$ *на парі нормованих просторів* $(W_p^n)^m$ *і* $(W_p^{n-1})^m \times \mathbb{C}^l$ *та встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач [1];*

-доведено, що вимірності ядра та коядра оператора крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку дорівнюють відповідно вимірності ядра та коядра характеристичної матриці цієї крайової задачі [2].

Питання, зазначені вище, не розглядалися раніше та є актуальними для систем рівнянь першого порядку у просторі Соболєва-Слободецького.

Висновки до розділу 1

У першому розділі обговорено об'єкт дослідження — одновимірні фредгольмові крайові задачі, найбільш загальні щодо просторів Соболєва-Слободецького, а також предмет дослідження — характер залежності за параметром розв'язків крайових задач, найбільш загальних щодо просторів Соболєва-Слободецького. Із наведених відомостей можна зробити такі висновки:

1. *Недослідженим залишається питання неперервної залежності за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Соболєва-Слободецького* $(W_p^s)^m$, *де* $1 \leq p < \infty$.

2. *Актуально розглянути застосування теорем про неперервність за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач до некласичних багатоточкових крайових задач.*

3. *Недослідженим є також питання поширення отриманих результатів на систему диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Соболєва-Слободецького* $(W_p^s)^m$, *де* $1 \leq p < \infty$, *якій відповідає лінійний фредгольмів оператор із ненульовим індексом.*

РОЗДІЛ 2
РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

У цьому розділі досліджено найбільш широкий клас нетерових одновимірних крайових задач у просторах Соболєва-Слободецького. Крайові умови в них можуть містити похідні розв'язку цілого або дробового порядку. Встановлено, що кожній із таких крайових задач відповідає деяка прямокутна числова характеристична матриця, вимірності ядра і коядра якої збігаються відповідно з вимірностями ядра і коядра крайової задачі. Знайдені достатні умови збіжності послідовності характеристичних матриць, розглянутих крайових задач.

2.1. Постановка задачі

Нехай задано довільним чином скінченний інтервал (a, b) *дійсної осі, дійсне число* $p \in [1, \infty)$*, натуральне число* m *і дробове число* $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$*. Як звичайно, запишемо* $s = [s] + \{s\}$*, де* $[s]$ *— ціла частина числа* s*, а* $\{s\}$ *— його дробова частина.*

Позначимо через $W_p^n := W_p^n([a, b]; \mathbb{C})$ *комплексний простір Соболєва і покладемо* $W_p^0 := L_p$*. Аналогічно позначимо простори Соболєва вектор-функцій* $(W_p^n)^m := W_p^n([a, b]; \mathbb{C}^m)$ *і матриць-функцій* $(W_p^n)^{m\times m} := W_p^n([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$*, елементи яких належать функціональному простору* W_p^n*. Норми у цих просторах позначимо через* $\|\cdot\|_{n,p}$*; вони є сумами відповідних норм у* W_p^n *всіх елементів векторно- або матричнозначної функції. З контексту завжди зрозуміло, про норму в якому саме просторі (скалярних, вектор- чи матриць-функцій) йде мова. Якщо* $m = 1$*, то всі ці простори збігаються. Як відомо, простори* W_p^n *є банаховими і сепарабельними при* $p < \infty$*.*

Позначимо через $W_p^s := W_p^s([a,b];\mathbb{C})$, *де* $1 \le p < \infty$ *і неціле* $s > 1$, *простір Соболєва–Слободецького всіх комплекснозначних функцій, які належать простору Соболєва* $W_p^{[s]}$ *і задовольняють умову*

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_{[s],p} + \left(\int_a^b \int_a^b \frac{\left|f^{[s]}(x) - f^{[s]}(y)\right|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}} dxdy \right)^{1/p} < +\infty,$$

де $[s]$ *є ціла, а* $\{s\}$ *— дробова частина числа* s. *Тут, нагадаємо,* $\|\cdot\|_{[s],p}$ *— норма у просторі Соболєва* $W_p^{[s]}$. *Ця рівність задає норму* $\|f\|_{s,p}$ *на просторі* W_p^s.

Розглянемо на скінченному інтервалі (a,b) *лінійну крайову задачу для системи* m *диференціальних рівнянь першого порядку*

$$(Ly)(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{2.1}$$

$$By = c, \tag{2.2}$$

де матриця-функція $A(\cdot)$ *належить простору* $(W_p^{s-1})^{m\times m}$, *вектор-функція* $f(\cdot)$ *– простору* $(W_p^{s-1})^m$, *вектор* c *— простору* $\mathbb{C}^r$, *а* B *є лінійним неперервним оператором*

$$B\colon\ (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r.$$

Крайова умова (2.2) *задає* r *скалярних крайових умов для системи* m *диференціальних рівнянь першого порядку. Вектори і вектор-функції вважаємо записаними у вигляді стовпців. Під розв'язком крайової задачі* (2.1), (2.2) *розуміємо вектор-функцію* $y(\cdot) \in (W_p^s)^m$, *яка задовольняє рівняння* (2.1) *при* $s > 1 + 1/p$ *скрізь, а при* $s \le 1 + 1/p$ *майже скрізь на* (a,b), *та рівність* (2.2), *яка задає* r *скалярних крайових умов.*

Розв'язок рівняння (2.1) *заповнює простір* $(W_p^s)^m$, *якщо його права частина* $f(\cdot)$ *перебігає простір* $(W_p^{s-1})^m$. *Тому гранична умова* (2.2) *є найбільш загальною умовою для цього рівняння. Вона включає всі відомі типи класичних граничних умов (а саме задачу Коші, дво- та багатоточкові задачі,*

інтегральні та змішані задачі) та численні некласичні задачі. Останній клас задач може містити похідні цілого або дробового порядку β шуканої вектор-функції, де

$$0 \leq \beta < s - \frac{1}{p}.$$

Лема 2.1. *Нехай матриця-функція A належить $(W_p^{s-1})^{m\times m}$. Якщо диференційовна функція $y\colon [a,b] \to \mathbb{C}^m$ є розв'язком системи (2.1) для деякої правої частини $f \in (W_p^{s-1})^m$, то $y \in (W_p^s)^m$. Більше того, якщо f пробігає весь простір $(W_p^{s-1})^m$, то розв'язки рівняння (2.1) пробігають увесь простір $(W_p^s)^m$.*

Доведення. Нехай $f \in \left(W_p^{s-1}\right)^m$ диференційовна і y є розв'язком (2.1). Доведемо, що $y \in \left(W_p^s\right)^m$. Враховуючи, що A і f є неперервні на $[a,b]$, маємо

$$y' = f - Ay \in (\mathbb{C}([a,b]))^m \Rightarrow y \in \left(\mathbb{C}^{(1)}([a,b])\right)^m \subset (L_p([a,b]))^m .$$

Більше того, $y' \in \left(W_p^{s-1}\right)^m \Rightarrow y \in \left(W_p^s\right)^m$. $(*)$

Справді, якщо $y' \in \left(W_p^{s-1}\right)^m$, то $y' = f - Ay \in \left(W_p^{s-1}\right)^m$, і тому $y \in \left(W_p^s\right)^m$. Включення $y \in (L_p([a,b]))^m$ і властивість (*) зумовлюють, що $y \in \left(W_p^s\right)^m$.

Доведемо останнє твердження леми: $\forall f \in \left(W_p^{s-1}\right)^m$ існує розв'язок системи (2.1). Тоді $y \in \left(W_p^s\right)^m$. Враховуючи очевидну імплікацію, $y \in \left(W_p^s\right)^m \Rightarrow Ly \in \left(W_p^s\right)^m$, отримаємо останнє твердження леми.

Лему 2.1 доведено.

Позначимо через $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ єдиний ров'язок лінійного однорідного матричного рівняння з початковою умовою Коші:

$$\begin{cases} Y'(t) + A(t)\cdot Y(t) = 0, \quad t \in (a,b) \\ Y(a) = I_m \end{cases} \tag{2.3}$$

Покладемо

$$[BY] := \left(B \begin{pmatrix} y_{1,1}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,1}(\cdot) \end{pmatrix} \dots B \begin{pmatrix} y_{1,m}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,m}(\cdot) \end{pmatrix} \right). \tag{2.4}$$

Числова прямокутна матриця $[BY]$ *утворюється в результаті дії оператора* B *на відповідні стовпчики (з тими ж номерами) матрицанта* $Y(\cdot)$ *матричної задачі Коші* (3.3).

Означення 2.1. Будемо називати прямокутну числову матрицю

$$M(L, B) \in \mathbb{C}^{m \times r} \tag{2.5}$$

характеристичною для крайової задачі 2.1,2.2, якщо її j-й стовпчик є результатом дії оператора B на j-й стовпчик матрицанта $Y(\cdot)$.

2.2. Допоміжні результати

У даному підрозділі ми встановимо твердження допоміжного характеру, які будуть використані в доведенні основних теорем.

Лема 2.2. *Нехай матриця-функція* $Y(\cdot) \in \left(W_p^s\right)^{m\times m}$ *є невиродженою для кожного* $t \in [a,b]$. *Тоді обернена матриця-функція* $Y^{-1}(\cdot) \in \left(W_p^s\right)^{m\times m}$.

Доведення. Спочатку доведемо для $m = 1$. *Нехай* $Y^{-1}(\cdot) \in W_p^l$. *Тоді*

$$(Y^{-1})'(\cdot) = -Y'(\cdot)Y^{-2}(\cdot).$$

Отримаємо

$$(Y^{-1})^{(l)} = \left(Y^{-1})'\right)^{(l-1)} = \left(-Y'(\cdot)Y^{-2}(\cdot)\right)^{(l-1)}.$$

Функція Y *відокремлена від нуля і* $Y' \in W_p^{s-1} \Rightarrow Y'(\cdot)Y^{-2}(\cdot) \in W_p^{s-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b \frac{\left|\left(-Y'(u)Y^{-2}(u)\right)^{(l-1)} - \left(-Y'(v)Y^{-2}(v)\right)^{(l-1)}\right|}{|u-v|^{1+\sigma}} du \right) dv - \text{збігається} \Rightarrow$$

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b \frac{\left|\left(Y^{-1}(u)\right)^{(l)} - \left(Y^{-1}(v)\right)^{(l)}\right|}{|u-v|^{1+\sigma}} du \right) dv \tag{2.6}$$

–збігається. Так як, $Y^{-1}(\cdot) \in W_p^l$, *інтеграл* (2.6) *збігається, то* $Y^{-1}(\cdot) \in W_p^s$.

Доведемо лему для випадку $m \geq 2$. *Як відомо,*

$$Y^{-1}(t) = \frac{1}{\det Y(t)} Y^T(t),$$

де $Y^T(\cdot)$*– транспонована матриця-функція, утворена алгебраїчними доповненнями елементів матриці-функції* $Y(\cdot)$. *За умовою,* $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$. *Тоді* $Y^T(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, *оскільки функціональний клас* W_p^s *утворює банахову алгебру. Тому, використовуючи доведенний вище факт і останню рівність, отримуємо, що* $Y^{-1} \in (W_p^s)^{m\times m}$.

Лему 2.2 доведено.

Лема 2.3. *Для довільної матриці-функції* $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, *вектора* $q \in \mathbb{C}^m$ *та лінійного неперервного оператора* $B\colon (W_p^s)^{m\times m} \times \mathbb{C}^m$ *є правильною рівність*

$$B(Y(\cdot)q) = [BY]\, q,$$

де матриця $[BY]$ *визначена рівністю* (2.4).

Доведення. Нехай матриця-функція $Y(\cdot) = (y_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^m$, *а вектор-стовпчик* $q = (q_j)_{j=1}^m$. *Позначимо через*

$$(\alpha_i)_{i=1}^m = [BY]\, q \quad \text{та} \quad (\beta_i)_{i=1}^m = B(Y(\cdot)q).$$

Нехай

$$B(y_k(\cdot))_{k=1}^m =: (c_k)_{k=1}^m.$$

При дії оператора B *на матрицю-функцію* $Y(\cdot)$ *отримуємо матрицю*

$$[BY] = (c_{ij})_{i,j=1}^m.$$

Тоді одержимо

$$(\alpha_i)_{i=1}^m = (c_{ij})_{i,j=1}^m (q_j)_{j=1}^m = \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} q_j\right)_{i=1}^m.$$

Отже, довільний елемент α_i *має вигляд*

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} q_j, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Але мають місце наступні рівності

$$(\beta_i)_{i=1}^m = B\left((y_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^m (q_j)_{j=1}^m\right) = B\left(\sum_{j=1}^m y_{ij}(\cdot) q_j\right)_{i=1}^m =$$

$$= \sum_{j=1}^m (By_{ij}(\cdot))_{i=1}^m\, q_j = \sum_{j=1}^m (c_{ij})_{i=1}^m\, q_j = \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} q_j\right)_{i=1}^m.$$

Із цього випливає, що $\alpha_i = \beta_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Лему 2.3 доведено.

Позначимо через $M(W_p^s)$ *комплексний лінійний простір усіх функцій* $\varphi : (a, b) \to \mathbb{C}$ *таких, що* $f \in W_p^s \Rightarrow \varphi f \in W_p^s$. *Функції класу* $M(W_p^s)$ *називають (поточковими) мультиплікаторами у просторі* W_p^s. *Лінійний оператор множення на функцію* $\varphi \in M(W_p^s)$ *заданий на всьому просторі* W_p^s *і замкнений там. Тому на підставі теореми про замкнений графік цей оператор обмежений на* W_p^s, *тобто*

$$\|\varphi\|_{M;s,p} := \sup\left\{ \frac{\|\varphi f\|_{s,p}}{\|f\|_{s,p}} : f \in W_p^s,\ f \neq 0 \right\} < \infty.$$

Простір $M(W_p^s)$ *наділений нормою* $\|\cdot\|_{M,s,p}$ *та є повним відносно неї.*

Лема 2.4. *Нехай* $s > 1$. *Тоді* $W_p^1 \subset M(W_p^s)$, *причому існує число* $c > 0$ *таке, що*

$$\|\varphi\|_{M;s,p} \leq c\,\|\varphi\|_{1,p} \quad \text{для довільного} \quad \varphi \in M(W_p^s). \tag{2.7}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $p > 1$. *Нехай* $\varphi \in W_p^1$. *Оскільки* W_p^1 *— банахова алгебра, то знайдеться число* $c_1 > 0$ *таке, що* $\|\varphi f\|_{1,p} \leq c_1 \|f\|_{1,p}$ *для довільного* $f \in W_p^1$. *Зауважимо, що* $\varphi \in W_p^1 \subset W_1^1 \subset C[a, b]$. *Отже,* $\|\varphi f\|_p \leq c_2 \|f\|_p$ *для будь-якого* $f \in L_p$, *де* c_2 *— супремум-норма функції* φ *на відрізку* $[a, b]$. *Таким чином, оператор множення на функцію* φ *є обмеженим на кожному з просторів* W_p^1 *і* L_p. *Простір* W_p^s, *де* $0 < s < 1$, *є результатом дійсної інтерполяції між* W_p^1 *і* L_p *(див., наприклад, [106, теорема 4.3.1/1]). Тому цей оператор обмежений і на* W_p^s, *тобто* $\varphi \in M(W_p^s)$. *Отже,* $W_p^1 \subset M(W_p^s)$ *у розглянутому випадку. Якщо* $p = 1$, *це вкладення виконується згідно з [32, наслідок 3.3.1]. Потрібна нерівність* (2.7) *випливає тепер з повноти просторів* W_p^1 *і* $M(W_p^s)$ *і узгодженості норм у них (остання справджується, оскільки ці простори неперервно вкладені в* W_p^s*). Лему 2.4 доведено.*

2.3. Теорема про гомеоморфізми

Позначимо через $Y(\cdot) \in (AC[a,b])^{m\times m}$ *єдиний розв'язок матричної задачі Коші*

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = 0 \quad \text{для м.в.} \quad t \in (a,b), \tag{2.8}$$

$$Y(a) = I_m, \tag{2.9}$$

де коефіцієнт $A(\cdot) \in \left(W_p^{s-1}\right)^{m\times m}$. *Тут, звісно,* I_m *— одинична матриця порядку* m, *а* $(AC[a,b])^{m\times m}$ *— комплексний простір усіх* $m \times m$*-матриць-функцій, елементи яких є абсолютно неперервними скалярними функціями на відрізку* $[a,b]$. *Похідна матриці-функції класу* $(AC[a,b])^{m\times m}$ *означена у майже всіх (м.в.) точках цього відрізка. Як відомо, числова матриця* $Y(t)$ *невироджена у кожній точці* $t \in [a,b]$.

Розглянемо питання про однозначну розв'язність задачі (2.8), (2.9) *у просторі* $(W_p^s)^{m\times m}$. *Введемо метричний простір матриць-функцій*

$$(\mathcal{Y}_p^s) := \left\{Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m} : \, Y(a) = I_m, \, \det Y(t) \neq 0\right\},$$

наділений метрикою

$$d_p^s(Y,Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{s,p}.$$

Теорема 2.1. *Розглянемо нелінійне відображення* $\gamma : A \mapsto Y$, *де* $A(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$, *а* $Y(\cdot) \in (AC[a,b])^{m\times m}$ *є розв'язком задачі Коші* (2.8), (2.9). *Це відображення є гомеоморфізмом банахового простору* $(W_p^{s-1})^{m\times m}$ *на метричний простір* $(\mathcal{Y}_p^s)$.

Доведення теореми здійснимо у три кроки.

Крок 1. *Покажемо, що* γ *— бієкція між множинами* $(W_p^{s-1})^{m\times m}$ *і* $(\mathcal{Y}_p^s)$. *Спочатку доведемо індукцією за цілим* $[s] \geq 0$, *що*

$$A(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m} \Longrightarrow Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}. \tag{2.10}$$

Обґрунтуємо цю імплікацію у випадку, коли $[s] = 0$. *Якщо* $A(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$, *то* $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot) \in (L_p)^{m\times m}$, *оскільки усі елементи матриці-функції* $Y(\cdot)$ *обмежені на* $[a,b]$. *Отже,* $Y(\cdot) \in (W_p^1)^{m\times m}$ *і тому* $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$ *за лемою 2.4. Звідси* $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, *тобто ми довели* (2.10) *у вказаному випадку.*

Припустимо тепер, що імплікація (2.10) *істинна для деякого цілого числа* $[s] = k \geq 0$. *Доведемо її у випадку, коли* $[s] = k+1$. *Якщо виконується включення* $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m} \subset (W_p^{s-1})^{m\times m}$, *то* $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ *за індуктивним припущенням, бо* $[s-1] = k$. *Отже, матриця-функція* $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot)$ *належить до* $(W_p^{s-1})^{m\times m}$, *оскільки* W_p^{s-1} *— алгебра у розглянутому випадку. Звідси* $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, *тобто ми довели* (2.10) *у випадку, коли* $[s] = k+1$. *Таким чином, згідно з принципом математичної індукції імплікація* (2.10) *істинна за будь-якого цілого числа* $[s] \geq 0$.

Отже, відображення γ *діє на парі просторів* $(W_p^{s-1})^{m\times m}$ *і* $(\mathcal{Y}_p^s)$. *Воно ін'єктивне, оскільки* $A(\cdot) = -Y'(\cdot)Y^{-1}(\cdot)$. *Покажемо, що воно і сюр'єктивне. Для довільно вибраної матриці-функції* $Y(\cdot) \in (\mathcal{Y}_p^s)$ *покладемо* $A(\cdot) := -Y'(\cdot)Y^{-1}(\cdot)$. *Оскільки* $Y'(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$ *і* $Y^{-1}(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, *то* $Y'(\cdot)Y^{-1}(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$. *Цей висновок робимо на підставі леми 2.4, якщо* $s > 1$, *або з огляду на те, що простір* $(W_p^{s-1})^{m\times m}$ *— банахова алгебра, якщо* $s > 1+1/p$. *Отже,* $A(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$. *Оскільки* $Y(\cdot)$ *— розв'язок задачі Коші* (2.8), (2.9), *то* $\gamma(A(\cdot)) = Y(\cdot)$. *Ми довели, сюр'єктивність відображення*

$$\gamma : (W_p^{s-1})^{m\times m} \to (\mathcal{Y}_p^s). \tag{2.11}$$

Таким чином, воно — бієкція.

Крок 2. *Покажемо, що відображення* (2.11) *неперервне. Розглянемо параметризовані числом* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *матричні задачі Коші вигляду*

$$Y'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon) \quad \text{для м.в.} \quad t \in (a,b), \tag{2.12}$$

$$Y(a;\varepsilon) = I_m, \tag{2.13}$$

де $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$. *Усі границі розглядаємо при* $\varepsilon \to 0+$. *Припустимо, що*

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0. \tag{2.14}$$

Треба довести, що тоді (єдині) розв'язки задач (2.12), (2.13) *задовольняють умову*

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0. \tag{2.15}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $[s] = 0$. *Оскільки*

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_p \to 0$$

згідно з нашим припущенням, то

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{1,p} \to 0 \tag{2.16}$$

на підставі [90, теорема 2.1]. Крім того,

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{s-1,p} = \|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{s-1,p} \le$$
$$\le \|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;0)\|_{s-1,p} + \|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;0) - A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{s-1,p} \le$$
$$\le c\,\|A(\cdot;\varepsilon)\|_{s-1,p}\,\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{1,p} + c\,\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s-1,p}\,\|Y(\cdot;0)\|_{1,p} \to 0$$

на підставі леми 2.4, припущення (2.14) *і властивості* (2.16). *Отже,*

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s,p} \le \|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_p + \|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{s-1,p} \to 0.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $[s] \ge 1$. *У цьому випадку з умови* (2.14) *випливає співвідношення*

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{[s-1],p} \to 0, \tag{2.17}$$

а з нього — властивість

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s-1,p} \le \|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{[s],p} \to 0$$

на підставі [90, теорема 2.1]. Тому

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{s-1,p} = \|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{s-1,p} \leq$$

$$\leq \|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s-1,p}\,\|Y(\cdot;\varepsilon)\|_{s-1,p} + \|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s-1,p}\,\|A(\cdot;0)\|_{s-1,p} \to 0,$$

оскільки $s > 1$. *Отже,*

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s,p} \leq \|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_p + \|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{s-1,p} \to 0.$$

Ми довели неперервність відображення (2.11).

Крок 3. *Доведемо неперервність оберненого відображення. Припустимо, що виконується співвідношення* (2.15). *Тоді*

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{s-1,p} \to 0.$$

Крім того,

$$\|Y^{-1}(\cdot;\varepsilon) - Y^{-1}(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0,$$

оскільки $(W_p^s)^{m\times m}$ *— банахова алгебра. Отже,*

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s-1,p} = \|Y'(\cdot;\varepsilon)Y^{-1}(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)Y^{-1}(\cdot;0)\|_{s-1,p} \to 0.$$

Ми довели неперервність відображення, оберненого до (2.11). *Теорему 2.1 доведено.*

2.4. Розв'язність крайових задач

Запишемо неоднорідну крайову задачу (2.1), (2.2), *у вигляді лінійного операторного рівняння*

$$(L, B)y = (f, c),$$

де (L, B) *— лінійний оператор у парі банахових просторів*

$$(L, B)\colon \ \left(W_p^s\right)^m \to \left(W_p^{s-1}\right)^m \times \mathbb{C}^r. \tag{2.18}$$

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T\colon X \to Y$, *де* X *і* Y *— банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро* $\ker T$ *і коядро* $Y/T(X)$ *скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмовий, то його область значень* $T(X)$ *замкнена в* Y, *а індекс*

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(Y/T(X)) \in \mathbb{Z}$$

є скінченним (див., наприклад, [85, Лема 19.1.1]).

Теорема 2.2. *Лінійний оператор* (2.18) *є обмеженим і фредгольмовим з індексом* $m - r$.

Доведення теореми 2.2. Обґрунтуємо спочатку неперервність оператора (L, B). *Оскільки оператор* B *за умовою є лінійним і неперервним, то достатньо довести неперервність оператора* L, *яка еквівалентна його обмеженості. Обмеженість лінійного оператора*

$$L\colon \ \left(W_p^s\right)^m \to \left(W_p^{s-1}\right)^m$$

випливає з означення норм у просторах Соболєва W_p^{s-1} *і того, що кожен із цих просторів утворює банахову алгебру.*

Доведемо тепер фредгольмовість оператора (L, B) *та знайдемо його індекс. Виберемо деякий фіксований лінійний обмежений оператор*

$C_{r,m}\colon (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r$. *Оператор* (L, B) *допускає зображення*

$$(L, B) = (L, C_{r,m}) + (0, B - C_{r,m}),$$

де оператор

$$(L, C_{r,m})\colon \left(W_p^s\right)^m \to \left(W_p^{s-1}\right)^m \times \mathbb{C}^r,$$

а другий доданок є скінченновимірним оператором. Із другої теореми стійкості (див., наприклад, [88], розд. 3, § 1) випливає, що оператор (L, B) *є фредгольмовим, якщо оператор* $(L, C_{r,m})$ *є таким і*

$$\operatorname{ind}(L, B) = \operatorname{ind}(L, C_{r,m}).$$

Тому достатньо довести фредгольмовість оператора $(L, C_{r,m})$ *і знайти його індекс, вибравши належним чином оператор* $C_{r,m}$. *Для цього розглянемо три випадки.*

1. Нехай $r = m$. *Покладемо*

$$C_{m,m}y := (y_1(a), \ldots, y_m(a)).$$

Знайдемо нуль-простір та область значень цього оператора. Нехай $y(\cdot)$ *належить* $\ker(L, C_{r,m})$. *Тоді* $Ly = 0$ *і* $C_{m,m}y = (y_1(a), \ldots, y_m(a)) = 0$. *Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші випливає, що* $y(\cdot) = 0$. *Тому* $\ker(L, C_{m,m}) = 0$.

Нехай $h \in (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^m$ *і* $c \in \mathbb{C}^m$ *вибрано довільним чином. Із теореми 2.1 випливає, що існує вектор-функція* $y(\cdot) \in (W_p^s)^m$ *така, що*

$$Ly = h, \quad (y_1(a), \ldots, y_m(a)) = c.$$

Тому $\operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = \left(W_p^{s-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m$.

2. Нехай $r > m$. *Покладемо*

$$C_{r,m}y := (y_1(a), \ldots, y_m(a), \underbrace{0, \ldots, 0}_{r-m}) \in \mathbb{C}^r.$$

Знайдемо нуль-простір оператора $(L, C_{r,m})$. *Нехай* $y(\cdot)$ *належить* $\ker(L, C_{r,m})$. *Тоді* $Ly = 0$ *і* $(y_1(a), \ldots, y_m(a)) = 0$. *Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші маємо* $y(\cdot) = 0$.

Запишемо множину значень оператора $(L, C_{r,m})$ *у вигляді прямої суми двох підпросторів*

$$\operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = \operatorname{ran}(L, C_{m,m}) \oplus (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r-m}).$$

Але, як доведено раніше, $\operatorname{ran}(L, C_{m,m}) = (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^m$.

Тому $\operatorname{def} \operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = r - m$.

3. Нехай $r < m$. *Покладемо*

$$C_{r,m} y := (y_1(a), \ldots, y_r(a)) \in \mathbb{C}^r.$$

Доведемо, що

$$\dim \ker(L, C_{r,m}) = m - r,$$

$$\operatorname{def} \operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = 0.$$

Нехай $y(\cdot)$ *належить* $\ker(L, C_{r,m})$. *Тоді* $Ly = 0$ *і* $(y_1(a), \ldots, y_r(a)) = 0$. *Розглянемо наступні* $m - r$ *задач Коші.*

$$Ly_k = 0, \quad C_{m,m} y_k = e_k, \quad \text{де } k \in \{r+1, r+2, \ldots, m\},$$

$$e_k := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0) \in C^m.$$

Із теореми 2.1 випливає, що розв'язки цих задач лінійно незалежні та утворюють базис у підпросторі $\ker(L, C_{r,m})$.

Сюр'єктивність оператора $(L, C_{r,m})$ *випливає із вже доведеної сюр'єктивності оператора* $(L, C_{m,m})$.

Отже, в кожному з трьох випадків оператор (L, B) *є фредгольмовим з індексом* $m - r$.

Теорему 2.2 доведено.

Сформулюємо критерій оборотності оператора (2.18), *тобто умови коректної розв'язності (за Адамаром) крайової задачі* (2.1), (2.2) *у просторі* $(W_p^s)^m$. *Нехай* $Y(\cdot)$ — *матрицант диференціального рівняння* (2.1), *тобто* $Y(\cdot)$ — *єдиний розв'язок матричної задачі Коші* (2.8), (2.9). *Таким чином, стовпці числової* $(m \times m)$*-матриці* $[BY]$ *є результатом дії оператора* B *на відповідні стовпці матриці-функції* $Y(\cdot)$. *Безпосередньо перевіряється, що*

$$B(Yq) = [BY]q \quad \text{для довільного} \quad q \in \mathbb{C}^m. \tag{2.19}$$

Теорема 2.3. *Вимірності ядра і коядра оператора* (4) *дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці*

$$\dim\ker(L, B) = \dim\ker\big(M(L, B)\big), \tag{2.20}$$

$$\dim\operatorname{coker}(L, B) = \dim\operatorname{coker}\big(M(L, B)\big). \tag{2.21}$$

Доведення теореми 2.3. Покажемо справедливість рівності 2.20. Введемо такі позначення:

$$\dim\ker(L, B) = n',$$
$$\dim\ker\big(M\big(L, B\big)\big) = n''.$$

Обґрунтуємо виконання рівності

$$n' = n''. \tag{2.22}$$

Нехай $\dim\ker(L, B) = n'$. *Тоді існує* n' *таких лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння* $(L, B)y = (0, 0)$, *що*

$$y_k(\cdot) \in \ker(L, B) \Leftrightarrow (\exists\, q_k \in \mathbb{C}^m \colon y_k(t) = Y(t)q_k, [BY]\, q_k = 0)\,,$$

згідно з лемою 2.3, де вектори $q_k \neq 0$, *а* $k \in \{1, \ldots, n'\}$. *Це означає, що* $r - n'$ *стовпців матриці* (2.5) *лінійно залежні і* $n' \leq n''$.

Навпаки, нехай $\dim\ker\big(M\big(L,B\big)\big)=n''$, *тоді її* $r-n''$ *стовпців лінійно незалежні. Це означає, що для деяких векторів* $q_k\neq 0$, $k\in\{1,\dots,n'\}$,

$$[BY]\,q_k=0.$$

Покладемо

$$y_k(\cdot):=Y(\cdot)q_k.$$

Тоді $y_k(\cdot)\neq 0$, $Ly_k(\cdot)=0$ *і*

$$By_k(\cdot)=B(Y(\cdot)q_k)=[BY]\,q_k=0$$

на підставі леми 2.3. Тому $y_k(\cdot)\in\ker(L,B)$, *тоді* $n'\geq n''$. *Отже, виконується рівність* (2.20).

Згідно з визначенням характеристична матриця $M(L,B)$ *належить простору* $\mathbb{C}^{m\times r}$. *Як відомо, вимірність ядра матриці є різницею числа її рядків та рангу, а вимірність коядра — різницею числа стовпців та рангу. Тоді для матриці* $M(L,B)$ *маємо рівність*

$$\dim\operatorname{coker}\big(M\big(L,B\big)\big)=r-m+\dim\ker\big(M\big(L,B\big)\big)\,. \tag{2.23}$$

Із формули знаходження індексу для оператора (L,B)

$$\operatorname{ind}(L,B):=\dim\ker(L,B)-\dim\operatorname{coker}(L,B) \tag{2.24}$$

маємо

$$\dim\operatorname{coker}(L,B)=r-m+\dim\ker(L,B). \tag{2.25}$$

Із рівностей (2.22), (2.23) *і* (2.25) *випливає рівність* (2.4).

Теорему 2.3 доведено.

Із теореми (2.3) *випливає критерій оборотності оператора* (L,B), *тобто умови, за якої неоднорідна крайова задача* (2.1), (2.2) *має єдиний розв'язок і він неперервно залежить від правих частин диференціального рівняння та крайової умови.*

Наслідок 2.1. *Оператор* (2.18) *оборотний тоді і лише тоді, коли матриця* $[BY]$ *невироджена.*

Доведення теореми 3. Позначимо через N *ядро оператора* (2.18). *За теоремою 2.2 оборотність цього оператора еквівалентна рівності* $N = \{0\}$. *З огляду на* (2.19) *включення* $y(\cdot) \in N$ *рівносильно тому, що* $y(\cdot) = Y(\cdot)q$ *і* $[BY]q = 0$ *для деякого* $q \in \mathbb{C}^m$. *Отже,* $N \neq \{0\}$ *тоді і лише тоді, коли* $m - r$ *і матриця* $[BY]$ *невироджена.*

Наслідок 2.1 доведено.

У випадку $1 \leqslant p < \infty$ *для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку* $n \in \mathbb{N}$ *критерій доведений Гнип, Кодлюк і Михайлецем [12].*

Приклад 1. Розглянемо лінійну одноточкову крайову задачу для диференціального рівняння

$$Ly(t) := y'(t) + Ay(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{2.26}$$

$$By = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(a) = c, \tag{2.27}$$

де A *є сталою* $m \times m$ *– матрицею, вектор-функція* $f(\cdot)$ *належить простору* $(W_p^{s-1})^m$, *матриці* $\alpha_k \in \mathbb{C}^{r \times m}$, *вектор* $c \in \mathbb{C}^r$, *лінійні неперервні оператори*

$$B\colon (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r, \quad (L, B)\colon (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r,$$

вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^s)^m$, *а* $s > n + \frac{1}{p} - 1$.

Позначимо через $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m \times m}$ *єдиний розв'язок матричної задачі Коші*

$$Y'(t) + AY(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \quad Y(a) = I_m.$$

Тоді матриця-функція $Y(\cdot)$ та її k-та похідна будуть мати наступний вигляд:

$$Y(t) = \exp\big(-A(t-a)\big), \quad Y(a) = I_m;$$
$$Y^{(k)}(t) = (-A)^k \exp\big(-A(t-a)\big), \quad Y^{(k)}(a) = (-A)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши ці значення у рівність (2.27), маємо

$$M(L,B) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (-A)^k.$$

З теореми 2.2 випливає, що $ind(L,B) = ind(M(L,B)) = m - r$.

Тому за теоремою 2.3 одержуємо

$$\dim\ker(L,B) = \dim\ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (-A)^k\right),$$
$$\dim\operatorname{coker}(L,B) = -m + r + \dim\ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (-A)^k\right).$$

Приклад 2. Розглянемо двоточкову крайову задачу для системи диференціальних рівнянь (2.26) з коефіцієнтом $A(t) \equiv O_m$ і крайовими умовами в точках $\{t_0, t_1\} \subset [a,b]$, що містять похідні цілих та/ чи дробових порядків (в сенсі Капуто, див. наприклад [100]). Вони задаються рівністю

$$By = \sum_j \alpha_{0j} y^{(\beta_{0j})}(t_0) + \sum_j \alpha_{1j} y^{(\beta_{1j})}(t_1),$$

де обидві суми є скінченні, числові матриці $\alpha_{kj} \in \mathbb{C}^{r\times m}$, а невід'ємні числа β_{kj} такі, що для всіх $k \in \{1,2\}$

$$\beta_{k,0} = 0, \quad \beta_{kj} < s - 1/p.$$

Тоді, як неважко переконатися, лінійний оператор

$$B\colon (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r$$

є неперервним.

Із теореми 2.2 випливає, що індекс оператора (L, B) *дорівнює* $m-r$. *Знайдемо його фредгольмові числа. У цьому випадку матриця-функція* $Y(\cdot) = I_{m\times m}$. *Тому характеристична матриця має вигляд*

$$M(L,B) = \sum_j \alpha_{0j} I_{m\times m}^{(\beta_{0j})} + \sum_j \alpha_{1j} I_{m\times m}^{(\beta_{1j})} = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0},$$

бо похідні $I_{m\times m}^{(\beta_{kj})} = 0$, *якщо* $\beta_{kj} > 0$ *[100]. Тому за теоремою 2.3*

$$\dim\ker(L,B) = \dim\ker\left(\alpha_{0,0} + \alpha_{1,0}\right),$$

$$\dim\operatorname{coker}(L,B) = \dim\ker\left(\alpha_{0,0} + \alpha_{1,0}\right) - m + r.$$

2.5. Збіжність послідовності характеристичних матриць крайових задач

Розглянемо поряд із задачею (2.1), (2.2) *послідовність неоднорідних крайових задач*

$$L(k)y(t,k) := y'(t,k) + A(t,k)y(t,k) = f(t,k), \quad t \in (a,b), \tag{2.28}$$

$$B(k)y(\cdot,k) = c(k), k \in \mathbb{N}, \tag{2.29}$$

Тут матриці-функції $A(\cdot,k)$, *вектор-функцію* $f(\cdot,k)$, *вектор* $c(k)$ *і лінійні неперервні оператори* $B(k)$ *задовольняють наведеним вище умовам для задачі* (2.1), (2.2).

Пов'яжемо з крайовими задачами (2.28), (2.29) *послідовність лінійних неперервних операторів* $(L(k),B(k))\colon\ (W_p^s)^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^r$, *та послідовність характеристичних матриць* $M(L(k),B(k)) := [B(k)Y(\cdot,k)] \in \mathbb{C}^{m\times r}$*залежних від параметра* $k \in \mathbb{N}$. *Позначимо через*

$$(L(k),B(k)) \xrightarrow{s} (L,B) \tag{2.30}$$

сильну збіжність послідовності операторів $(L(k),B(k))$ *до оператора* (L,B).

Для кожного номера $k \in \{1,\dots,r\}$ *розглянемо сім'ю матричних задач Коші*

$$Y_k^{(l)}(t) + A(t)Y_k(t) = O_m, \quad t \in (a,b), \tag{2.31}$$

з початковими умовами

$$Y_k(a) = \delta_{k,j} I_m, \qquad j \in \{1,\dots,r\}. \tag{2.32}$$

Тут $Y_k(t)$ *— шукана* $(m\times m)$ *— матриця-функція,* $\delta_{k,j}$ *— символ Кронекера, а* O_m *— нульова,* I_m *— одинична* $(m\times m)$ *— матриці. Єдиний розв'язок*

$Y_k(\cdot)$ кожної з задач Коші (2.31), (2.32) *належить простору* $(W_p^s)^{m\times m}$. *Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння* (2.1) *можна однозначно записати у вигляді*

$$y(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot) g_k,$$

де вектори-стовпці $g_k \in \mathbb{C}^m$.

Сформулюємо достатню умову збіжності характеристичних матриць $M(L(k), B(k))$ *до матриці* $M(L, B)$.

Теорема 2.4. *Якщо послідовність операторів* $(L(k), B(k))$ *сильно збігається до оператора* (L, B) *при* $k \to \infty$ *, то послідовність характеристичних матриць* $M(L(k), B(k))$ *збігається до матриці* $M(L, B)$.

Доведення теореми 2.4 розділимо на три частини.

Крок 1. Нехай $k, j \in \{1, \ldots, r\}$. *Зведемо матричну задачу Коші* (2.31), (2.32) *до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку (див., наприклад, [88, п. 2.5]). Для цого, як звичайно, блочну матрицю-функцію* $K(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$ *визначимо рівністю*

$$K(\cdot) := \begin{pmatrix} O_m & -I_m & O_m & \ldots & O_m \\ O_m & O_m & -I_m & \ldots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \ldots & -I_m \\ A_0(\cdot) & A_1(\cdot) & A_2(\cdot) & \ldots & A_{r-1}(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

та для будь-яких k *вектор-функцію* $Z_k \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$ *визначимо такою формулою:*

$$Z_k(\cdot) := col\left(Z_{k1}, Z_{k2}, \ldots, Z_{kr}\right).$$

Тоді Z_k є розв'язком наступної матричної задачі Коші:

$$Z_k'(t) + K(t)Z_k(t) = O_{m\times m}, \quad t \in (a,b),$$
$$Z_k(t_0) = J_k = col\left(O_m, \ldots, O_m, \underbrace{I_m}_{k}, O_m, \ldots, O_m\right).$$

Нехай $\hat{Z}(\cdot)$ позначає таку матрицю-функцію з простору $(W_p^{s-1})^{m\times m}$, що $Z_k(\cdot)$ — її k-й стовпець для кожного k. Ця функція задовольняє наступну матричну задачу Коші першого порядку:

$$\hat{Z}'(t) + K(t)\hat{Z}(t) = O_{m\times m}, \quad t \in (a,b), \tag{2.34}$$
$$\hat{Z}(t_0) = I_m. \tag{2.35}$$

Із наведених міркувань випливає

Лема 2.5. *Розв'язки $Y_k(\cdot)$ задачі* (2.31), (2.32) *пов'язані з розв'язком $\hat{Z}$ задачі* (2.34), (2.35) *наступним чином:*

$$Y_k = Z_{k1}.$$

Крок 2. Для крайової задачі (2.28), (2.29) *розглянемо такі*

Граничні умови *при $k \to \infty$:*

(3.I′) $A(\cdot,k) \to A(\cdot)$ *у просторі* $(W_p^{s-1})^{m\times m}$ *для кожного номера* $j \in \{1,\ldots,r\}$;

(3.II′) $B(k)y \to By$ *у просторі* $\mathbb{C}^r$ *для довільної вектор-функції* $y \in (W_p^s)^m$.

Також розглянемо ще дві умови:

(A_1) $\|L(k) - L\| \to 0$;

(A_2) $L(k)y \to Ly$ *для кожного* $y \in (W_p^s)^m$.

Лема 2.6. *Граничні умови (3.I′), (3.II′) є еквівалентними умові* (2.30).

Доведення. Достатньо показати виконання наступних імплікацій при $k \to \infty$*:*

$$(3.I') \Longrightarrow (A_1) \Longrightarrow (A_2) \Longrightarrow (3.I').$$

Спочатку обґрунтуємо першу імплікацію. Припустимо, що виконується збіжність

$$\|A(\cdot,k) - A(\cdot)\|_{s-1,p} \to 0.$$

Для довільної вектор-функції $y \in (W_p^s)^m$ *маємо*

$$\begin{aligned}\big\|(L(k)-L)y\big\|_{s-1,p} &= \|(A(\cdot,k)-A(\cdot))\,y\|_{s-1,p} \le \\ &\le c_{s-1,p}\,(A(\cdot,k)-A(\cdot)\|_{s-1,p}\,\|y\|_{s,p} \le \\ &\le c_{s,p}\,\|A(\cdot,k)-A(\cdot)\|_{s-1,p}\,\|y\|_{s,p}.\end{aligned}$$

Тут $c_{s-1,p}$ *та* $c_{s,p}$ *— деякі додатні числа, що не залежить від* y*; вони існують, оскільки* W_p^s *— банахова алгебра. Тому*

$$\|L(k)-L\| \le c_{s-1,p}\,\|A(\cdot,k)-A(\cdot)\|_{s-1,p} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to 0+,$$

де $\|\cdot\|$ *позначає норму лінійного неперервного оператора на парі просторів*

$$L(k)\colon (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m.$$

Першу імплікацію доведено. Імплікація $(A_1) \Longrightarrow (A_2)$ *є очевидною. Доведемо, що з умови* (A_2) *випливає гранична умова (3.I′). Покажемо справедливість цього факту спочатку для скалярного випадку* $m = 1$*. Маємо*

$$L(k)y = y^{(l)} + A(\cdot,k)y \to y^{(l)} + A(\cdot)y = Ly. \tag{2.36}$$

Покладемо $y(t) \equiv 1$ *та підставимо у співвідношення* (2.36)*. Тоді має місце збіжність коефіцієнтів*

$$A_0(\cdot,k) \to A_0(\cdot) \quad y \quad W_p^s. \tag{2.37}$$

Покладемо тепер $y(t) \equiv t$ *та підставимо у співвідношення* (2.36). *Тоді, враховуючи умову* (2.37), *справджується збіжність коефіцієнтів*

$$A_1(\cdot,k) + A_0(\cdot,k)t \to A_1(\cdot) + A_0(\cdot)t \quad y \quad W_p^s.$$

Продовжуючи послідовно цей процес до r*-го кроку, переконуємося у виконанні умови* (A_2) *для скалярного випадку* $m = 1$.

Нехай $m \geq 2$. *Оскільки сильна збіжність на вектор-функціях* $y(\cdot)$ *еквівалентна сильній збіжності на квадратних матрицях* $Y \in (W_p^s)^{m\times m}$, *то маємо*

$$\begin{aligned} L(k)Y = Y^{(\prime)} + A(\cdot,k) \to \\ \to Y^{(\prime)} + A(\cdot)Y = Ly. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Покладемо $Y = I_m$, *де* I_m — *одинична* $m \times m$ — *матриця, та послідовно підставлятимемо матриці у співвідношення* (2.5). *Тоді має місце наступна збіжність коефіцієнтів*

$$A_0(\cdot,k) \to A_0(\cdot) \quad y \quad (W_p^{s+1})^{m\times m}. \tag{2.39}$$

Покладемо тепер $Y \equiv tI_m$ *та підставимо у співвідношення* (2.5). *Тоді, враховуючи умову* (2.39), *справджується збіжність коефіцієнтів*

$$A_1(\cdot,k) + A_0(\cdot,k)t \to A_1(\cdot) + A_0(\cdot)t \quad y \quad (W_p^s)^{m\times m}.$$

Продовжуючи послідовно цей процес до r*-го кроку, переконуємось у виконанні умови* (A_2) *для випадку* $m \geq 2$. *Отже, справджується імплікація* $(A_2) \Longrightarrow$ *(3.I′).*

Лему 2.6 доведено.

Крок 3. Для кожного номера $k \in \{1,\ldots,r\}$ *позначимо через матриці-функції* $Y_n(\cdot,k) \in (W_p^s)^{m\times m}$ *відповідно розв'язки сім'ї матричних задач Ко-*

ші:

$$Y_n^{(\prime)}(t,k) + A(t,k)Y_s(t,k) = O_m, \quad t \in (a,b),$$
$$Y_n(t_0) = \delta_{n,j} I_m, \qquad j \in \{1,\dots,r\}.$$

Лема 2.7. *Якщо виконується гранична умова (3.I′), то послідовність матриць-функцій* $Y_n^{(\prime)}(\cdot,k)$ *збігається до матриці* $Y_n^{(r)}(\cdot)$ *для кожного* $n \in \{1,\dots,r\}$ *у просторі* $(W_p^s)^{m\times m}$

$$(3.I') \Longrightarrow Y_n^{(\prime)}(\cdot,k) \to Y_n^{(\prime)}(\cdot).$$

Доведення леми випливає з леми 2.5 та теореми про гомеоморфізми **??**.

Теорему 2.4 доведено.

Наслідок 2.2. *В умовах теореми 2.4 починаючи з достатньо великих* k *справджуються нерівності*

$$\dim\ker(L(k),B(k)) \le \dim\ker\big(M(L(k),B(k))\big),$$
$$\dim\operatorname{coker}(L(k),B(k)) \le \dim\operatorname{coker}\big(M(L(k),B(k))\big).$$

Зокрема

а) якщо $r = m$ *і оператор* (L,B) *є оборотним, то оператори* $(L(k),B(k))$ *також є оборотними для великих* k*;*

б) якщо крайова задача (2.1), (2.2) *при будь-яких значеннях правих частин має розв'язок, то крайові задачі* (2.28), (2.29) *також мають розв'язок для всіх достатньо великих* k*;*

в) якщо існує не більш як один розв'язок деякої крайової задачі (2.1), (2.2), *то задачі* (2.28), (2.29) *не можуть мати різні розв'язки для кожного досить великого* k.

Доведення. Враховуючи теорему 2.4, проведемо міркування на прикладі характеристичних матриць. Нехай послідовність характеристичних ма-

триць $M\big(L(k), B(k)\big)$ *збігається до граничної характеристичної матриці* $M\big(L, B\big)$. *Та нехай* $\operatorname{rank}\big(M\big(L, B\big)\big) = r$, *тобто існує мінор матриці* $M\big(L, B\big)$ *порядку* $r \neq 0$. *Тоді коефіцієнти послідовності визначників характеристичних матриць* $M\big(L(k), B(k)\big)$ *збігаються відповідно до коефіцієнтів визначника граничної характеристичної матриці* $M\big(L, B\big)$, *який відмінний від нуля:*

$$\det D_s \to \det D \neq 0, \quad s \in \{1, \ldots, k\}.$$

Отже, ранги послідовності характеристичних матриць можуть лише збільшуватися:

$$\operatorname{rank}\big(M\big(L(k), B(k)\big)\big) \geq \operatorname{rank}\big(M\big(L, B\big)\big).$$

Як відомо, вимірність ядра матриці є різницею числа рядків та рангу матриці. Тому вимірності ядер послідовності характеристичних матриць можуть лише зменшуватися. Звідси випливає нерівність (2.2).

Аналогічно доводимо справедливість нерівності (2.2). *Оскільки вимірність коядра матриці є різницею числа стовпців та рангу матриці, то вимірності коядер послідовності характеристичних матриць також можуть лише зменшуватися.*

Наслідок 2.2 доведено.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації досліджено найбільш загальні крайові задачі та найбільш загальні багатоточкові крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболева-Слободецького $(W_p^{s-1})^m$, де $1 \leq p < \infty$. Одержано такі основні результати:

1. *Показано, що досліджуваним крайовим задачам відповідає фредгольмів оператор з індексом $m - r$ на парі нормованих просторів $(W_p^{s-1})^m$ і $(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^r$ (теорема 2.2).*

2. *Встановлено критерій однозначної розв'язності досліджуваних крайових задач у цих просторах (теорема 2.1).*

3. *Встановлено, що вимірності ядра та коядра оператора крайової задачі дорівнюють відповідно вимірності ядра та коядра характеристичної матриці крайової задачі (теорема 2.3).*

4. *Знайдено конструктивні достатні умови збіжності характеристичних матриць послідовності неоднорідних крайових задач.*

Результати другого розділу опубліковано у статтях [96, 41] та висвітлено в тезах конференцій [38, 39].

РОЗДІЛ 3
НЕОДНОРІДНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ

3.1. Неперервність за параметром розв'язків крайової задачі

Розглянемо параметризовані числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ *крайові задачі*

$$y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{3.1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{3.2}$$

де задані $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$, $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{s-1})^m$, $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ *і лінійний неперервний оператор*

$$B(\varepsilon) : (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^m.$$

Розв'язок $y(\cdot;\varepsilon)$ *розглядається у класі* $(W_p^s)^m$. *Як і раніше,* $Y(\cdot;\varepsilon)$ — *розв'язок матричної задачі Коші* (2.12), (2.13).

Крайову задачу, яка відповідає значенню $\varepsilon = 0$, *вважаємо граничною для сім'ї задач* (3.1), (3.2). *Усі границі розглядаємо при* $\varepsilon \to 0+$, *якщо не вказано інше.*

Надалі робимо

Припущення (0). Гранична однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок.

З цього припущення і теореми 2.2 випливає, що неоднорідна гранична крайова задача має єдиний розв'язок $y(\cdot;0) \in (W_p^s)^m$ *для будь-яких правих частин* $f(\cdot;0) \in (W_p^{s-1})^m$ *і* $c(0) \in \mathbb{C}^m$.

Теорема 3.1. *Нехай крайові задачі* (3.1), (3.2) *задовольняють умови*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s-1,p} \to 0$,

2) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *для довільного* $y \in (W_p^s)^m$.

Тоді обмежений оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^m \tag{3.3}$$

є оборотним для достатньо малих $\varepsilon > 0$. *Якщо, крім цього,*

3) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{s-1,p} \to 0, \quad c(\varepsilon) \to c(0),$

то розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ *задовольняє граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\|_{s,p} \to 0. \tag{3.4}$$

Попередньо встановимо декілька допоміжних тверджень.

Лема 3.1. *Нехай виконуються умови* 1) *і* 2) *теореми* 3.1. *Тоді оператор* (3.3) *оборотний для достатньо малих* $\varepsilon > 0$.

Доведення. З умови 1) випливає на підставі теореми 2.1, що

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0. \tag{3.5}$$

Тому за умовою 2) виконується така збіжність числових матриць:

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] \to [B(0)Y(\cdot,0)]\,. \tag{3.6}$$

Тут гранична матриця невироджена на підставі припущення (0) і теореми 2.1. Отже, і матриця $[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)]$ *невироджена для достатньо малих* $\varepsilon \geq 0$. *Звідси за теоремою 2.1 випливає оборотність оператора* (3.3) *для цих* ε. □

Розглянемо поряд із задачею (3.1), (3.2) *такі три крайові задачі:*

$$v'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)v(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{3.7}$$

$$x'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad x(a;\varepsilon) = 0, \tag{3.8}$$

$$w'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)w(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)w(\cdot;\varepsilon) = 0. \tag{3.9}$$

Як зазначалося, задача Коші (3.8) *має єдиний розв'язок* $x(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^s)^m$.

Згідно з лемою 3.1 крайові задачі (3.7) *і* (3.9) *мають для достатньо малих* $\varepsilon \geq 0$ *єдині розв'язки* $v(\cdot;\varepsilon)$ *і* $w(\cdot;\varepsilon)$ *класу* $(W_p^s)^m$. *Звісно,*

$$y(\cdot;\varepsilon) = v(\cdot;\varepsilon) + w(\cdot;\varepsilon) \tag{3.10}$$

для цих ε. *Тому для доведення теореми 3.1 достатньо показати, що за її умов 1)–3) виконуються такі граничні співвідношення:*

$$\|v(\cdot;\varepsilon) - v(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0, \tag{3.11}$$

$$\|w(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0. \tag{3.12}$$

Лема 3.2. *Нехай виконуються умови* 1)–3) *теореми* 3.1. *Тоді розв'язок крайової задачі* (3.7) *має граничну властивість* (3.11).

Доведення. Цей розв'язок має такі дві властивості: $v(\cdot;\varepsilon) = Y(\cdot;\varepsilon)\widetilde{c}(\varepsilon)$ *для деякого вектора* $\widetilde{c}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ *і* $[B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]\widetilde{c}(\varepsilon) = c(\varepsilon)$ *з огляду на формулу* (2.19). *Тому на підставі властивості* (3.6) *і умови 3) маємо збіжність*

$$\widetilde{c}(\varepsilon) = [B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]^{-1}c(\varepsilon) \to [B(0)Y(\cdot;0)]^{-1}c(0) = \widetilde{c}(0).$$

Звідси та з (3.5) *випливає потрібне співвідношення* (3.11). □

Лема 3.3. *Нехай виконуються умови* 1)–3) *теореми* 3.1. *Тоді розв'язок задачі Коші* (3.8) *має граничну властивість*

$$\|x(\cdot;\varepsilon) - x(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0. \tag{3.13}$$

Доведення. Як добре відомо, розв'язок задачі Коші зображається у вигляді

$$x(t;\varepsilon) = Y^{-1}(t;\varepsilon)\int_a^t Y(s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds.$$

З властивості (3.5) *і умови 3) випливає співвідношення*

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)f(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)f(\cdot;0)\|_{s-1,p} \to 0. \tag{3.14}$$

Тут скористалися лемою 2.4, якщо $1 < s \leq 1 + 1/p$*, або тим фактом, що* W_p^{s-1} *— банахова алгебра, коли* $s > 1 + 1/p$*. Звідси випливає потрібна формула* (3.13)*, якщо знову скористатися* (3.5). □

Лема 3.4. *Нехай виконуються умови* 1)–3) *теореми* 3.1*. Тоді розв'язок крайової задачі* (3.9) *має граничну властивість* (3.12).

Доведення. Вектор-функція $u(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;\varepsilon)$ *є розв'язком крайової задачі вигляду* (3.7)*:*

$$u'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon), \qquad B(\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon) = \widetilde{c}(\varepsilon), \tag{3.15}$$

де покладаємо $\widetilde{c}(\varepsilon) := B(\varepsilon)x(\cdot;\varepsilon)$*. Помітимо, що* $\widetilde{c}(\varepsilon) \to \widetilde{c}(0)$ *на підставі властивості 2) і леми 3.3. Тому*

$$\|u(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0 \tag{3.16}$$

згідно з лемою 3.2. Потрібна властивість (3.12) *випливає з рівності* $w(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;\varepsilon)$ *та формул* (3.13) *і* (3.16). □

Доведення теореми 3.1. Вона є прямим наслідком рівності (3.10) *та лем 3.2 і 3.4.* □

Зазначимо, що в умовах теореми 3.1 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *збігається до оператора* $(L(0), B(0))$ *в сильній операторній топології, але, взагалі кажучи, не за нормою операторів. Отже, теорема 3.1 не є наслідком відомої теореми про мале збурення оборотного оператора. У випадку, коли* $p > 1$*, ця теорема доведена у роботі Е. Гнип [76].*

3.2. Критерій неперервності за параметром розв'язків крайової задачі

Сформулюємо критерій неперервності розв'язку $y = y(t, \varepsilon)$ *крайової задачі* (3.1), (3.2) *за параметром* ε *при* $\varepsilon \to 0+$ *у просторі* W_p^{s-1}.

Природно дати

Означення 3.1. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

$(*)$ Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^{s-1})^m$ і $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^s)^m$.

$(**)$ Збіжність правих частин $f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0)$ в $(W_p^s - 1)^m$ та $c(\varepsilon) \to c(0)$ в $\mathbb{C}^m$ тягне за собою збіжність розв'язків

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (W_p^s)^m. \tag{3.17}$$

Теорема 3.2. *Розв'язок крайової задачі* (3.1), (3.2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє припущення* (0) *та умови* 1) *і* 2) *теореми* 4.

Доведення. Достатність доведена в теоремі 3.1. Доведемо необхідність. Припустимо, що задача (3.1), (3.2) *задовольняє означення 3.1. Тоді виконується умова (0). Залишається показати, що задача задовольняє умови 1) і 2). Зробимо це у три кроки.*

Крок 1. *Доведемо, що ця задача задовольняє умову 1). За умовою* $(*)$ *нашого означення, обмежений оператор*

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^m \tag{3.18}$$

оборотний для будь якого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. *Для кожного* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ *розглянемо матричну крайову задачу*

$$Y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)Y(t, \varepsilon) = 0 \cdot I_m, \quad t \in [a, b],$$

$$[BY(\cdot, \varepsilon)] = I_m.$$

Вона є сукупністю m *крайових задач* (3.1), (3.2), *у яких праві частини не залежать від* ε. *Тому, за припущенням, вона має єдиний розв'язок* $Y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^s)^{m \times m}$ *і він задовольняє умову* (3.5). *Зауважимо, що матриця* $Y(t, \varepsilon)$ *невироджена для довільного* $t \in [a, b]$, *бо у протилежному випадку стовпці-функції матриці* $Y(\cdot, \varepsilon)$ *будуть лінійно залежними, що суперечитиме умові* $[BY(\cdot, \varepsilon)] = I_m$. *Тому*

$$A(\cdot, \varepsilon) = -Y'(\cdot, \varepsilon)(Y(\cdot, \varepsilon))^{-1} \to -Y'(\cdot, 0)(Y(\cdot, 0))^{-1} = A(\cdot, 0)$$

у просторі $(W_p^s)^{m \times m}$, *тобто умова 1) виконується.*

Крок 2. *Покажемо, що* $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ *при* $\varepsilon \to 0+$, *де* $\|\cdot\|$ — *норма обмеженого оператора* $B(\varepsilon) : (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^m$. *Припустимо супротивне: існує числова послідовність* $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon_1)$ *така, що* $\varepsilon^{(k)} \to 0$ *і* $0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty$. *Для кожного номера* k *виберемо функцію* $x_k \in (W_p^s)^m$, *підпорядковану умовам*

$$\|x_k\|_{s+1,p} = 1 \quad і \quad \|B(\varepsilon^{(k)})x_k\|_{\mathbb{C}^m} \geq \frac{1}{2}\|B(\varepsilon^{(k)})\|.$$

Покладемо

$$y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1} x_k, \quad f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot, \varepsilon^{(k)}), \quad c(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot, \varepsilon^{(k)}).$$

Оскільки $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ *у просторі* $(W_p^s)^m$, *то* $f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ *в* $(W_p^{s-1})^m$, *бо за доведеним на першому кроці матриця-функція* $A(\cdot,\varepsilon)$ *задовольняє умову 1). Оскільки* $1/2 \le \|c(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^m} \le 1$, *то, перейшовши до підпослідовності чисел* $\varepsilon^{(k)}$, *можна вважати, що* $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0)$ *при* $k \to \infty$, *де* $c(0)$ — *деякий ненульовий вектор у просторі* $\mathbb{C}^m$. *Таким чином, для кожного номера* k *вектор-функція* $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \in (W_p^s)^m$ *є єдиним розв'язком крайової задачі*

$$L(\varepsilon^{(k)})\, y(t,\varepsilon^{(k)}) = f(t,\varepsilon^{(k)}), \quad t \in [a,b],$$
$$B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) = c(\varepsilon^{(k)}).$$

Тут $f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ *в* $(W_p^s)^m$ *і* $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0) \ne 0$ *при* $k \to \infty$. *Тому на підставі умови* $(**)$ *нашого означення* $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to y(\cdot,0)$ *у просторі* $(W_p^s)^m$, *де* $y(\cdot,0)$ — *єдиний розв'язок граничної крайової задачі*

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad t \in [a,b],$$
$$B(0)y(\cdot,0) = c(0).$$

Але $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ *у тому ж просторі. Тому* $y(\cdot,0) \equiv 0$, *що суперечить крайовій умові. Отже, зроблене припущення хибне, тобто* $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ *при* $\varepsilon \to 0+$.

Крок 3. *Покажемо, що задача* (3.1), (3.2) *задовольняє умову 2). За доведеним у кроках 1 і 2 існують числа* $\gamma' > 0$ *і* $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$ *такі, що* $\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\| \le \gamma'$ *для будь-якого* $\varepsilon \in [0,\varepsilon')$. *Тут* $\|\cdot\|$ — *норма обмеженого оператора парі просторів* $(W_p^s)^m$ *і* $(W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^m$. *Виберемо довільно функцію* $y \in (W_p^s)^m$ *та покладемо* $f(\cdot,\varepsilon) := L(\varepsilon)y$ *і* $c(\varepsilon) := B(\varepsilon)y$ *для кожного* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. *Тоді*

$$\big\|B(\varepsilon)y - B(0)y\big\|_{\mathbb{C}^m} \le \big\|(f(\cdot,\varepsilon),c(\varepsilon)) - (f(\cdot,0),c(0))\big\|_{(W_p^{s-1})^m\times\mathbb{C}^m} \le$$
$$\le \gamma' \big\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot,\varepsilon),c(\varepsilon)) - (f(\cdot,0),c(0))\big)\big\|_{s,p} =$$
$$= \gamma' \big\|(L(0),B(0))^{-1}(f(\cdot,0),c(0)) - (L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot,0),c(0))\big\|_{s,p} \to 0$$

за умовою $(**)$. *Таким чином, крайова задача* (3.1), (3.2) *задовольняє умову 2).* $\square$.

Теорему 3.2 доведено.

3.3. Двобічна оцінка швидкості збіжності розв'язків крайової задачі за параметром

Перейдемо до дослідження швидкості збіжності розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2) *при* $\varepsilon \to 0+$.

Покладемо

$$\widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon) := \big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s-1,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^m},$$

де $\|\cdot\|_{s-1,p}$ *— норма у просторі* W_p^{s-1}, *а* $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}$ *— норма у просторі* $\mathbb{C}^m$.

Величини

$$\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s,p}$$

та $\widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon)$ *є відповідно похибкою і нев'язкою розв'язку* $y(\cdot;\varepsilon)$ *крайової задачі* (3.1), (3.2), *якщо* $y(\cdot;\varepsilon)$ *розглядати як її точний розв'язок, а* $y(\cdot;0)$ *— як наближений.*

Теорема 3.3. *Нехай крайова задача* (3.1), (3.2) *задовольняє умови* (0), (I) *і* (II). *Тоді існують такі додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *має місце двобічна оцінка*

$$\gamma_1\, \widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon) \le \big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s,p} \le \gamma_2\, \widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon), \tag{3.19}$$

де числа ε_2, γ_1 *і* γ_2 *не залежать від* $y(\cdot;0)$ *і* $y(\cdot;\varepsilon)$.

Згідно з теоремою, похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ *крайової задачі* (3.1), (3.2) *мають однаковий порядок малості.*

Доведення теореми 3.3. Спочатку покажемо, що має місце ліва частина подвійної нерівності (3.19). *Покладемо*

$$f(\cdot,\varepsilon) := L(\varepsilon)\, y(\cdot;\varepsilon), \quad c(\varepsilon) := B(\varepsilon)\, y(\cdot;\varepsilon). \tag{3.20}$$

Із граничних умов (2.I), (2.II) випливає сильна збіжність обернених операторів

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big) \xrightarrow{s} \big(L(0), B(0)\big), \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тому існують такі числа $\gamma' > 0$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$, *що норма цього оператора задовольняє нерівність*

$$\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leqslant \gamma'. \tag{3.21}$$

Дійсно, припустивши протилежне, можна знайти таку послідовність додатних чисел $\big(\varepsilon^{(k)}\big)_{k=1}^{\infty}$, *що* $\varepsilon^{(k)} \to 0$ *і*

$$\big\|\big(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)})\big)\big\| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Але за теоремою Банаха–Штейнгауза це суперечить сильній збіжності $\big(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)})\big)$ *до* $(L(0), B(0))$ *при* $k \to \infty$. *Тому для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$ *з урахуванням* (3.20), (3.21) *робимо висновок, що*

$$\begin{gathered}
\big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s-1,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^m} = \\
= \big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - L(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s-1,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^m} \leq \\
\leq \big\|L(\varepsilon)\big\|\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s,p} + \big\|B(\varepsilon)\big\|\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s,p} \leq \\
\leq \gamma'\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s+1,p},
\end{gathered}$$

тобто встановлено ліву частину нерівності (3.19) *із* $\gamma_1 := 1/\gamma'$.

Доведемо праву частину подвійної нерівності (3.19). *Згідно з теоремою 3.2, оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *має обмежений обернений оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ *для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$, *причому виконується сильна збіжність*

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{s} (L(0), B(0))^{-1}, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Справді, для довільних $f \in (W_p^{s-1})^m$ *та* $c \in \mathbb{C}^m$ *за умовою* $(**)$ *означення 3.1, маємо збіжність*

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)^{-1}(f;c) =: y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0) := \big(L(0), B(0)\big)^{-1}(f;c)$$

у $(W_p^s)^m$ *при* $\varepsilon \to 0+$. *Тоді за теоремою Банаха–Штейнгауза, як і вище випливає, що норми цих обернених операторів обмежені, тобто існують такі додатні числа* ε_2 *і* γ_2, *що норма оберненого оператора*

$$\Big\| \big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)^{-1} \Big\| \leqslant \gamma_2.$$

Отже, для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *справджуються співвідношення*

$$\big\| y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon) \big\|_{s,p} = \Big\| \big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)^{-1} \big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big) \big(y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big) \Big\|_{s,p} \leq$$
$$\leq \gamma_2 \big(\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\|_{s-1,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m} \big).$$

Звідси безпосередньо випливає права частина двобічної оцінки (3.19).

Теорему 3.3 доведено.

3.4. Гранична теорема для розв'язків багатоточкової крайової задачі у випадку $1 \leq p < \infty$

Багатоточкові крайові задачі є важливими прикладами найбільш загальних крайових задач, розглянутих вище. Отже, для них є правильними отримані результати про коректну розв'язність цих задач і неперервну залежність їх розв'язків за параметром. У даних підрозділах дослідимо залежні від параметра багатоточкові крайові задачі для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають заданий простір Соболєва. Використовуючи одержані результати, отримаємо явні достатні умови неперервності за параметром розв'язків цих задач.

Сформулюємо граничну теорему для розв'язків багатоточкової крайової задачі (3.22), (3.23) *у випадку* $1 \leq p < \infty$.

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ *розглянемо багатоточкову крайову задачу для системи*

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) := y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in (a,b). \tag{3.22}$$

Тут при кожному фіксованому значенні параметра ε *матриці-функції* $A(\cdot,\varepsilon)$ *належать простору* $(W_p^{s-1})^{m\times m}$ *та вектор-функція* $f(\cdot,\varepsilon)$ *— простору* $(W_p^{s-1})^m$.

Пов'яжемо з системою (3.22) *багатоточкову фредгольмову крайову умову*

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\sum_{l=0}^{s}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = q(\varepsilon), \tag{3.23}$$

де вектори $q(\varepsilon)$ *належать простору* $\mathbb{C}^m$ *та матриці* $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ *— простору* $\mathbb{C}^{m\times m}$.

Вектори і вектор-функції вважаємо записаними у вигляді стовпців. Використання у крайовій умові (3.23) *повторної суми за індексами* j *і* k *зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок* $t_{j,k}(\varepsilon)$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *в залежності від значень параметра* j.

У граничному випадку при $\varepsilon = 0$ *розглядаємо крайову задачу*

$$L(0)y(t,0) = f(t,0), \quad t \in (a,b), \tag{3.24}$$

$$B(0)y(\cdot,0) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=0}^{s} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j,0) = q(0), \tag{3.25}$$

де матриці $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, *точки* $t_j \in [a,b]$ *та вектор* $q(0) \in \mathbb{C}^m$ *є заданими.*

З огляду на неперервне вкладення

$$(W_p^s)^m \hookrightarrow (\mathbb{C}^{s-1})^m \tag{3.26}$$

ліва частина крайової умови (3.23) *має сенс для всіх розв'язків рівняння* (3.22). *Для кожного* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ *лінійне відображення* $y \mapsto B(\varepsilon)y$, *де* $y \in (W_p^s)^m$, *є лінійним неперервним оператором*

$$B(\varepsilon)\colon \left(W_p^s\right)^m \to \mathbb{C}^m. \tag{3.27}$$

Крайовій задачі (3.22), (3.23) *для кожного* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ *відповідає лінійний оператор*

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\colon \left(W_p^s\right)^m \to \left(W_p^{s-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{3.28}$$

Це обмежений фредгольмовий оператор з індексом нуль.

Розглянемо такі

Припущення *при* $\varepsilon \to 0+$:

(α) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ *для всіх* $j \in \{1,\dots,r\}$ *та* $k \in \{1,\dots,\omega_j(\varepsilon)\}$;

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ *для всіх* $j \in \{1,\dots,r\}$ *та* $l \in \{0,\dots,s\}$;

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \to 0$ *для всіх* $k \in \{1,\ldots,\omega_0(\varepsilon)\}$ *та* $l \in \{0,\ldots,s\}$.

Зауважимо, що для крайової задачі (3.22), (3.23) *не припускається, що коефіцієнти* $A(\cdot,\varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ *чи точки* $t_{j,k}(\varepsilon)$ *мають певну регулярність за параметром* ε *при* $\varepsilon > 0$. *Будемо вимагати, щоб для кожного фіксованого* $j \in \{1,\ldots,r\}$ *всі точки* $t_{j,k}(\varepsilon)$ *мали спільну границю при* $\varepsilon \to 0+$, *проте для точок нульової серії* $t_{0,k}(\varepsilon)$ *така вимога не висуватиметься.*

В умові (δ) *вираз* $\|\cdot\|$ *є нормою комплексної числової матриці; ця норма дорівнює сумі модулів усіх елементів матриці. Припущення* (β) *допускає, що коефіцієнти* $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ *можуть необмежено зростати при* $\varepsilon \to 0+$, *але не надто швидко. З умови* (δ) *випливає, що не потрібно вимагати збіжність точок* $t_{0,j}(\varepsilon)$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *на відміну від умови* (α).

Сформулюємо граничні теореми для розв'язків багатоточкової крайової задачі (3.22), (3.23) *у випадку* $1 \leqslant p < \infty$.

Розглянемо наступні

Припущення *при* $\varepsilon \to 0+$:

(γ_p) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(s)}(\varepsilon)\right\| \left|t_{j,k}(\varepsilon) - t_j\right|^{1/p'} = O(1)$ *для всіх* $j \in \{1,\ldots,r\}$ *і* $k \in \{1,\ldots,\omega_j(\varepsilon)\}$, *де* $1/p + 1/p' = 1$;

(γ') $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left|t_{j,k}(\varepsilon) - t_j\right| \to 0$ *для всіх* $j \in \{1,\ldots,r\}$, $k \in \{1,\ldots,\omega_j(\varepsilon)\}$ *і* $l \in \{0,\ldots,s-1\}$.

Теорема 3.4. *Нехай крайова задача* (3.22), (3.23) *при* $1 \leqslant p < \infty$ *задовольняє припущення* (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ). *Тоді вона задовольняє граничну умову* (II).

Якщо, крім того, виконані умови (0) *і* (I), *то для достатньо малих* ε *її розв'язок існує, єдиний та задовольняє граничне співвідношення*

$$\left\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\right\|_{s,p} \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Доведення. *Запишемо оператор* (3.27) *у вигляді скінченної суми* $r+1$ *доданків, розділених за серіями:*

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = B_0(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) + B_1(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) + \cdots + B_r(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon), \tag{3.29}$$

де

$$B_0(\varepsilon)y(t_{0,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{s} \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)),$$

$$B_1(\varepsilon)y(t_{1,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\omega_1(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{s} \beta_{1,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{1,k}(\varepsilon)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_r(\varepsilon)y(t_{r,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=r}^{\omega_r(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{s} \beta_{r,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{r,k}(\varepsilon)). \tag{3.30}$$

Згідно з теоремою Банаха–Штейнгауза достатньо показати, що норма оператора $B(\varepsilon)\colon (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^m$ *є обмеженою при* $0 < \varepsilon \ll 1$, *а також, що* $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *в* $\mathbb{C}^m$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *для кожної вектор-функції* y, *яка належить щільній множині* $(C^\infty)^m := C^\infty\big([a,b],\mathbb{C}^m\big)$ *у просторі* $(W_p^s)^m$.

Доведемо спочатку рівномірну по ε *обмеженість норми оператора*

$$B(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{r} B_j(\varepsilon).$$

Виберемо довільну вектор-функцію $y \in (W_p^s)^m$ *і достатньо малий параметр* $\varepsilon > 0$. *Згідно з крайовою умовою* (3.23) *маємо нерівність*

$$\begin{aligned}
&\big\|B_j(\varepsilon)y - B_j(0)y\big\| = \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{s} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{s} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \le \\
&\le \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{s} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\right\| + \\
&+ \sum_{l=0}^{s} \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\|.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Покажемо обмеженість норми оператора, що відповідає нульовій серії. Використовуючи неперервність вкладення (3.26)*, одержуємо нерівність*

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\right\| \le c_0 \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \|y\|_{s,p} \tag{3.32}$$

для всіх допустимих значень індексів $l \in \{0,\dots,s\}$ *і* $k \in \{1,\dots,\omega_0(\varepsilon)\}$*, де* c_0 *— норма оператора вкладення* (3.26)*. Ці та всі інші границі у доведенні розглядаємо за умови, що* $\varepsilon \to 0+$*.*

Крім того, для будь-яких $l \in \{0,\dots,s\}$ *і* $j \in \{1,\dots,r\}$ *маємо*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j)\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) + \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j)\right\| \le$$

$$\le \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\Big(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\Big)\right\| + \left\|\left(\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}\right) y^{(l)}(t_j)\right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}\right\| \|y\|_{s,p}. \tag{3.33}$$

Тут для $l = s$ *і кожного* $k \in \{1,\dots,\omega_j(\varepsilon)\}$ *виконується нерівність*

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(s)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(s)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(s)}(t_j)\right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(s)}(\varepsilon)\right\| c_1 \|y\|_{s,p} |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{1/p'},$$

де c_1 *— норма неперервного оператора вкладення простору Соболєва* W_p^s *в комплексний простір Гельдера* $C^{s-1,1/p'}\big([a,b]\big)$ *(див., наприклад, [106, Теорема 4.6.1(e)]). Якщо* $1/p' = 0$*, то останній простір є* C^{s-1} *і нерівність* (3.34) *правильна при* $c_1 := 2c_0$*.*

Крім того, для кожного $l \in \mathbb{Z}$, *де* $0 \le l \le s-1$, *за теоремою Лагранжа маємо*

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \max_{a\le t\le b} \left\|y^{(l+1)}(t)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \le \tag{3.34}$$
$$\le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| c_0 \|y\|_{s,p} |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| .$$

Із нерівностей (3.31) – (3.34) *та умов* (β), (γ_p), (γ'), (δ) *випливає*

$$\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| \le c\,\|y\|_{s,p},$$

де число $c > 0$ *не залежить від* $y \in (W_p^s)^m$ *і достатньо малого* $\varepsilon > 0$. *Отже, норма оператора* $B(\varepsilon)$ *обмежена при* $0 < \varepsilon \ll 1$.

Обґрунтуємо сильну збіжність оператора $B(\varepsilon)$ *до* $B(0)$. *Враховуючи умову* (δ) *і нерівність* (3.32), *маємо*

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\right\| \to 0. \tag{3.35}$$

Крім того, за умовою (β)

$$c_0 \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \|y\|_{s,p} \to 0. \tag{3.36}$$

Якщо y *належить* $(C^\infty)^m$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \max_{a\le t\le b} \left\|y^{(l+1)}(t)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0 \tag{3.37}$$

для всіх $l \in \{0, \dots, s\}$ *з урахуванням умов* (α) *і* (β). *Отже, з формул* (3.31), (3.35) – (3.37) *маємо збіжність* $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *в* $\mathbb{C}^m$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *для кожного* $y \in (C^\infty)^m$.

Перше твердження теореми 3.4 доведено. Друге твердження випливає з доведеного вище та [15, теорема 1].

Теорему 3.4 доведено.

Зазначимо, що системи умов (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ) *не гарантують рівномірну збіжність неперервних операторів* $B(\varepsilon)$ *до* $B(0)$ *при* $\varepsilon \to 0+$. *Тому теорема 3.4 не випливає із загальних фактів теорії лінійних операторів.*

Зауважимо, що в роботах Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [22, 23] досліджено багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в просторах Соболева-Слободецького W_p^s, *де* $1 \leq p < \infty$, *але в цих роботах точки відрізка* $[a, b]$, *які фігурують у крайовій умові, є фіксованими і не залежать від параметра. У роботі Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [12] досліджено некласичні багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь у просторах Соболева* W_p^n, *де* $1 \leq p < \infty$, *проте в цій роботі кількість точок у кожній серії не залежить від параметра* ε. *Випадок для просторів Соболева-Слободецького* W_p^s, *де* $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, *в якому точки відрізка* $[a, b]$, *які фігурують у крайовій умові, не фіксовані і залежать від параметра раніше не вивчався.*

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації досліджено найбільш загальні крайові задачі та найбільш загальні багатоточкові крайові задачі для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких пробігають простір Соболєва $(W_p^s)^m$, де $1 \leq p < \infty$. Одержано такі основні результати:

1. *Для найбільш загальних крайових задач, залежних від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^s)^m$ (теорема 3.2).*

2. *Показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва-Слободецького (теорема 3.2).*

3. *Встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкової крайової задачі при $\varepsilon = 0$ у нормованому просторі $(W_p^s)^m$ у випадку $1 \leq p < \infty$ (теорема 3.4).*

Результати третього розділу опубліковано у статтях [41, 42] та висвітлено в тезах конференцій [39, 40].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

1. *Знайдено характер розв'язності крайових задач для системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з найбільш загальними крайовими умовами, розв'язки яких належать простору Соболєва-Слободецького $(W_p^s)^m$, де $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.*

2. *Показано, що крайовим задачам для системи диференціальних рівнянь першого порядку відповідає фредгольмів оператор з індексом $m - r$ на парі нормованих просторів $(W_p^s)^m$ і $(W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r$ та встановлено критерій однозначної розв'язності цих задач.*

3. *Доведено, що вимірності ядра та коядра оператора крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку дорівнюють відповідно вимірності ядра та коядра введеної в роботі характеристичної матриці цієї крайової задачі.*

4. *Знайдено конструктивні достатні умови збіжності характеристичних матриць послідовності неоднорідних крайових задач.*

5. *Для крайових задач для системи диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від параметра $\varepsilon \geq 0$, встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків при $\varepsilon = 0$ у просторі $(W_p^s)^m$ та показано, що похибка і нев'язка розв'язків цих задач мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Соболєва-Слободецького.*

6. *Введено та досліджено найбільш загальний клас багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рів-*

нянь першого порядку, розв'язки яких належать простору Соболева-Слободецького $(W_p^s)^m$. *Встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків при* $\varepsilon = 0$ *у нормованому просторі* $(W_p^s)^m$ *у випадку* $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Атласюк О. М., Михайлець В. А. *Фредгольмові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. — 2018. —* ***70****, № 10. — С. 1324 – 1333. (Переклад англ. мовою:Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A. Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Ukrainian Math. J. — 2019. —* ***70****, № 10. — P. 1526 – 1537.)*

2. Атласюк О. М., Михайлець В. А. *Фредгольмові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. — 2018. —* ***70****, № 11. — С. 1457 – 1465. (Переклад англ. мовою: Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A. Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // Ukrainian Math. J. — 2019. —* ***70****, № 11. — P. 1677 – 1687.)*

3. Атласюк О. М. *Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Нелінійні коливання. — 2019. —* ***22****, № 1. — С. 18 – 26. (Переклад англ. мовою: Atlasiuk O. M. Limit theorems for solutions of multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. —* ***247****, № 2. — P. 238 – 247.)*

4. Атласюк О. М., Михайлець В. А. *Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Доповіді Національної академії наук України. — 2019, № 11. — С. 3 – 7.*

5. Атласюк О. М. *Про нетерові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // XIII-та Літня Школа "Аналіз, Топологія і Застосування", 29 липня – 11 серпня, 2018, Вижниця, Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, Львівський національний університет імені І. Франка, 2018. — С. 56.*

6. Атласюк О. М. *Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна конференція молодих математиків, 6 – 8 червня, 2019, Київ, Україна: Тези доповідей. — Інститут математики НАН України, 2019. — С. 49.*

7. Атласюк О. М. *Про нетерові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Міжнародна конференція "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919 – 1998), 20 – 26 червня, 2019, Світязь, Україна: Тези доповідей. — Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 2019. — С. 70 – 71.*

8. Атласюк О. М. *Про розв'язність одновимірних крайових задач у просторах Соболєва // Міжнародна науково-практична конференція "Шевченківська весна – 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз", 15 – 16 квітня, 2020, Київ, Україна: Тези доповідей. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2020. — С. 5 – 6.*

9. Атласюк О., Михайлець В. *Про неперервність за параметром розв'язків неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2020", 26 – 28 травня, 2020, Львів, Україна: Тези доповідей. — Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2020. — С. 1 – 2.*

10. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Москва: Физматгиз, 1955. — 410 с.*

11. Гихман И. И. *По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Український математичний журнал. — 1952. — № 4. — С. 215 – 219.*

12. Гнип Є. В., Кодлюк Т. І. *Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. —* ***12****, № 2. — С. 101 – 112.*

13. Гнип Є. В., Михайлець В. А. *Фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах Слободецького // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. —* ***13****, № 1. — С. 76 – 87.*

14. Гнип Є. В. *Неперервність за пераметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Слободецького // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. —* ***13****, № 2. — С. 101 – 110.*

15. Гнип Є. В., Михайлець В. А., Мурач О. О. *Про критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. —* ***13****, № 2. — С. 111 – 124.*

16. *Гнип Є. В. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач на просторах Соболєва–Слободецького. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2016. — 116 с.*

17. Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — Москва: Мир, 1971. — 392 с.*

18. Кигурадзе И. Т. *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. — 352 с.*

19. Кигурадзе И. Т. *Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. ВИНИТИ. — 1987. — **30**. — С. 3 – 103.*

20. *Кигурадзе И. Т. О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференциальные уравнения. — 2003. — **39**, № 2. — С. 198 – 209.*

21. Кодлюк Т. И., Михайлец В. А. *Непрерывность по параметру решений одномерных линейных краевых задач // Доповіді Національної академії наук України. — 2010. — № 11. — С. 7 – 11.*

22. Кодлюк Т. И. *Предельный переход в классе многоточечных краевых задач // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 2. — С. 203 – 216.*

23. Кодлюк Т. И., Михайлец В. А. *Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доповіді Національної академії наук України. — 2012. — № 11. — С. 15 – 19.*

24. *Кодлюк Т. І. Одновимірні крайові задачі з параметром в просторах Соболева. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2013. — 157 с.*

25. Кодлюк Т. И. *Матрицы Грина одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. —* ***11****, № 2. — С. 191 – 199.*

26. Красносельский М. А., Крейн С. Г. *О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи математических наук. — 1955. —* ***3****, № 10. — С. 147 – 153.*

27. Курцвейль Я., Ворель З. *О непрерывной зависимости решений линейных уравнений от параметра // Чехословацкий математический журнал. — 1957. —* ***7****, № 4. — С. 568 – 583.*

28. *Левин А. Ю. О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи // Доклады Академии наук СССР. — 1961. —* ***136****, № 5. — С. 1022 – 1025.*

29. *Левин А. Ю. Предельный переход для несингулярных систем* $\dot{X} = A_n(t)X$ *// Доклады Академии наук СССР. — 1967. —* ***176****, № 4. — С. 774 – 777.*

30. *Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестник Ярославского университета. — 1973. — № 5. — С. 105 – 132.*

31. *Левин А. Ю. О многоточечной краевой задаче // Научные доклады высшей школы. — 1985. — № 5. — С. 34 – 37.*

32. *Мазья В. Г. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. – Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986. – 404 с.*

33. *Маслюк Г. О. Багатоточкові крайові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. —* ***13****, № 2. — С. 193 – 203.*

34. *Маслюк Г. О., Солдатов В. О. Апроксимативні властивості багатоточкових крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n)}$ // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. —* ***14****, № 2. — С. 185 – 197.*

35. *Михайлец В. А., Рева Н. В. Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. —* ***5****, № 1. — С. 227 – 239.*

36. *Михайлец В. А., Рева Н. В. Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — № 8. — С. 28 – 30.*

37. *Михайлец В. А., Рева Н. В. Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — № 9. — С. 23 – 27.*

38. *Михайлець В.А., Скоробогач Т. Б. Про розв'язок одновимірних крайових задач у просторах Соболєва-Слободецького // Міжнародна науково-практична конференція "Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз", 15 – 16 квітня, 2020, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2020. — С. 33 – 34.*

39. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б. Про одновимірні фредгольмові крайові задачі з параметром у просторах Соболева-Слободецького // X Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 16 – 17 квітня, 2021, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — С. 35-36.*

40. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б. Про фредгольмові крайові задачі з параметром в просторах Соболева-Слободецького // Міжнародна конференція молодих математиків, 3 – 5 червня, 2021, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2021. — С. 69.*

41. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б. Фредгольмові крайові задачі в просторах Соболева-Слободецького // Укр. мат. журн. — 2021. —* ***73****, № 7. — С. 920 – 930.*
(Переклад англ. мовою подано до друку)

42. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б. Фредгольмові крайові задачі з параметром в просторах Соболева- Слободецького // Доповіді національної академії наук України — 2021, № 4. — С. 3 – 8. DOI: 10.15407/dopovidi2021.03.03.*

43. *Михайлец В. А., Чеханова Г. А. Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. —* ***11****, № 2. — С. 268 – 274.*

44. *Михайлец В. А., Чеханова Г. А. Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доповіді Національної академії наук України. — 2014. — № 7. — С. 24 – 28.*

45. *Мурач О. О., Солдатов В. О. Критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. —* ***13****, № 1. — С. 256 – 273.*

46. *Нгуен Тхе Хоан О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1993. —* ***29****, № 6. — С. 970 – 975.*

47. *Покорный Ю. В. О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи // Матем. Заметки. — 1968. —* ***4****, № 5. — С. 533 – 540.*

48. *Покорный Ю. В. О неклассической задаче Валле–Пуссена // Диф. уравнения. — 1978. —* ***14****. — С. 1018 – 1027.*

49. *Покорный Ю. В. Вопросы качественной теории краевой задачи Валле–Пуссена. Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз. – мат. наук. — Ленинград, 1980. — 20 с.*

50. *Пономарев В. Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости многоточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференциальные уравнения. — 1978. —* ***14****, № 5. — С. 929 – 932.*

51. *Рева Н. В. Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2009. — 148 с.*

52. Самойленко А. М. *Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Український математичний журнал. — 1962. —* ***14****, № 3. — С. 289 – 298.*

53. Самойленко А. М. *Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра // Доповіді Академії наук УРСР. — 1962. — № 10. — С. 1290 – 1293.*

54. Самойленко А. М., Ронто Н. И. *Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Київ: Вища школа, 1976. — 223 с.*

55. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва: ИЛ, 1953. — 346 с.*

56. *Солдатов В. О. Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. —* ***12****, № 2. — С. 327 – 337.*

57. *Солдатов В. О. Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. —* ***13****, № 2. — С. 267 – 280.*

58. *Солдатов В. О. Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2016. — 120 с.*

59. Хасеинов К. А. *Начальная и многоточечная задачи для линейных дифференциальных уравнений и характеристические уравнения типа Риккати: Автореф. дис. канд. фіз. – мат. наук. — Москва, 1984. — 223 с.*

60. Хасеинов К. А. *Сопряженная линейная задача и функции Грина: Методы оптимизации и их приложения // Тематич. сб. науч. тр. ВЦСО АНСССР, Иркутск. — 1988. — С. 238 – 243.*

61. Хасеинов К. А. *Построение сопряженной задачи к линейной многоточечной // Матер. 10-ой межвуз. конф. по математике и механике, Алматы. — 2005. — **2**. — С. 317 – 322.*

62. *Чеханова Г. А. Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 2. — С. 260 – 279.*

63. *Чеханова Г. А. Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 4–5. — С. 532 – 541.*

64. Чеханова Г. О. *Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач та їх похідних. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02. — Київ, 2014. — 122 с.*

65. Чичкин Е. С. *Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач // Изв. вузов Математика. — 1962. — **27**, № 2. — С. 170 – 179.*

66. *Ashordia M. Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1996. —* ***46****, № 3. — P. 385 – 404.*

67. Atlasiuk O. M. *On Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // International scientific conference "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies" dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, 17 – 19 September, 2018, Chernivtsi, Ukraine: Abstracts. — Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2018. — P. 13.*

68. Atlasiuk O. M. *On Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // International conference "Problems of Theoretical and Mathematical Physics" dedicated to the 110th anniversary of M. M. Bogolyubov (1909 – 1992), 24 – 26 September, 2019, Kyiv, Ukraine: Abstracts. — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of NAS of Ukraine, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. — P. 91.*

69. Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A. *On linear boundary-value problems for differential systems in Sobolev spaces // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE — 2019", 7 – 9 December, 2019, Tbilisi, Georgia: Abstracts. — Tbilisi: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, 2019. — P. 19 – 22.*

70. Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A. *On Fredholm parameter-dependent boundary-value problems in Sobolev spaces // Dopov. Nats. Acad. Nauk Ukr. — 2020. — № 6. — P. 3 – 6.*

71. Beesack P. R. *On the Green's function of an a-point boundary-value problem // Pac. J. of Math. — 1962. —* ***12****, № 3. — P. 801 – 812.*

72. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv+317 p.*

73. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. I. General theory. — New York; London: Interscience Publishers, 1958. — xiv+858 p.*

74. Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A. *Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev space // Ukrainian Math. J. — 2015. —* ***67****, № 5. — P. 658 – 667.*

75. Gnyp E. V. *Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems with respect to the parameter in Slobodetsky spaces // Ukrainian Math. J. — 2016. —* ***68****, № 6 — P. 746 – 756.*

76. Gnip E. V. *Continuity with respect to the parameter of the solutions of one-dimensional boundary value problems in Slobodetskii spaces // Ukrainian Math. J. – 2016. – V. 68, № 6. – P. 849 – 861.*

77. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A. Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials // Mathematical Notes. — 2010. —* ***87****, № 1–2. — P. 287 – 292.*

78. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A. Regularization of singular Sturm-Liouville equations // Methods of Functional Analisys and Topology. — 2010. —* ***16****, №. 2. — P. 20 – 130.*

79. Goriunov A. S., Mikhailets V. A. *Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukrainian Math. J. — 2012. —* ***63****, № 9 — P. 1361 – 1378.*

80. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K. Formally self-ajoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electronic Journal of Differential Equations. — 2013. —* ***2013****, № 101. — P. 1 – 16.*

81. Graves L. M. *Theory of function of real variables // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1948. —* ***54****, № 5. — P. 487 – 489.*

82. Grimm L. J., Eloe P. W. *Multipoint BVP for ODE // Differential Equations and Applications (I): Proc. of the 2 Conference, "Rousse 81". — Bulgaria, 1981.*

83. Jackson L. K. *Existense and uniqueness of solutions of boundary value problems for Lipschitz equations // J. Differential Equations. — 1979. —* ***32****. — P. 76 – 90.*

84. Hartman Ph. *Ordinary differential eqations. — New York; London; Sydney: John Wiley & Sons, 1964. — 632 p.*

85. Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators. III: Pseudo-differential operators. — Berlin: Springer, 1985. — viii+525 p.*

86. Hnyp Y. V., Mikhailets V. A., Murach A. A. *Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Electronic Journal of Differential Equations. — 2017. —* ***2017****, № 81. — P. 1 – 13.*

87. Ioffe A. D., Tihomirov V. M. *Theory of extremal problems. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979. — 399 p.*

88. Kato T. *Perturbation theory for linear operators. — New York: Springer-Verlag, 1966. — xix+592 p.*

89. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V. Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukrainian Math. J. — 2013. —* ***65****, № 1. — P. 77 – 90.*

90. Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A. *Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. —* ***190****, № 4. — P. 589 – 599.*

91. Kurzweil J. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1957. —* ***7****, № 3. — P. 418 – 449.*

92. Kurzweil J. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1959. —* ***9****, № 4. — P. 564 – 573.*

93. *Masliuk H., Soldatov V. One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Hölder spaces // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2018. —* ***24****, № 2. — P. 143 – 151.*

94. *Maslyuk H. O. Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Hölder spaces with respect to the parameter // Ukrainian Math. J. — 2017. —* ***69****, № 1. — P. 101 –110.*

95. *Maslyuk H. O., Mykhailets V. A. Continuity in the parameter for the solutions of one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher orders in Slobodetskii spaces // Ukrainian Math. J. — 2018. —* ***70****, № 3. — P. 467 – 476.*

96. *Mikhailets V. /A. , Skorobohach T. B. On solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev—Slobodetskiy spaces // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., — 2020, № 4. — P. 10 – 14.*

97. *Mikhailets V. A., Skorobohach T. B. On Solvability of Inhomogeneous Boundary-Value Problems in Fractional Sobolev Spaces // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations (QUALITDE-2021), December 18-20, 2021, Tbilisi, Georgia: Abstracts. Tbilisi: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, — 2021. — P. 140 – 143.*

98. Mikhailets V. A., Chekhanova G. A. *Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. —* ***204****, № 3. — P. 333 – 342.*

99. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. O. Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2016. — № 87. — P. 1 – 16.*

100. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: North-Holland Mathematical Studies, Vol. 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, 2006.*

101. *Opial Z. Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // Journal of Differential Equations. — 1967. — № 3. — P. 571 – 579.*

102. *Reid W. T. Some limit theorems for ordinary differential systems // Journal of Differential Equations. — 1967. —* ***3****, № 3. — P. 423 – 439.*

103. Samoilenko A. M. Certain questions in the investigation of differential equations with an irregular right side // Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. — 1965. — ***11****, № 3 – 4. — P. 85 – 92.*

104. Soldatov V. O. On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ *// Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. —* ***67****, № 5. — P. 785 – 794.*

105. Tamarkin Y. D. *A lemma of the theory of linear differential systems // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1930. – № 36. – P. 99 – 102.*

106. Triebel H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators. — Berlin: North–Holland Publication, 1978. — 528 p.*

107. Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients. — New York; Toronto: Halsted Press, 1975. — xii+386 p.*

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. *Mikhailets V. A., Skorobohach T. B. On solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev-Slobodetskiy spaces // Dopov. Nats. Acad. Nauk Ukr. — 2020, № 4. — P. 10 – 14. DOI: 10.15407/dopovidi2020.04.010*

2. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б. Фредгольмові крайові задачі в просторах Соболева-Слободецького // Укр. мат. журн. — 2021. —* ***73****, № 7. — С. 920 – 930.*

   Переклад англ. мовою:

   Mikhailets V. A., Skorobohach T. B. Fredholm boundary-value problems in Sobolev-Slobodetsky spaces // Ukrainian Mathematical Journal — 2021, № 7. — P. 1071 – 1083. DOI: 10.1007/s11253-021-01977-0, SCOPUS Q2, Web of Science Core Collection

3. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б. Фредгольмові крайові задачі з параметром в просторах Соболева- Слободецького // Доповіді національної академії наук України — 2021, № 4. — С. 3 – 8. DOI: 10.15407/dopovidi2021.03.03.*

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. *Михайлець В.А., Скоробогач Т. Б. Про розв'язок одновимірних крайових задач у просторах Соболєва-Слободецького // Міжнародна науково-практична конференція "Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз", 15 – 16 квітня, 2020, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2020. — С. 33 – 34.*

2. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б. Про одновимірні фредгольмові крайові задачі з параметром у просторах Соболєва-Слободецького // X Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 16 – 17 квітня, 2021, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — С. 35-36.*

3. *Михайлець В. А., Скоробогач Т. Б. Про фредгольмові крайові задачі з параметром в просторах Соболєва-Слободецького // Міжнародна конференція молодих математиків, 3 – 5 червня, 2021, м. Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2021. — С. 69.*

4. *Mikhailets V. A., Skorobohach T. B. On Solvability of Inhomogeneous Boundary-Value Problems in Fractional Sobolev Spaces // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations (QUALITDE-2021), December 18-20, 2021, Tbilisi, Georgia: Abstracts. Tbilisi: A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, — 2021. — P. 140 – 143.*

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- *Міжнародній науково-практичній конференції "Шевченківська весна — 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз", 15 – 16 квітня, 2020 року, м. Київ,* ***Україна****;*
- *X Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків, 16 – 17 квітня, 2021 року, м. Київ,* ***Україна****;*
- *Міжнародній конференції молодих математиків, 3 – 5 червня, 2021 року, м. Київ,* ***Україна****;*
- *Міжнародному семінарі з Питань якісної теорії диференціальних рівнянь "QUALITDE – 2021", 18 – 20 грудня, 2021 року, м. Тбілісі,* ***Грузія****.*