Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ДЯЧЕНКО ОЛЕКСАНДР ВІТАЛІЙОВИЧ

УДК 517.956.4

ДИСЕРТАЦІЯ

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

113 – Прикладна математика

Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________________________ О. В. Дяченко

Науковий керівник
Лось Валерій Миколайович
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2023

АНОТАЦІЯ

Дяченко О. В. Мішані задачі для параболічних систем в узагальнених просторах Соболєва. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика. — Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, 2023.

Дисертація присвячена дослідженню характеру розв'язності та регулярності розв'язків лінійних мішаних (тобто початково-крайових) задач для параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку в шкалах узагальнених гільбертових анізотропних просторів Соболєва. Ці простори дають широке узагальнення анізотропних версій класичних гільбертових просторів Соболєва, які зазвичай застосовуються до параболічних рівнянь. Розглядаються крайові умови Діріхле та загальні крайові умови першого порядку.

В анізотропних просторах Соболєва і Гельдера параболічні мішані задачі досліджено у працях М. С. Аграновича, М. І. Вішика, В. О. Солонникова, О. О. Ладиженської, Н. М. Уральцевої, Ж.-Л. Ліонса, Е. Мадженеса, С. Д. Ейдельмана, С. Д. Івасишена, М. В. Житарашу, Я. А. Ройтберга та інших математиків (1962 – 1998). Ними було встановлено низку фундаментальних результатів про коректну розв'язність (за Адамаром) скалярних і матричних параболічних початково-крайових задач на відповідних парах вказаних просторів як додатних, так і від'ємних (стосовно просторів Соболєва) порядків.

В останні роки В. М. Лось, В. А. Михайлець і О. О. Мурач (2013 – 2021) розробили теорію розв'язності скалярних параболічних мішаних задач (для одного диференціального рівняння) в узагальнених гільбертових анізотропних просторах Соболєва. Регулярність (інакше кажучи, гладкість) належних цим просторам розподілів задана парою дійсних чисел і радіальною функцією, яка повільно змінюється на нескінченності та характеризує додаткову регулярність стосовно основної гладкості, заданої числами. Завдяки функціональному параметру шкала цих просторів тонше градуйована, ніж класичні шкали просторів Соболєва і Гельдера. Крім того, вона отримується методом квадратичної інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових анізотропних просторів Соболєва, що дозволяє використовувати класичні результати про характер розв'язності параболічних мішаних задач у соболєвських просторах. Використання узагальнених просторів Соболєва дозволило встановити нові результати про коректну розв'язність скалярних параболічних початково-крайових задач і отримати нові тонкі й точні умови регулярності розв'язків у порівнянні з класичними результатами.

Відмітимо, що різні простори узагальненої гладкості виявилися корисними в теорії рівнянь з частинними похідними L. Hormander (1983), F. Nicola та L. Rodino (2010), B. Paneah (2000) та теорії випадкових процесів N. Jacob (2001, 2002, 2005). Зокрема, монографія В. А. Михайлеця і О. О. Мурача (2014) представляє теорію еліптичних крайових задач для ізотропних аналогів просторів, що використовуються в дисертації.

Параболічні мішані задачі для систем диференціальних рівнянь другого порядку мають велике прикладне значення, оскільки служать математичними моделями багатьох природничих явищ.

Отже, дослідження мішаних задач для параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку в шкалах узагальнених просторів Соболєва є актуальним і досить непростим завданням. Його трудність пов'язана, зокрема, з тим, що умови узгодження правих частин мішаної задачі для систем диференціальних рівнянь є істотно складнішими, ніж для одного рівняння.

Дисертація складається з анотації (двома мовами — українською та англійською), вступу, основної частини з трьох розділів, висновків до роботи, списку використаних джерел і додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження, зазначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано, де було опубліковано та апробовано результати дисертації.

У першому розділі подано огляд літератури, присвяченої дослідженню параболічних мішаних задач у різних шкалах функціональних просторів, описано основний метод дослідження — квадратичну інтерполяцію (з функціональними параметром) пар гільбертових просторів та деякі її необхідні властивості й наведено відомості про анізотропні та ізотропні узагальнені гільбертові простори Соболєва, пов'язані з параболічною мішаною задачею, а також їх зв'язок з класичними просторами Соболєва за допомогою вказаної інтерполяції.

У другому розділі проведено аналіз характеру розв'язності неоднорідних лінійних початково-крайових параболічних задач у багатовимірному циліндрі для систем диференціальних рівнянь другого порядку в узагальнених гільбертових анізотропних просторах Соболєва. Доведено, що неперервні оператори, породжені цими задачами, встановлюють ізоморфізми на придатних парах зазначених просторів, тобто задачі є коректно розв'язними на цих парах.

У третьому розділі отримано нові достатні умови глобальної та локальної узагальненої або класичної регулярності розв'язків досліджуваних параболічних задач, а також знайдено нові достатні умови, за яких узагальнений розв'язок задачі є класичним. Ці умови сформульовано в термінах приналежності правих частин задач узагальненим просторам Соболєва та є точними на класі цих просторів.

У додатку наведено список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію її результатів.

Результати дисертації, які визначають її наукову новизну:

1. Встановлено теорему про коректну розв'язність неоднорідних лінійних параболічних початково-крайових задач для систем диференціальних рівнянь другого порядку на придатних парах узагальнених гільбертових анізотропних просторах Соболєва, тобто доведено, що оператори, породжені вказаними задачами, встановлюють ізоморфізми на цих парах.

2. Знайдено достатні умови глобальної (в усьому циліндрі аж до його межі) регулярності розв'язків досліджуваних задач в узагальнених просторах Соболєва.

3. Знайдено достатні умови локальної (в заданій частині циліндра) регулярності розв'язків зазначених задач в узагальнених просторах Соболєва.

4. Отримано нові достатні умови, за яких вказані узагальнені частинні похідні розв'язків цих задач є неперервними в заданій частині циліндра.

5. Знайдено нові достатні умови класичності узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

Отримані в дисертації результати можуть бути застосовані у дослідженні широкого класу практичних задач, для яких параболічні системи служать математичними моделями, зокрема, у вивченні процесів тепломасообміну, біологічної та хімічної кінетики. Розроблена методика може бути використана у дослідженні параболічних мішаних задач для систем диференціальних рівнянь довільних порядків.

Ключові слова: параболічне рівняння, система диференціальних рівнянь, крайова задача, узагальнений простір Соболєва, повільно змінна функція, властивість ізоморфізму, інтерполяція з функціональним параметром, узагальнений розв'язок, однозначна розв'язність, розподіл, локальна регулярність, класичний розв'язок.

ABSTRACT

Diachenko O. V. Mixed problems for parabolic systems in generalized Sobolev spaces. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the academic degree Doctor of Philosophy in speciality 113 – Applied Mathematics. National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2023.

The thesis is devoted to the investigation of the solvability character and the solutions regularity of linear mixed (i.e. initial-boundary-value) problems for Petrovskii parabolic systems of second-order differential equations in scales of generalized Hilbert anisotropic Sobolev spaces. These spaces give a broad generalization of anisotropic versions of classical Hilbert Sobolev spaces, which are usually applied to parabolic equations. We consider the Dirichlet boundary conditions and general first-order boundary conditions.

In anisotropic Sobolev spaces and Hölder spaces, parabolic mixed problems were investigated in the works by M. S. Agranovich, M. I. Vishik, V. A. Solonnikov, O. A. Ladyzhenskaja, N. N. Ural'tzeva, J.-L. Lions, E. Magenes, S. D. Eidel'man, S. D. Ivasyshen, N. V. Zhytarashu, Ya. A. Roitberg and other mathematicians (1962 – 1998). They established a number of fundamental results about the well-posedness (in the sense of Hadamard) of scalar and matrix parabolic initial–boundary–value problems on appropriate pairs of the indicated spaces of both positive and negative (concerning Sobolev spaces) orders.

In recent years, V. M. Los, V. A. Mikhailets, and O. O. Murach (2013 – 2021) elaborated a theory of solvability of scalar parabolic mixed problems (for single differential equation) in generalized Hilbert anisotropic Sobolev spaces. The

regularity (otherwise saying, smoothness) of distributions belonging to these spaces is given by a pair of real numbers and by a radial function that varies slowly at infinity and characterizes a supplementary regularity with respect to the main smoothness given by the numbers. Owing to the function parameter, the scale of these spaces is calibrated more finely than the classical scales of Sobolev spaces and Hölder spaces. Moreover, this scale is obtained by the method of the quadratic interpolation with a function parameter of pairs of Hilbert anisotropic Sobolev spaces, which allows using the classical results about the character of solvability of parabolic mixed problems in Sobolev spaces. The use of generalized Sobolev spaces allowed ones to establish new results on the well-posedness of scalar parabolic initial-boundary-value problems and to obtain new fine and exact conditions for regularity of solutions as compared with the classical results.

Note, that various spaces of generalized smoothness have proven useful in the theory of partial differential equations L. Hormander (1983), F. Nicola, L. Rodino (2010), B. Paneah (2000) and the theory of random processes N. Jacob (2001, 2002, 2005). In particular, the monograph of V. A. Mikhailets and O. O. Murach (2014) presents the theory of elliptic boundary value problems for isotropic analogues of spaces used in the thesis.

Parabolic mixed problems for systems of second-order differential equations are of great practical importance because they serve as mathematical models of many natural phenomena.

Thus, the investigation of mixed problems for Petrovskii parabolic systems of second-order differential equations in scales of generalized Sobolev spaces is an urgent and difficult enough task. Its difficulty is specifically due to the fact that the compatibility conditions for the right-hand sides of the mixed problem for a system of differential equations are far more complicated than those for a single equation.

The thesis consists of the abstract (in two languages, Ukrainian and English), introduction, the main part divided in three chapters, conclusions to the work, list of references, and appendix.

The introduction substantiates the urgency of the research topic, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of the research, indicates the scientific novelty and practical significance of the obtained results, the connection of the work with scientific topics, and the applicant's personal contribution, and indicates where the thesis results were published and approbated.

The first chapter gives a survey of the literature devoted to the investigation of parabolic mixed problems in various scales of function spaces, describes the main research method—quadratic interpolation (with a function parameter) of pairs of Hilbert spaces—and some of its necessary properties, and presents information about anisotropic and isotropic generalized Hilbert Sobolev spaces related to the parabolic mixed problem and also about their connection with the classical Sobolev spaces via the interpolation.

The second chapter gives the analysis of the solvability character of inhomogeneous linear initial-boundary-value parabolic problems in a many-dimensional cylinder for systems of second-order differential equations in generalized Hilbert anisotropic Sobolev spaces. We prove that continuous operators induced by these problems set isomorphisms on appropriate pairs of the mentioned spaces, i.e. that the problems are well posed on these pairs.

The third chapter gives new sufficient conditions for global and local generalized or classical regularity of the solutions to the parabolic problems under investigation, and also yields new sufficient conditions for the generalized solution of the problem to be classical. These conditions are formulated in terms of the belonging of the right-hand sides of the problems to generalized Sobolev spaces and are exact on the class of these spaces.

The appendix contains the list of the applicant's publications on the thesis topic and the information about the approbation of its results.

The results of the thesis that determine its scientific novelty:

1. We have established a theorem on the well-posedness of inhomogeneous linear parabolic initial–boundary–value problems for systems of second-order differential equations on appropriate pairs of generalized Hilbert anisotropic Sobolev spaces; i.e., we have proved that operators induced by the indicated problems set isomorphisms on these pairs.

2. We have found sufficient conditions for the global regularity (i.e. on the whole cylinder up to its boundary) of solutions to the problems under investigation in generalized Sobolev spaces.

3. We have found sufficient conditions for the local regularity (i.e. in a given part of the cylinder) of solutions to the mentioned problems in generalized Sobolev spaces.

4. We have obtained new sufficient conditions for indicated generalized partial derivatives of solutions of these problems to be continuous in a given part of the cylinder.

5. We have found new sufficient conditions for generalized solutions of the problems under investigation to be classical.

The results obtained in the thesis can be used in the investigation of a broad class of practical problems for which parabolic systems serves as mathematical models, specifically in the study of the heat-mass-transfer processes, biological and chemical kinetics. The developed method can be used in the study of parabolic mixed problems for systems of differential equations of arbitrary orders.

Key words: Parabolic equation, system of differential equations, boundary value problem, generalized Sobolev space, slowly varying function, isomorphism property, interpolation with function parameter, generalized solution, unique solvability, distribution, local regularity, classical solution.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. *Diachenko O., Los V.* Some problems for Petrovskii parabolic systems in generalized Sobolev spaces // J. Elliptic Parabol. Equ. – 2022. – **8**. – P. 313–329. DOI: https://doi.org/10.1007/s41808-022-00154-z
SCOPUS, SCImago Journal and Country Rank Q2.

2. *Дяченко О. В., Лось В. М.* Умови регулярності розв'язків деяких параболічних систем // Укр. матем. журн. — 2022. — **74**, № 8. — С. 1107 – 1117. DOI: https://doi.org/10.37863/umzh.v74i8.7225
Категорія А.
Переклад англ. мовою:
Diachenko O. V., Los V. M. Regular conditions for the solutions to some parabolic systems // Ukrainian Math. J. – 2023. – **74**, № 8. – P. 1263–1274. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-023-02133-6
SCOPUS, SCImago Journal and Country Rank Q3.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

3. *Дяченко О., Лось В.* Про деякі мішані задачі для параболічних за Петровським систем у просторах Хермандера // Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування: Матеріали міжнародної наукової конференції присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана, 16-19 вересня 2020р. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2020. – С. 120 – 121.

4. *Дяченко О.* Про регулярність розв'язків деяких параболічних систем // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (23–25 травня 2023 р.). Тези доповідей. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023– С. 341 – 342.

5. *Дяченко О.* Про класичність узагальнених розв'язків неоднорідних крайових задач для параболічних систем другого порядку // Математика та інформаційні технології: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. – С. 189 – 190.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисертація присвячена дослідженню розв'язності та властивостей регулярності узагальнених розв'язків крайових задач для параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами Діріхле або крайовими умовами першого порядку в шкалах гільбертових анізотропних узагальнених просторів Соболєва.

Актуальність теми. До недавнього часу для дослідження параболічних початково-крайових задач використовували, як правило, анізотропні версії класичних просторів Гельдера або просторів Соболєва. Це праці М. С. Аграновича і М. І. Вішика [1], В. О. Солоннікова, О. О. Ладиженської і Н. М. Уральцевої [14] В. О. Солоннікова [23], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49], А. Фрідмана [24], С. Д. Івасишена [9, 10], С. Д. Ейдельмана і М. В. Житарашу [35], І. Я. Ройтберг і Я. А. Ройтберга [20] та інших математиків.

В останні десятиріччя до параболічних задач більш активно застосовуються інші класи функціональних просторів. Це простори зі змішаними нормами, простори Трібеля–Лізоркіна, вагові простори (див., наприклад, [30, 33, 39, 47, 64]); в просторах узагальненої гладкості побудовано теорію розв'язності скалярних параболічних задач в працях [51–53, 56–58]. Отримані результати викладено в монографії [16]. Останні простори дають широке узагальнення анізотропних версій класичних гільбертових просторів Соболєва, які зазвичай застосовуються до параболічних рівнянь. Ця гладкість визначається парою дійсних чисел і радіальною функцією, яка повільно змінюється на нескінченності та характеризує додаткову гладкість по відношенню до гладкості, заданої числами. За рахунок параметризації цих просторів функціональним параметром, їх шкала тонше градуйована, ніж класичні шкали просторів Соболєва і Гельдера. Тому використання просторів узагальненої анізотропної гладкості дозволило отримати нові тонкі і точні умови гладкості розв'язків у порівнянні з класичними результатами у вище згаданих шкалах просторів. Для параболічних за Петровським систем в просторах узагальненої гладкості вивчався лише окремий випадок крайової задачі з однорідними початковими даними Коші, див. [54, 55].

Відмітимо, що різні простори узагальненої гладкості виявилися корисними в теорії рівнянь з частинними похідними [37, 38, 60, 62, 63] та теорії випадкових процесів [41]. Зокрема, монографія [60] представляє теорію еліптичних крайових задач для ізотропних аналогів просторів, що використовуються в дисертації.

Крайові задачі для параболічних диференціальних рівнянь другого порядку мають велике прикладне значення, оскільки є математичними моделями багатьох природничих задач. Наприклад, мішана задача для системи двох диференціальних рівнянь другого порядку з двома крайовими умовами, одна з яких Діріхле, друга – Неймана виникає, зокрема, в теорії тепломасообміну [34, п.2.4]. Тому природньо виникає окремий інтерес до дослідження крайових задач для диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь другого порядку (див., наприклад, [14,24,45,48,58]).

З огляду на вищесказане, задача дослідження розв'язності та властивостей регулярності узагальнених розв'язків неоднорідних крайових задач для параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку в шкалах просторів узагальненої анізотропної гладкості є актуальною науковою проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертацію виконано на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені ігоря Сікорського" згідно із загальним планом роботи у рамках науково-дослідницької теми "Інформаційно-аналітична система для математичного моделювання та управління соціальними ризиками з застосуванням у техніці та медицині" (номер державної реєстрації 0120U102216).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження є аналіз характеру розв'язності та властивостей регулярності узагальнених розв'язків лінійних неоднорідних крайових задач для параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами Діріхле або крайовими умовами першого порядку в шкалах гільбертових анізотропних узагальнених просторів Соболєва.

Об'єктом дослідження є крайові задачі для лінійних неоднорідних параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку та гільбертові анізотропні узагальнені простори Соболєва пов'язані з ними.

Предметом дослідження є характер розв'язності та властивості регулярності узагальнених розв'язків лінійних неоднорідних параболічних крайових задач для систем диференціальних рівнянь другого порядку в узагальнених просторах Соболєва.

Завдання дослідження:

1. Встановити теорему про коректну розв'язність неоднорідних лінійних параболічних початково-крайових задач для систем диференціальних рівнянь другого порядку на придатних парах узагальнених гільбер-

тових анізотропних просторах Соболєва, тобто доведено, що оператори, породжені вказаними задачами, встановлюють ізоморфізми на цих парах.

2. Встановити достатні умови глобальної (в усьому циліндрі аж до його межі) регулярності розв'язків досліджуваних задач в узагальнених просторах Соболєва.

3. Встановити достатні умови локальної (в заданій частині циліндра) регулярності розв'язків цих задач в узагальнених просторах Соболєва.

4. Знайти достатні умови, за яких вказані узагальнені похідні розв'язків цих задач є неперервними в заданій частині циліндра.

5. Знайти достатні умови класичності узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи функціонального аналізу та теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено теорему про коректну розв'язність неоднорідних лінійних параболічних початково-крайових задач для систем диференціальних рівнянь другого порядку на придатних парах узагальнених гільбертових анізотропних просторах Соболєва, тобто доведено, що оператори, породжені вказаними задачами, встановлюють ізоморфізми на цих парах.

2. Знайдено достатні умови глобальної (в усьому циліндрі аж до його межі) регулярності розв'язків досліджуваних задач в узагальнених просторах Соболєва.

3. Знайдено достатні умови локальної (в заданій частині циліндра) регулярності розв'язків цих задач в узагальнених просторах Соболєва.

4. Отримано нові достатні умови, за яких вказані узагальнені похідні розв'язків цих задач є неперервними в заданій частині циліндра.

5. Знайдено нові достатні умови класичності узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

Результати дисертації є завершеними.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Отримані в дисертації результати можуть бути застосовані у дослідженні широкого класу практичних задач, для яких параболічні системи служать математичними моделями, зокрема, у вивченні процесів тепломасообміну, біологічної та хімічної кінетики. Розроблена методика може бути використана у дослідженні параболічних мішаних задач для систем диференціальних рівнянь довільних порядків.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дисертації та постановка задач належать науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору В. М. Лосю. Всі наукові результати, які винесено на захист, отримано здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах [2,5,32] В. М. Лосю належить постановка задач та обговорення результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародній науковій конференції присвяченій 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана «Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування», 16-19 вересня 2020 р., м. Чернівці, Чернівецький нац. ун-т;

- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023», 23–25 травня 2023 р., м. Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;

- Міжнародній науковій конференції присвяченій 55-річчю факультету математики та інформатики «Математика та інформаційні технології», 28–30 вересня 2023 р., м. Чернівці, Чернівецький нац. ун-т.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 5 наукових працях. Дві з них [5, 32] є статтями у фахових наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus і Web of Science Core Collection та належать згідно SCImago Journal and Country Rank до Q2 і Q3 відповідно. Три тези [2–4] опубліковано у матеріалах міжнародних математичних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що налічує 64 найменування, і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи складає 99 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації. У *вступі* обгрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету і задачі дослідження, сформульовано наукову новизну отриманих результатів. Наведено відомості про публікації та апробацію роботи.

У *першому* розділі наведено: огляд літератури за темою дисертації; основний метод дослідження – квадратичну інтерполяцію пар гільбертових просторів та деякі необхідні її властивості; відомості про анізотропні та ізотропні гільбертові узагальнені простори Соболєва, пов'язані з параболічною задачею та їх інтерполяційний зв'язок з класичними просторами Соболєва.

За означенням [16, п.1.2], комплексний лінійний простір $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)$, де $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, $2 \leq k \in \mathbb{Z}$, складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ таких, що їх (повне) перетворення Фур'є $\widetilde{w}$ є функцією, яка локально інтегровна на $\mathbb{R}^k$ за Лебегом і задовольняє умову

$$\|w\|_{H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)} := \Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}}\int\limits_{\mathbb{R}}\bigl(1+|\xi|^2+|\eta|\bigr)^s\,\varphi^2\bigl((1+|\xi|^2+|\eta|)^{1/2}\bigr)\,|\widetilde{w}(\xi,\eta)|^2\,d\xi\,d\eta\Biggr)^{1/2} < \infty, \tag{1}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^{k-1}$ і $\eta \in \mathbb{R}$. Цей простір гільбертовий і сепарабельний відносно норми (1). Тут клас $\mathcal{M}$ складається [18, п.1.3.3] з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, таких що обидві функції φ і $1/\varphi$ обмежені на кожному компакті $[1,d]$, де $1 < d < \infty$, і φ повільно змінна функція за Й. Карамата на нескінченності, тобто $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to 1$ при $r \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Параболічну задачу розглядаємо у циліндрі $\Omega := G \times (0,\tau)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, де ціле число $n \geq 2$ і дійсне число $\tau > 0$. Його основою є обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Через $S := \Gamma \times (0,\tau)$ позначаємо бічну поверхню циліндра Ω.

Гільбертовий анізотропний простір $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ означається як простір звужень на Ω усіх розподілів з $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, а гільбертовий анізотропний простір $H^{s,s/2;\varphi}(S)$ на S означається за простором $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n})$ за допомогою спеціальних локальних карт на бічній поверхні циліндра. Анологічно означаються ізотропні простори $H^{s;\varphi}(G)$ і $H^{s;\varphi}(\Gamma)$, задані в області G та на многовиді Γ відповідно [18, п. 2.1, 3.2]. Базовим для їх означення є простір $H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{k})$ при $k=n$ та $k=n-1$ відповідно. Гільбертова норма в ньому задається формулою [18, п.1.3.3]

$$\|w\|_{H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{k})} := \biggl(\,\int\limits_{\mathbb{R}^{k}} \bigl(1+|\xi|^{2}\bigr)^{s}\,\varphi^{2}\bigl((1+|\xi|^{2})^{1/2}\bigr)\,|\widetilde{w}(\xi)|^{2}\,d\xi\biggr)^{1/2}.$$

У *другому* розділі проведено аналіз характеру розв'язності лінійних неоднорідних початково-крайових параболічних задач для систем диференціальних рівнянь другого порядку в гільбертових узагальнених просторах Соболєва. Доведено, що оператори, породжені цими задачами, встановлюють ізоморфізми між відповідними парами згаданих просторів.

Розглядаємо у циліндрі Ω таку параболічну початково-крайову задачу:

$$\partial_t u_j(x,t)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\le 2} a_{j,k}^{\alpha}(x,t)\,D_x^{\alpha}u_k(x,t)=f_j(x,t) \quad \text{для всіх} \quad (x,t)\in\Omega \quad \text{та} \quad j\in\{1,\dots,N\}; \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\le l_j} b_{j,k}^{\alpha}(x,t)\,D_x^{\alpha}u_k(x,t)=g_j(x,t) \quad \text{для всіх} \quad (x,t)\in S \quad \text{та} \quad j\in\{1,\dots,N\}; \tag{3}$$

$$u_j(x,t)\big|_{t=0}=h_j(x) \quad \text{для всіх} \quad x\in G \quad \text{та} \quad j\in\{1,\dots,N\}. \tag{4}$$

Тут довільним чином вибрані натуральне число $N\ge 2$ та числа $l_1,\dots,l_N\in\{0,\,1\}$. Всі коефіцієнти диференціальних виразів у формулах (2) та (3) є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно. Використовуємо такі позначення $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i – уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ мультиіндекс, і $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. У формулах (2) і (3) та їх аналогах підсумовування ведеться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1, ..., \alpha_n$, які задовольняють умову, вказану під знаком суми.

Припускаємо, що початково-крайова задача (2)–(4) є параболічною за Петровським у циліндрі Ω.

Нехай

$$A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \delta_{j,k}\partial_t + \sum_{|\alpha|\le 2} a_{j,k}^{\alpha}(x,t)\,D_x^\alpha \tag{5}$$

і

$$B_{j,k}(x,t,D_x) := \sum_{|\alpha|\le l_j} b_{j,k}^{\alpha}(x,t)\,D_x^\alpha \tag{6}$$

для всіх $j, k \in \{1, \dots, N\}$. Тут $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Скориставшись позначеннями (5) та (6) перепишемо всі рівності (2) і (3) у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{N} A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t) = f_j(x,t)$$

та

$$\sum_{k=1}^{N} B_{j,k}(x,t,D_x)u_k(x,t)\,|_S = g_j(x,t).$$

Покладемо $u := (u_1, \dots, u_N)$, $f := (f_1, \dots, f_N)$, $g := (g_1, \dots, g_N)$ та $h := (h_1, \dots, h_N)$. Перепишемо систему (2) та граничні умови (3) в матричній формі $Au = f$ та $Bu|_S = g$; тут

$$A := (A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t))_{j,k=1}^{N} \quad \text{і} \quad B := \big(B_{j,k}(x,t,D_x)\big)_{j,k=1}^{N}$$

є матричні диференціальні оператори. Наступне лінійне відображення

$$u \mapsto \Lambda u := \bigl(Au, Bu, u|_{t=0}\bigr), \quad \text{де } u \in \bigl(C^{\infty}(\overline{\Omega})\bigr)^{N}, \tag{7}$$

пов'яжемо з задачею (2)–(4).

Для формулювання основного результату цього розділу означимо гільбертовий простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ правих частин задачі. Покладемо

$$E := \{2l + l_j + 3/2 : j, l \in \mathbb{Z},\ 1 \leq j \leq N,\ l \geq 0\} \cap (2, \infty).$$

Нехай $s \geq 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. У випадку $s = 2$ додатково припустимо, що φ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Це припущення пов'язане з тим, що в роботі розглядаються лише такі праві частини системи (2), що є інтегровними з квадратом за Лебегом на Ω функціями.

Для $s \notin E$, за означенням, гільбертовий простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ утворений такими векторами (f, g, h) з простору

$$\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi} := \bigl(H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\bigr)^{N} \oplus \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}(S) \oplus \bigl(H^{s-1;\varphi}(G)\bigr)^{N},$$

що задовольняють умови узгодження правих частин параболічної задачі (2)–(4) (див. (2.11)). У випадку $s \in E$ гільбертовий простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ означається за допомогою квадратичної інтерполяції з числовим параметром 1/2:

$$\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi} := \bigl[\mathcal{Q}^{s-\varepsilon-2,(s-\varepsilon)/2-1;\varphi}, \mathcal{Q}^{s+\varepsilon-2,(s+\varepsilon)/2-1;\varphi}\bigr]_{1/2}.$$

Тут $\varepsilon \in (0, 1/2)$ – довільне число. Означений у такий спосіб простір не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε.

Основним результатом другого розділу є наступна теорема.

Теорема 2.1. *Для довільних числа $s \geq 2$ і функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ (при $s = 2$ додатково припускаємо, що функція φ зростає в нестрогому сенсі) відображення* (2.6) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda : \left(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\right)^N \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{8}$$

В шкалі просторів Соболєва $\varphi \equiv 1$ ця теорема доведена В. А. Солонніковим [23, теорема 5.4] для загальних параболічних систем у припущенні $s, s/2 \in \mathbb{Z}$. С. Д. Ейдельман і М. В. Житарашу узагальнили її на всі дійсні s, див. їх монографію [35, теорема 5.7]. Версію цієї теореми у випадку параболічної задачі для одного рівняння в шкалі узагальнених просторів Соболєва встановлено в роботах В. М. Лося і О. О. Мурача [58, теореми 4.1 і 4.2](випадок $s > 2$) і [51, теореми 1 і 2] (випадок $s = 2$).

Третій розділ роботи присвячено застосуванням теореми 2.1 до дослідження регулярності, зокрема класичності, узагальненого розв'язку параболічної задачі.

Нехай усі компоненти правих частин f, g та h задачі є довільними розподілами на Ω, S і G відповідно. Вектор-функцію $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ називаємо узагальненим розв'язком задачі (2)–(4), якщо

$$\Lambda u = (f, g, h), \tag{9}$$

де Λ — обмежений оператор (8) для $s = 2$ і $\varphi = 1$. З рівності (9) випливає, що

$$(f, g, h) \in \mathcal{Q}^{0,0}. \tag{10}$$

З ізоморфізму (8) випливає, що параболічна задача (2)–(4) має єдиний узагальнений розв'язок $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ для кожного вектора (10).

Теорема 3.1. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2)–(4), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f, g, h) \in \mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$$

для деяких $s \geq 2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ *(у випадку* $s = 2$ *додатково припускаємо, що* φ *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією). Тоді* $u \in \bigl(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\bigr)^N$.

Цей результат про достатню умову глобальної (тобто в усьому циліндрі Ω аж до його межі) регулярності розв'язку є прямим наслідком теореми 2.1.

Сформулюємо локальний аналог цієї теореми. Для цього будуть потрібні локальні версії узагальнених просторів Соболєва [57, п.4]. Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $\Omega_0 := U \cap \Omega \neq \varnothing$ і $U \cap \Gamma = \varnothing$. Покладемо $\Omega' := U \cap \partial\overline{\Omega}$, $S_0 := U \cap S$, $S' := U \cap \{(x,\tau) : x \in \Gamma\}$ і $G_0 := U \cap G$. Позначимо [57, п.4] через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Omega')$ лінійний простір усіх розподілів u на Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Omega'$. Аналогічно, позначимо [57, п.4] через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_0, S')$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s,s/2;\varphi}(S)$ для будь-якої функції $\chi \in C^\infty(\overline{S})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset S_0 \cup S'$. Нарешті, [57, п.4] $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_0)$ позначає лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{G})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset G_0$.

Теорема 3.2. *Нехай* $s \geq 2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ *(у випадку* $s = 2$ *додатково припускаємо, що* φ *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією). Припустимо, що вектор-функція* $u \in \bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2.1)–(2.3), *праві частини якої задовольняють такі умови:*

$$f \in \bigl(H^{s-2,s/2-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Omega')\bigr)^N, \tag{11}$$

$$g \in \bigoplus_{j=1}^{N} H_{\mathrm{loc}}^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}(S_0, S'), \tag{12}$$

$$h \in \bigl(H_{\mathrm{loc}}^{s-1;\varphi}(G_0)\bigr)^N. \tag{13}$$

Тоді $u \in \bigl(H_{\mathrm{loc}}^{s,s/2;\varphi}(\Omega_0, \Omega')\bigr)^N$.

Якщо $\Omega' = \varnothing$, то теорема 3.2 стверджує, що регулярність узагальненого розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненого циліндра $\overline{\Omega}$. Якщо $G_0 = \varnothing$, то ця теорема стверджує, що регулярність розв'язку $u(x,t)$ підвищується при $t > 0$. В цих випадках вона є наслідком [54, теорема 2].

Зазначимо, що припущення $U \cap \Gamma = \varnothing$ істотне, оскільки без нього висновок теореми 3.2 є взагалі хибним. Для його істинності у цьому випадку, треба накласти на праві частини задачі (2)–(4) на множині $U \cap \Gamma$ деякі додаткові умови узгодження.

Узагальнені простори Соболєва дозволяють отримати більш тонкі, ніж у випадку класичних просторів Соболєва, достатні умови неперервності узагальненого розв'язку u та його узагальнених похідних заданого порядку на множині $\Omega_0 \cup \Omega'$.

Теорема 3.3. *Нехай задано довільне ціле число* $p \geq 0$. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2)–(4), *праві частини якої задовольняють умови* (11)–(13) *для* $s := p + 1 + n/2$ *і деякого функціонального параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$, *що задовольняє умову*

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty, \tag{14}$$

причому у випадку $s = 2$ *додатково припускаємо, що функція* φ *зростає (в нестрогому сенсі). Тоді розв'язок* $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_N(x,t))$ *і кожна його узагальнена частинна похідна*

$D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) = (D_x^\alpha \partial_t^\beta u_1(x,t), \ldots, D_x^\alpha \partial_t^\beta u_N(x,t))$, *де* $|\alpha| + 2\beta \leq p$, *неперервні на множині* $\Omega_0 \cup \Omega'$.

Зауваження 3.1 *Умова* (14) *в теоремі є точною. А саме, нехай* $s = p + 1 + n/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *і припускаємо, що для кожної функції* $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ *правильним є твердження: якщо* u *є розв'язком задачі* (2)–(4), *праві частини якої задовольняють* (11)–(13), *то цей розв'язок* u *задовольняє висновок теореми 3.3. Тоді параметр* φ *задовольняє умову* (14).

Зауваження 3.2 *Узагальнені простори Соболєва дають можливість отримати в теоремі 3.3 мінімальні числові показники регулярності в умовах* (11)–(13). *Якщо переформулювати теорему 3.3 на випадок класичних просторів Соболєва* ($\varphi = 1$), *то* (14) *не виконується і доведеться замінити в умовах* (11)–(13) *показник* $s = p + 1 + n/2$ *на деяке число* $s > p + 1 + n/2$. *Такі умови є більш сильними.*

Теорема 3.3 дозволяє отримати нові й тонкі достатні умови класичності узагальненого розв'язку задачі (2)–(4). Сформулюємо означення класичного розв'язку цієї задачі.

Нехай $l_0 := \max\{l_1, \ldots, l_N\}$. Покладемо

$$S_\varepsilon := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, S) < \varepsilon\}, \quad G_\varepsilon := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, G) < \varepsilon\},$$

де число $\varepsilon > 0$.

Узагальнений розв'язок $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ задачі (2)–(4) називаємо класичним, якщо узагальнені частинні похідні вектор-функції $u = u(x,t)$ задовольняють такі три умови:

(a) $D_x^\alpha \partial_t^\beta u$ неперервна на Ω, якщо $0 \leq |\alpha| + 2\beta \leq 2$;

(b) $D_x^\alpha u$ неперервна на $S_\varepsilon \cup S$ для деякого числа $\varepsilon > 0$, якщо $0 \leq |\alpha| \leq l_0$;

(c) u неперервна на $G_\varepsilon \cup G$ для деякого числа $\varepsilon > 0$.

Якщо розв'язок $u = u(x,t)$ задачі (2)–(4) класичний, то її ліві частини є неперервними функціями на відповідних множинах.

Теорема 3.4. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \big(H^{2,1}(\Omega)\big)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2)–(4), *праві частини якої задовольняють такі умови:*

$$\begin{aligned} f \in \big(&H^{1+n/2,\,1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing)\big)^N\cap \\ &\cap \big(H^{l_0-1+n/2,\,l_0/2-1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_\varepsilon,S)\big)^N\cap \\ &\cap \big(H^{-1+n/2,\,-1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_\varepsilon,G)\big)^N, \end{aligned} \tag{15}$$

$$g \in \bigoplus_{j=1}^{N} H^{l_0+n/2-l_j+1/2,\,l_0/2+n/4-l_j/2+1/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S,\varnothing), \tag{16}$$

$$h \in \big(H^{n/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G)\big)^N, \tag{17}$$

з деяким функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$, *який задовольняє умови теореми 3.3. Тоді розв'язок u класичний.*

В означенні класичного розв'язку задачі сформульовано мінімальні умови на вектор-функцію u, за яких вона в термінах класичних похідних і слідів задовольняє рівняння (2), крайові умови (3) і початкові умови (4). Часто однією з вимог в означенні класичного розв'язку задачі є його неперервність на лінії Γ з'єднання бічної поверхні і основи циліндра (див., наприклад, [19, с.42]). Ця умова буде виконана, якщо вимагати неперервність розв'язку у замкненому циліндрі $\overline{\Omega}$. В такому випадку будемо вживати термін "сильно класичний розв'язок".

Розглянемо окремий змістовний випадок параболічної задачі. А саме, мішану задачу для системи двох диференціальних рівнянь другого порядку з двома крайовими умовами, одна з яких Діріхле, друга – Неймана. Такі задачі виникають, зокрема, в теорії тепломасообміну [34, п.2.4].

У циліндрі Ω задано таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(x,t) =& a_{11}\Delta u_1(x,t) + a_{12}\Delta u_2(x,t) + f_1(x,t), \\ \partial_t u_2(x,t) =& a_{21}\Delta u_1(x,t) + a_{22}\Delta u_2(x,t) + f_2(x,t), \\ & \text{для всіх} \quad (x,t) \in \Omega. \end{aligned} \tag{18}$$

Тут всі коефіцієнти a_{ij} є сталі дійсні числа, а характеристичні числа λ_1 і λ_2 матриці (a_{ij}) такі, що $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

На бічній поверхні циліндра задано дві крайові умови:

$$\begin{gathered} b_{11}\, D_n u_1(x,t) + b_{12}\, D_n u_2(x,t) = g_1(x,t), \\ b_{21} u_1(x,t) + b_{22} u_2(x,t) = g_2(x,t), \\ \text{для всіх} \quad (x,t) \in S. \end{gathered} \tag{19}$$

Тут всі коефіцієнти b_{ij} є сталі дійсні числа такі, що для задачі (18)–(19) виконується умова (ii) означення параболічної задачі (див. пункт 2.1). Ця умова виконується, зокрема, якщо $b_{11}b_{22} = 0$ або $b_{21}b_{12} = 0$, але не одночасно (див., наприклад, [34, п. 2.4]).

На основі циліндра задано початкові дані Коші:

$$\begin{aligned} & u_1(x,t)\big|_{t=0} = h_1(x), \\ & u_2(x,t)\big|_{t=0} = h_2(x), \\ & \text{для всіх} \quad x \in G. \end{aligned} \tag{20}$$

Задача (18)–(20) є параболічною (див., наприклад, [34, п. 2.4]).

Сформулюємо теорему про сильну класичність узагальненого розв'язку цієї задачі. Відмітимо, що умови класичності узагальненого розв'язку подано в теоремі 3.5, яка є конкретизацією теореми 3.4 для цієї задачі.

Теорема 3.6. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^2$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (18)–(20), *праві частини якої задовольняють такі умови:*

$$(f_1, f_2) \in \bigl(H^{1+n/2,\,1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing)\bigr)^2 \cap \bigl(H^{n/2,\,n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_\varepsilon, S)\bigr)^2, \qquad (21)$$

$$\begin{aligned} g_1 &\in H^{n/2+1/2,\,n/4+1/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S,\varnothing),\\ g_2 &\in H^{n/2+3/2,\,n/4+3/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S,\varnothing), \end{aligned} \qquad (22)$$

$$(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4;\varphi} \qquad (23)$$

з деяким функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$, *що задовольняє інтегральну умову* (14). *У випадку* $n = 2$ *додатково припускаємо, що функція* φ *зростає (в нестрогому сенсі). Тоді розв'язок* $u = (u_1, u_2)$ *сильно класичний.*

Відмітимо, щоб вказати, яким просторам належать праві частини задачі згідно умови (23), треба скористатись означенням простору $\mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4;\varphi}$. Він має доволі складну будову завдяки умовам узгодження (2.11), накладеним на компоненти його елементів. Кількість та складність цих умов зростає зі зростанням n.

Зауваження 3.4 *У випадках* $n = 2$ *або* $n = 3$ *умова* (23) *в теоремі 3.6 еквівалентна такій*

$$\begin{aligned} &(f_1, f_2) \in \bigl(H^{-1+n/2,\,-1/2+n/4;\varphi}(\Omega)\bigr)^2,\\ &g_1 \in H^{n/2-1/2,\,n/4-1/4;\varphi}(S),\\ &g_2 \in H^{n/2+1/2,\,n/4+1/4;\varphi}(S),\\ &(h_1, h_2) \in \bigl(H^{n/2;\varphi}(G)\bigr)^2. \end{aligned} \qquad (24)$$

Взагалі, простір $\mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4;\varphi}$ для $n = 2$ або $n = 3$ складається з вектор-функцій, що задовольняють одночасно (24) і

$$g_2 \restriction \Gamma = (b_{21} h_1 + b_{22} h_2) \restriction \Gamma. \qquad (25)$$

Але для вектор-функцій $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$ з формулювання теореми 3.6 виконання (25) випливає з умови теореми $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^2$. Дійсно, тоді $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}^{0,0}$. За означенням простору $\mathcal{Q}^{0,0}$, його елементи задовольняють (25). При $n \geq 4$ простір $\mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4;\varphi}$ складається з векторів, які задовольняють включення (24) та більш складні ніж (25) умови узгодження (2.11).

Зазначимо, що для теореми 3.6 правильна версія зауваження 3.2.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

У цьому розділі зробимо огляд літератури присвяченої дослідженню параболічних задач в різних шкалах функціональних просторів, опишемо основний метод дослідження – квадратичну інтерполяцію пар гільбертових просторів та деякі необхідні її властивості і наведемо відомості про анізотропні та ізотропні гільбертові узагальнені простори Соболєва, пов'язані з параболічною задачею, а також їх інтерполяційний зв'язок з класичними просторами Соболєва.

1.1. Огляд літератури

У 60–80-х роках XX ст. створено теорію розв'язності лінійних крайових задач для параболічних рівнянь в анізотропних версіях класичних просторів Гельдера та просторів Соболєва у працях М. С. Аграновича, М. І. Вішика [1], С. Д. Ейдельмана [25], В. О. Солоннікова [23], О. О. Ладиженської, В. О. Солоннікова і Н. М. Уральцевої [14], А. Фрідмана [24], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49], С. Д. Івасишена [10], М. В. Житарашу [35] та інших математиків. Центральний результат цієї теорії стверджує, що ці задачі коректно поставлені в сенсі Адамара на відповідних парах функціональних просторів. Тобто обмежені оператори, породжені параболічними задачами, встановлюють ізоморфізми на цих парах просторів. Відмітимо, що перші теореми про ізморфізми для параболічних задач отримано у анізотропних просторах Соболєва та Гельдера, що параметризуються додатними числами. Це праці М. С. Аграновича, М. І. Вішика [1], С. Д. Ейдельмана [25], В. О. Солоннікова [23], О. О. Ладиженської, В. О. Солоннікова і

Н. М. Уральцевої [14]. Для анізотропних просторів Соболєва з від'ємними показниками регулярності такі теореми отримано в праці Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49], а для негативних просторів Гельдера у статті С. Д. Івасишена [9]. У працях М. В. Житарашу [6–8] параболічні задачі досліджено у модифікованих по Я. А. Ройтбергу анізотропних просторах Соболєва довільного дійсного порядку.

Останнім часом інші класи функціональних просторів застосовуються більше і більш активно до параболічних задач; а саме простори зі змішаними нормами, простори Трібеля–Лізоркіна, вагові простори, простори узагальненої гладкості. Це праці М. В. Крилова [44, 45], П. Вайдемайера [64], R. Denk, M. Hieber і J. Prüss [29, 30], R. Denk і M. Kaip [31], H. Dong і D. Kim [33], M. Hieber і J. Prüss [36], F. Hummel [39], F. Hummel і N. Lindemulder [40], K.-H. Kim [42], M. Kohne, J. Prüss і M. Wilke [43], J. LeCrone, J. Prüss і M. Wilke [46], N. Lindemulder [47], N. Lindemulder і M. Veraar [48]. В роботах В. М. Лося, В. А. Михайлеця і О. О. Мурача [51–53, 56–58] досліджуються параболічні початково-крайові задачі у функціональних просторах узагальненої анізотропної гладкості. Ця гладкість визначається парою дійсних чисел і радіальною функцією, яка повільно змінюється на нескінченності та характеризує додаткову гладкість по відношенню до гладкості, заданої числами. Такі простори дають широке узагальнення анізотропних версій класичних гільбертових просторів Соболєва, які зазвичай застосовуються до параболічних рівнянь. У цих роботах розроблено відповідну теорію розв'язності та максимальної регулярності для скалярних параболічних задач (для одного диференціального рівняння), її підсумовано в монографії [16]. Для параболічних за Петровським систем окремий випадок крайової задачі з однорідними даниими Коші вивчався в [54, 55]. Відмітимо, що різні простори узагальненої гладкості виявилися корисними в теорії рівнянь з частинними похідними [37, 38, 60, 62, 63] та теорії випадкових процесів [41]. Зокрема, монографія [60] представляє теорію еліптичних крайових задач для ізотропних аналогів просторів, що використовуються в дисертації (див. також [26, 27] для еліптичних задач у ширших класах узагальнених просторів Соболєва [61]).

При дослідженні параболічних задач важливими є питання регулярності, зокрема, класичності їх узагальнених розв'язків. Під класичним розуміють неперервно диференційовний розв'язок, який задовольняє задачу в термінах класичних похідних. Відповідь на ці питання дають, як правило, шляхом формулювання умов приналежності правих частин задачі певним функціональним просторам. Чим тонше градуйована вибрана шкала функціональних просторів, тим точніший результат буде отримано. Вивчення цих питань до певного часу було переважно у функціональних анізотропних просторах Соболєва та Гельдера [11, 12, 17, 23], [24, розд. X, § 7] які параметризуються числами. Використання просторів узагальненої анізотропної гладкості дозволяє отримати нові тонкі і точні умови гладкості розв'язків у порівнянні з класичними результатами у зазначених вище роботах. В просторах узагальненої гладкості у скалярному випадку версії теорем про регулярність і класичність узагальнених розв'язків встановлено в [52, 53, 57], а для еліптичних крайових задач – в [26, 27, 59, 60]. Окремий випадок параболічних крайових задач для систем з однорідними початковими даними Коші розглянуто в [54, 55].

1.2. Узагальнені простори Соболєва

В цьому пункті наведемо означення необхідних функціональних просторів. При викладі матеріалу будемо слідувати роботам [58, п. 3] та [57, п. 4] (див. також [56, п. 3]).

Як зазначалось раніше, проводимо дослідження параболічних крайових задач в шкалах узагальнених просторів Соболєва. Вони параметризуються двома числами s і $s/2$, де $s \in \mathbb{R}$, і функцією $\varphi \in \mathcal{M}$. Клас $\mathcal{M}$ [18, п.1.3.3] визначається як такий, що складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, таких що

- $(*)$ обидві функції φ і $1/\varphi$ обмежені на кожному компакті $[1, d]$, де $1 < d < \infty$;

- $(**)$ φ повільно змінна функція за Й. Карамата на нескінченності, тобто

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0. \tag{1.1}$$

Теорія повільно змінних функцій викладена в [28]. Наведемо важливий і стандартний приклад функцій, які задовольняють (1.1), поклавши

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1} \, (\log \log r)^{\theta_2} \ldots (\underbrace{\log \ldots \log}_{k \text{ times}} r\,)^{\theta_k} \quad \text{для} \quad r \gg 1, \tag{1.2}$$

тут довільно вибрані параметри $k \in \mathbb{N}$ та $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$. Функції (1.2) утворюють логарифмічну мультишкалу, яка має ряд застосувань у теорії функціональних просторів. Деякі інші приклади повільно змінних функцій є, наприклад, в [28, п. 1.3.3] та [60, п. 1.2.1].

За означенням [16, п.1.2], комплексний лінійний простір $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)$, де $2 \leq k \in \mathbb{Z}$, складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ таких, що їх (повне) перетворення Фур'є $\widetilde{w}$ є функцією, яка локально інтегровна на $\mathbb{R}^k$ за Лебегом і задовольняє умову

$$\|w\|_{H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)} := \Biggl(\,\int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}}\int\limits_{\mathbb{R}} r^{2s}(\xi,\eta)\,\varphi^2(r(\xi,\eta))\,|\,\widetilde{w}(\xi,\eta)\,|^2\;d\xi\,d\eta\Biggr)^{1/2} < \infty, \tag{1.3}$$

де

$$r(\xi,\eta) := \bigl(1+|\,\xi\,|^2+|\,\eta\,|\bigr)^{1/2} \quad \text{для всіх} \;\; \xi\in\mathbb{R}^{k-1} \;\; \text{та} \;\; \eta\in\mathbb{R}.$$

Цей простір гільбертовий і сепарабельний відносно норми (1.3). Як звичайно, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ є лінійним топологічним простором усіх повільно зростаючих розподілів на $\mathbb{R}^k$.

Він є окремим випадком просторів $\mathcal{B}_{p,\mu}$, введених Л. Хермандером [37, п. 2.2]; а саме, $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)=\mathcal{B}_{p,\mu}$ за умови, що $p=2$ і

$$\mu(\xi,\eta)\equiv\bigl(1+|\xi|^2+|\eta|\bigr)^{s/2}\,\varphi\bigl((1+|\xi|^2+|\eta|)^{1/2}\bigr).$$

Простір $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ дає широке узагальнення поняття просторів Соболєва (в рамках гільбертових просторів). Якщо $\varphi(\cdot)\equiv 1$, простір $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ стає анізотропним простором Соболєва $H^{s,s/2}(\mathbb{R}^k)$. В загальному випадку маємо щільні неперервні вкладення [16, п.1.2]:

$$H^{s_1,s_1/2}(\mathbb{R}^k)\hookrightarrow H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)\hookrightarrow H^{s_0,s_0/2}(\mathbb{R}^k) \quad \text{для будь-яких} \quad s_0<s<s_1. \tag{1.4}$$

Опишемо циліндр, в якому будемо розглядати параболічну задачу. Нехай довільні ціле число $n\geq 2$, дійсне число $\tau>0$ і обмежена область $G\subset\mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma:=\partial G$. Через $\Omega:=G\times(0,\tau)$ позначимо відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S:=\Gamma\times(0,\tau)$ — його бічна поверхня.

Базуючись на просторі $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)$, розглянемо гільбертові функціональні простори, пов'язані з параболічною задачею (2.1)–(2.3), що досліджується в роботі. Нехай V — відкрита непорожня множина в $\mathbb{R}^k$. (Зокрема, нам потрібен випадок, де $V=\Omega$, де $k=n+1$.) Покладемо

$$H^{s,s/2;\varphi}(V) := \bigl\{ w\restriction V : \, w \in H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k) \bigr\}. \tag{1.5}$$

Лінійний простір (1.5) наділений нормою

$$\|u\|_{H^{s,s/2;\varphi}(V)} := \inf \bigl\{ \, \|w\|_{H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k)} : w \in H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^k), \;\; u = w\restriction V \bigr\}, \tag{1.6}$$

де $u \in H^{s,s/2;\varphi}(V)$. Цей простір є гільбертовим і сепарабельним відносно цієї норми. Множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ є щільною в просторі $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$.

Ще буде потрібний простір $H^{s,s/2;\varphi}(S)$ на бічній поверхні S циліндра Ω, див. [50, п. 1]. Для отримання результатів достатньо обмежитись випадком $s>0$. Коротко кажучи, цей простір складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$, які породжують функції з простору $H^{s,s/2;\varphi}(\Pi)$ на $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$ за допомогою деяких локальних координат на $\overline{S}$. Нагадаємо детальне означення.

Виберемо на Γ довільно скінченний атлас класу C^∞. Нехай цей атлас складається з деяких локальних карт $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, з $j=1,\ldots,\lambda$. Тут $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\lambda$ — відкриті непорожні підмножини Γ, такі що $\Gamma := \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_\lambda$. Також довільно вибираємо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, з $j=1,\ldots,\lambda$, так що $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$ і $\chi_1+\cdots+\chi_\lambda = 1$ на Γ. Таким чином, ці функції утворюють розбиття одиниці на Γ.

За означенням [50, п. 1], комплексний лінійний простір $H^{s,s/2;\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ таких, що функція $v_j(y,t) := \chi_j(\theta_j(y))v(\theta_j(y),t)$ змінних $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t>0$ належить $H^{s,s/2;\varphi}(\Pi)$ для кожного $j \in \{1,\ldots,\lambda\}$. (Як звичайно, $L_2(S)$ позначає простір усіх квадратично інтегрованих функцій на поверхні S.) Простір $H^{s,s/2;\varphi}(S)$ наділений нормою

$$\|v\|_{H^{s,s/2;\varphi}(S)} := \bigl(\|v_1\|^2_{H^{s,s/2;\varphi}(\Pi)} + \cdots + \|v_\lambda\|^2_{H^{s,s/2;\varphi}(\Pi)}\bigr)^{1/2}.$$

Цей простір є гільбертовим і сепарабельним відносно цієї норми і не залежить з точністю до еквівалентності норм від зазначеного вибору атласу та розбиття одиниці на Γ [50, теорема 1].

Також потрібні ізотропні узагальнені простори Соболєва $H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k)$, $H^{s;\varphi}(G)$ і $H^{s;\varphi}(\Gamma)$, які досліджено В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [18, 59, 60]. Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. За означенням [18, п.1.3.3], комплексний лінійний простір $H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k)$, де $1 \leq k \in \mathbb{Z}$, складається з усіх повільно зростаючих розподілів w на $\mathbb{R}^k$, (повне) перетворення Фур'є $\widetilde{w}$ яких є локально інтегровним за Лебегом на $\mathbb{R}^k$ і задовольняє умову

$$\|w\|_{H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k)} := \Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^k} \langle\xi\rangle^{2s}\,\varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\,\widetilde{w}(\xi)\,|^2\; d\xi\Biggr)^{1/2} < \infty. \tag{1.7}$$

Тут, як звичайно, $\langle\xi\rangle := (1+|\,\xi\,|^2)^{1/2}$ є згладженим модулем вектора $\xi \in \mathbb{R}^k$. Цей простір є гільбертовим і сепарабельним відносно норми (1.7). Зауважимо, що $H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ є простором $\mathcal{B}_{2,\mu}(\mathbb{R}^k)$, що відповідає функціональному параметру $\mu(\xi) := \langle\xi\rangle^s\varphi(\langle\xi\rangle)$ з $\xi \in \mathbb{R}^k$. Простір $H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ є ізотропним, оскільки функція $\mu(\xi)$ залежить лише від $|\,\xi\,|$. Якщо $\varphi(\cdot) \equiv 1$, простір $H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ стає ізотропним простором Соболєва $H^s(\mathbb{R}^k)$.

Базуючись на просторі $H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k)$, розглянемо деякі гільбертові функціональні простори на G і Γ. Нехай V — відкрита непорожня множина в $\mathbb{R}^k$. (Зокрема, потрібен випадок, де $V = G$ і $k = n$.) Покладемо [18, п.3.2.1]

$$H^{s;\varphi}(V) := \bigl\{w\!\upharpoonright\!V : \, w \in H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k)\bigr\}. \tag{1.8}$$

Норма в лінійному просторі (1.8) визначається формулою

$$\|h\|_{H^{s;\varphi}(V)} := \inf\bigl\{\,\|w\|_{H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k)} : w \in H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^k),\;\; h = w\!\upharpoonright\!V\bigr\}, \tag{1.9}$$

з $h \in H^{s;\varphi}(V)$. Цей простір є гільбертовим і сепарабельним відносно цієї норми.

Лінійний простір $H^{s;\varphi}(\Gamma)$ означається в такий спосіб. Він [18, п.2.1.1] складається з усіх розподілів ω на Γ таких, що кожен розподіл $\omega_j(y) := \chi_j(\theta_j(y))\,\omega(\theta_j(y))$ з $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ належить $H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$, де $j \in \{1,\dots,\lambda\}$. Простір $H^{s;\varphi}(\Gamma)$ наділено нормою

$$\|\omega\|_{H^{s;\varphi}(\Gamma)} := \left(\|\omega_1\|^2_{H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})} + \dots + \|\omega_\lambda\|^2_{H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{1/2}.$$

Цей простір є гільбертовим, сепарабельним і не залежить (з точністю до еквівалентності норм) від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ, див. [18, теорема 2.1].

Якщо $\varphi \equiv 1$, простори $H^{s,s/2;\varphi}(\cdot)$ і $H^{s;\varphi}(\cdot)$ стають просторами Соболєва $H^{s,s/2}(\cdot)$ і $H^{s}(\cdot)$ відповідно. Завдяки (1.4) маємо вкладання

$$H^{s_1,s_1/2}(\cdot) \hookrightarrow H^{s,s/2;\varphi}(\cdot) \hookrightarrow H^{s_0,s_0/2}(\cdot) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \tag{1.10}$$

Крім того,

$$H^{s_1}(\cdot) \hookrightarrow H^{s;\varphi}(\cdot) \hookrightarrow H^{s_0}(\cdot) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1, \tag{1.11}$$

як зазначено в [60, теореми 2.3(iii) і 3.3(iii)]. Усі ці вкладання неперервні та щільні.

В загальному, якщо $\varphi(\cdot) \equiv 1$, тоді не пишемо індекс φ у позначеннях відповідних просторів.

1.3. Квадратична інтерполяція

Основним методом дослідження в роботі є квадратична інтерполяція з функціональним параметром лінійних операторів в парах гільбертових просторів. Що стосується цієї інтерполяції, використаємо означення, позначення та властивості, наведені в [60, п. 1.1].

А саме, [60, п. 1.1]: нехай $X := [X_0, X_1]$ — упорядкована пара сепарабельних комплексних гільбертових просторів, така що X_1 — щільний лінійний многовид у X_0 і що вкладення $X_1 \subseteq X_0$ є неперервним. Таку пару називають регулярною. Для такої пари існує додатно визначений самоспряжений оператор J, що діє в гільбертовому просторі X_0 з областю визначення X_1 так, що $\|Jv\|_{X_0} = \|v\|_{X_1}$ для всіх $v \in X_1$. Нехай $\mathcal{B}$ – множина усіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ таких, що ψ обмежена на кожному компакті $[a, b]$, з $0 < a < b < \infty$, і що $1/\psi$ обмежена на кожній півосі $[a, \infty)$, з $a > 0$. Для функції $\psi \in \mathcal{B}$ позначимо через $\psi(J)$ оператор (взагалі, необмежений) в X_0 як болелевську функцію ψ від J. Область визначення цього оператора позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або X_ψ. Отриманий простір X_ψ є гільбертовим і сепарабельним відносно скалярного добутку $(v_1, v_2)_{X_\psi} := (\psi(J)v_1, \psi(J)v_2)_{X_0}$.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ називається інтерполяційним параметром [60, п. 1.1], якщо наступна умова виконується для всіх регулярних пар $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0: якщо звуження T на X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$, тоді звуження T на X_ψ — є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.

Якщо функція ψ є інтерполяційним параметром, то кажуть, що гільбертовий простір X_ψ отримано квадратичною інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари $X = [X_0, X_1]$, а обмежений оператор $T : X_\psi \to Y_\psi$ отримано інтерполяцією операторів $T : X_j \to Y_j$ з $j \in \{0, 1\}$.

Відмітимо окремо, що у випадку, коли інтерполяційний параметр є степеневою функцією $\psi(r) \equiv r^\theta$ з $0 < \theta < 1$, маємо класичну інтерполяцію Ж.-Л. Ліонса і С. Г. Крейна (див. [13, розд.4, п. 1.10] і [15, розд. 1, пп. 2 і 5]). Тоді показник θ називають числовим параметром інтерполяції, а інтерполяційний простір позначають $[X_0, X_1]_\theta$. Зокрема, в роботі будемо використовувати випадок $\theta = 1/2$.

Далі наведемо дві необхідні властивості квадратичної інтерполяції.

Твердження 1.1. [18, 60, теорема 1.6] *Нехай $X = [X_0, X_1]$ є регулярною парою гільбертових просторів, а Y_0 є підпростором простору X_0. Тоді $Y_1 := X_1 \cap Y_0$ є підпростором простору X_1. Припустимо, що існує лінійне відображення $P : X_0 \to X_0$, яке для кожного $j \in \{0,\ 1\}$ є проєктором простору X_j на його підпростір Y_j. Тоді пари $[Y_0, Y_1]$ і $[X_0/Y_0, X_1/Y_1]$ регулярні та для довільного інтерполяційного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ виконуються рівності*

$$[Y_0, Y_1]_\psi = X_\psi \cap Y_0, \tag{1.12}$$

$$[X_0/Y_0, X_1/Y_1]_\psi = X_\psi/(X_\psi \cap Y_0) \tag{1.13}$$

з еквівалентністю норм. Тут $X_\psi \cap Y_0$ є підпростором простору X_ψ.

Твердження 1.2. [18,60, теорема 1.5] *Нехай $\psi \in \mathcal{B}$ є довільним інтерполяційним параметром. Нехай $[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]$, де $j = 1, \dots, q$, є скінченним* *набором регулярних пар гільбертових просторів. Тоді*

$$\Big[\bigoplus_{j=1}^{q} X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^{q} X_1^{(j)}\Big]_\psi = \bigoplus_{j=1}^{q}\big[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}\big]_\psi$$

з рівністю норм.

Наступні два твердження демонструють інтерполяційний зв'язок між класичними просторами Соболєва та узагальненими просторами Соболєва, що записані у вкладеннях (1.10) і (1.11).

Твердження 1.3. [18,60, теореми 1.14(i), 2.2 та 3.2] *Нехай* $s_0, s, s_1 \in \mathbb{R}$ *задовольняють умову* $s_0 < s < s_1$ *і нехай* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Покладемо*

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{(s-s_0)/(s_1-s_0)}\,\varphi(r^{1/(s_1-s_0)}) & \text{якщо} \quad r \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{якщо} \quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{1.14}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ *буде інтерполяційним параметром і маємо рівність просторів*

$$H^{s-\lambda;\varphi}(W) = \big[H^{s_0-\lambda}(W), H^{s_1-\lambda}(W)\big]_\psi \tag{1.15}$$

з точністю до еквівалентності норм для кожного дійсного $\lambda \in \mathbb{R}$ *за умови, що* $W = G$ *або* $W = \Gamma$.

Твердження 1.4. [50, теорема 2 та лема 2] *Нехай* $s_0, s, s_1 \in \mathbb{R}$ *задовольняють умову* $0 \leq s_0 < s < s_1$ *і нехай* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Означимо інтерполяційний параметр* $\psi \in \mathcal{B}$ *за формулою* (1.14). *Тоді маємо рівність просторів*

$$H^{s-\lambda,(s-\lambda)/2;\varphi}(W) = \big[H^{s_0-\lambda,(s_0-\lambda)/2}(W), H^{s_1-\lambda,(s_1-\lambda)/2}(W)\big]_\psi \tag{1.16}$$

з точністю до еквівалентності норм для кожного дійсного $\lambda \leq s_0$ *за умови, що* $W = \Omega$ *або* $W = S$.

Зветаємо увагу, що індекси числових показників регулярності просторів подано як $s-\lambda$ тощо для зручності застосування тверджень 1.3 і 1.4 до просторів, які фігурують у доведеннях тверджень в наступних розділах.

Наступне твердження необхідне для доведення теореми 2.1, у випадку, коли s належить множині (2.15).

Твердження 1.5. [57, лема 6.3] *Нехай $s,\varepsilon\in\mathbb{R}$, $s>\varepsilon>0$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Тоді правильна рівність просторів*

$$\begin{aligned}&H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)=\\&=\bigl[H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega),H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega)\bigr]_{1/2}\end{aligned}\tag{1.17}$$

з еквівалентністю норм.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі зроблено огляд літератури за тематикою роботи, описано основний метод дослідження та наведено відомості про узагальнені простори Соболєва, в яких вивчається параболічна задача. Із наведених відомостей робимо наступні висновки:

1. Останнім часом параболічні задачі активно вивчаються в шкалах функціональних просторів узагальненої гладкості.

2. Ефективним методом дослідження параболічних задач в узагальнених просторах Соболєва є квадратична інтерполяція.

3. Недослідженим є питання розв'язності неоднорідних крайових задач для параболічних за Петровським систем в узагальнених просторах Соболєва.

4. Актуально вивчити питання регулярності та класичності узагальнених розв'язків згаданих вище задач.

РОЗДІЛ 2
РОЗВ'ЯЗНІСТЬ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

У цьому розділі дослідимо коректну розв'язність параболічної за Петровським крайової задачі для системи диференціальних рівнянь другого порядку в шкалі узагальнених просторів Соболєва. Основний результат – теорема про ізоморфізми для цієї задачі.

2.1. Постановка задачі

Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0, \tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно. Будемо ототожнювати G з нижньою основою $G \times \{0\}$ циліндра Ω.

Розглянемо таку параболічну початково-крайову задачу у циліндрі Ω:

$$\partial_t u_j(x,t) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq 2} a_{j,k}^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} u_k(x,t) = f_j(x,t) \tag{2.1}$$

$$\text{для всіх} \quad (x,t) \in \Omega \quad \text{та} \quad j \in \{1, \ldots, N\};$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq l_j} b_{j,k}^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} u_k(x,t) = g_j(x,t) \tag{2.2}$$

$$\text{для всіх} \quad (x,t) \in S \quad \text{та} \quad j \in \{1, \ldots, N\};$$

$$u_j(x,t)\big|_{t=0} = h_j(x) \quad \text{для всіх} \quad x \in G \quad \text{та} \quad j \in \{1, \ldots, N\}. \tag{2.3}$$

Тут довільним чином вибрані натуральне число $N \geq 2$ та числа $l_1, \ldots, l_N \in \{0,\, 1\}$. Всі коефіцієнти диференціальних виразів у формулах (2.1) та (2.2) є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно; тобто усі

$$a_{j,k}^{\alpha} \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) := \bigl\{ w \restriction \overline{\Omega} \colon\, w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) \bigr\}$$

і

$$b_{j,k}^{\alpha} \in C^{\infty}(\overline{S}) := \bigl\{ v \restriction \overline{S} \colon\, v \in C^{\infty}(\Gamma \times \mathbb{R}) \bigr\}.$$

Використовуємо такі позначення $D_x^{\alpha} := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i – уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ мультиіндекс, і $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. У формулах (2.1) і (2.2) та їх аналогах підсумовування ведеться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1, ..., \alpha_n$, які задовольняють умову, вказану під знаком суми.

Припускаємо, що початково-крайова задача (2.1)–(2.3) є параболічною за Петровським у циліндрі Ω. Нагадаємо відповідне означення [23, розд. 1, § 1].

Нехай

$$A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \delta_{j,k}\partial_t + \sum_{|\alpha| \le 2} a_{j,k}^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} \tag{2.4}$$

і

$$B_{j,k}(x,t,D_x) := \sum_{|\alpha| \le l_j} b_{j,k}^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} \tag{2.5}$$

для всіх $j, k \in \{1, \ldots, N\}$. Тут $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Скориставшись позначеннями (2.4) та (2.5) перепишемо всі рівності (2.1) і (2.2) у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{N} A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) u_k(x,t) = f_j(x,t)$$

та

$$\sum_{k=1}^{N} B_{j,k}(x,t,D_x) u_k(x,t)\,|_S = g_j(x,t).$$

Означимо головні символи лінійних диференціальних операторів (2.4) та (2.5) за формулами

$$A_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p) := \delta_{j,k}p + \sum_{|\alpha|=2} a_{j,k}^{\alpha}(x,t)\,\xi^{\alpha}$$

та

$$B_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi) := \sum_{|\alpha|=l_j} b_{j,k}^{\alpha}(x,t)\,\xi^{\alpha}.$$

Ці символи являють собою однорідні многочлени за сукупністю аргументів $\xi := (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{C}^n$ та $p \in \mathbb{C}$ (тут, як звичайно, $\xi^{\alpha} := \xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$). Розглянемо матриці

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) := \big(A_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p)\big)_{j,k=1}^{N}$$

та

$$B^{(0)}(x,t,\xi) := \big(B_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi)\big)_{j,k=1}^{N}.$$

Задача (2.1)–(2.3) називається параболічною за Петровським в Ω якщо вона задовольняє наступні дві умови (i) та (ii):

(i) Для довільних точок $x \in \overline{G}$ та $t \in [0,\tau]$ і кожного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ всі корені $p(x,t,\xi)$ полінома $\det A^{(0)}(x,t,\xi,p)$ змінної $p \in \mathbb{C}$ задовольняють нерівність $\operatorname{Re} p(x,t,\xi) \le -\delta\,|\,\xi\,|^{2b}$ з деяким числом $\delta > 0$, що не залежить від x, t та ξ.

Для формулювання умови (ii) зафіксуємо число $\delta_1 \in (0,\delta)$, де δ взяте з умови (i), та виберемо довільним чином точку $x \in \Gamma$, дійсне число $t \in [0,\tau]$, вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ дотичний до Γ в точці x, та число $p \in \mathbb{C}$ такі, що $\operatorname{Re} p \ge -\delta_1|\xi\,|^{2b}$ і $|\,\xi\,| + |\,p\,| \ne 0$. Через $\nu(x)$ позначимо одиничний вектор внутрішньої нормалі до Γ в точці x. З умови (i) та нерівності $n \ge 2$ випливає, що поліном $\det A^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має m коренів

$\zeta_j^+(x,t,\xi,p)$, $j=1,\ldots,m$, з додатньою уявною частиною та m коренів з від'ємною уявною частиною, враховуючи кратність цих коренів.

Тепер можемо сформулювати другу умову

(ii) Для деякого додатнього числа $\delta_1<\delta$ та для кожного зазначеного вище вибору величин x, t, ξ та p, рядки матриці

$$B^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)\cdot\widetilde{A}^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$$

будуть лінійно незалежними за модулем полінома $\prod_{j=1}^{m}(\zeta-\zeta_j^+(x,t,\xi,p))$. Тут $\widetilde{A}^{(0)}$ транспоновна матриця до матриці, утвореної алгебраїчними доповненнями елементів матриці $A^{(0)}$.

Будемо досліджувати параболічну задачу (2.1)–(2.3) у відповідних парах узагальнених просторів Соболєва, означених в першому розділі. Всі функції (та розподіли) вважаємо комплекснозначними.

2.2. Простір правих частин. Умови узгодження

Для формулювання теореми про коректну розв'язність параболічної задачі (2.1)–(2.3), а саме, теореми про ізоморфізми, нам потрібно означити простір правих частин задачі. Він буде складатись з вектор-функцій, що належать узагальненим просторам Соболєва та задовольняють певні умови узгодження.

Покладемо $u:=(u_1,\ldots,u_N)$, $f:=(f_1,\ldots,f_N)$, $g:=(g_1,\ldots,g_N)$ та $h:=(h_1,\ldots,h_N)$. Перепишемо систему (2.1) та граничні умови (2.2) в матричній формі $Au=f$ та $Bu|_S=g$; тут

$$A:=(A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t))_{j,k=1}^{N}\quad \text{і}\quad B:=\big(B_{j,k}(x,t,D_x)\big)_{j,k=1}^{N}$$

є матричні диференціальні оператори. Наступне лінійне відображення

$$u \mapsto \Lambda u := \bigl(Au, Bu, u|_{t=0}\bigr), \quad \text{де } u \in \bigl(C^\infty(\overline{\Omega})\bigr)^N, \tag{2.6}$$

пов'яжемо з задачею (2.1)–(2.3).

Як відомо з теорії параболічних задач, для існування достатньо гладкого розв'язку задачі (2.1)–(2.3), її праві частини мають задовольняти природні умови узгодження, див., наприклад, [23, п. 14]. Ці умови полягають в тому [23, п. 14], що частинні похідні $\partial_t^r u_j(x,t)\,|_{t=0}$, які ми можемо визначити з параболічної системи (2.1) та початкових умов (2.3), мають задовольняти граничним умовам (2.2) та деяким співвідношенням, що отримуються шляхом диференціювання граничних умов за змінною t. Спишемо ці умови. Для цього розглянемо задачу (2.1)–(2.3) у відповідних парах соболєвських просторів.

Нехай дійсне $s \geq 2$. Відображення (2.6) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$\begin{aligned}\Lambda : &\bigl(H^{s,s/2}(\Omega)\bigr)^N \\ &\to \bigl(H^{s-2,s/2-1}(\Omega)\bigr)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2}(S) \oplus \bigl(H^{s-1}(G)\bigr)^N.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Це зразу слідує з [21, глава I, лема 4 та глава II, теореми 3 та 7].

Вибравши довільну вектор-функцію $u(x,t)$ з простору $(H^{s,s/2}(\Omega))^N$ означимо праві частини

$$\begin{gathered} f \in \bigl(H^{s-2,s/2-1}(\Omega)\bigr)^N, \\ g \in \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2}(S), \quad \text{та} \quad h \in \bigl(H^{s-1}(G)\bigr)^N \end{gathered} \tag{2.8}$$

задачі за формулою $(f,g,h) := \Lambda u$ з допомогою обмеженого оператора (2.7).

Умови узгодження правих частин f_j, g_j, and h_j задачі природньо виникають наступним чином. Згідно з [21, глава II, теорема 7], сліди $\partial_t^r u_j(\cdot,0) \in H^{s-2r-1}(G)$ (для всіх $j \in \{1,\dots,N\}$) коректно означені за замиканням для всіх $r \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \le r < s/2 - 1/2$ (і лише таких r). Ці сліди виражаються з рівнянь (2.1) та початкових умов (2.3) в термінах функцій f_j та h_j за рекурентною формулою:

$$
\begin{aligned}
u_j(x,0) &= h_j(x) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,\dots,N\},\\
(\partial_t^r u_j)(x,0) &= -\sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\le 2} \sum_{q=0}^{r-1} \binom{r-1}{q} (\partial_t^{r-1-q} a_{j,k}^{\alpha})(x,0)\, D_x^{\alpha}(\partial_t^q u_k)(x,0) + \\
&\quad + \partial_t^{r-1} f_j(x,0)\\
&\qquad \text{для всіх} \quad j \in \{1,\dots,N\} \quad \text{і}\\
&\qquad \text{для кожного} \quad r \in \mathbb{Z} \quad \text{такого, що} \quad 1 \le r < s/2 - 1/2.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Ці рівності справджуються для майже всіх $x \in G$.

Крім того, згідно з [21, глава II, теорема 7], для кожного $j \in \{1,\dots,N\}$ сліди $\partial_t^r g_j(\cdot,0) \in H^{s-l_j-3/2-2r}(\Gamma)$ коректно означені за замиканням для всіх $r \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \le r < (s - l_j - 3/2)/2$ (і тільки для цих r). Виразимо ці сліди через функції $u_j(x,t)$ та їх частинні похідні за часом за формулою

$$
\begin{aligned}
(\partial_t^r g_j)(x,0) &= \partial_t^r \Biggl(\sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\le l_j} b_{j,k}^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} u_k(x,t) \Biggr)\Big|_{t=0}\\
&= \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\le l_j} \sum_{q=0}^{r} \binom{r}{q} (\partial_t^{r-q} b_{j,k}^{\alpha})(x,0)\, D_x^{\alpha}(\partial_t^q u_k)(x,0)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

для майже всіх $x \in \Gamma$. Тут всі функції $(\partial_t^q u_k)(x,0)$ змінної $x \in G$ виражаються через функції $f_j(x,t)$ та $h_j(x)$ за рекурентною формулою (2.9).

Підставивши (2.9) у праву частину формули (2.10), отримаємо потрібні умови узгодження

$$\begin{gathered}\partial_t^r g_j\restriction\Gamma=\mathcal{B}_{j,r}(v_{1,0},\dots,v_{N,0},\dots,v_{1,r},\dots,v_{N,r})\restriction\Gamma\\ \text{для кожного}\ \ j\in\{1,\dots,N\}\ \ \text{та}\ \ r\in\mathbb{Z}\\ \text{таких, що}\ \ 0\le r<(s-l_j-3/2)/2.\end{gathered}\tag{2.11}$$

Тут, функції $v_{1,0},v_{2,0},\ldots$ визначені майже всюди на G за формулами

$$\begin{aligned}&v_{j,0}(x)=h_j(x),\\ &v_{j,r}(x)=-\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\le 2}\sum_{q=0}^{r-1}\binom{r-1}{q}(\partial_t^{r-1-q}a_{j,k}^{\alpha})(x,0)\,D_x^{\alpha}v_{k,q}(x)+\\ &\qquad\qquad+\partial_t^{r-1}f_j(x,0)\quad\text{якщо}\quad r\ge 1,\end{aligned}\tag{2.12}$$

та

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_{j,r}(v_{1,0},\dots,v_{N,0},\dots,v_{1,r},\dots,v_{N,r})(x)\\ &=\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\le l_j}\sum_{q=0}^{r}\binom{r}{q}(\partial_t^{r-q}b_{j,k}^{\alpha})(x,0)\,D_x^{\alpha}v_{k,q}(x)\end{aligned}\tag{2.13}$$

для майже всіх $x\in G$. Відмітимо, що

$$v_{j,r}\in H^{s-2r-1}(G)\quad\text{для кожного}\quad r\in\mathbb{Z}\cap[0,s/2-1/2)$$

згідно з (2.8). Права частина рівності у (2.11) є коректно означеною, оскільки функція $\mathcal{B}_{j,r}(v_{1,0},\dots,v_{N,0},\dots,v_{1,r},\dots,v_{N,r})$ належить простору $H^{s-l_j-2r-1}(G)$ і тому слід

$$\mathcal{B}_{j,r}(v_{1,0},\dots,v_{N,0},\dots,v_{1,r},\dots,v_{N,r})\restriction\Gamma\in H^{s-l_j-2r-3/2}(\Gamma)\tag{2.14}$$

означений за замиканням завжди, якщо $s-l_j-2r-3/2>0$.

Кількість умов узгодження (2.11) є змінною величиною і являє собою функцію аргумента $s\ge 2$. Ця функція є розривною при тих і тільки тих значеннях s, коли $(s - l_j - 3/2)/2 \in \mathbb{Z}$. Таким чином, множина всіх точок розриву має вигляд

$$E := \{2l + l_j + 3/2 : j, l \in \mathbb{Z},\ 1 \leq j \leq N,\ l \geq 0\} \cap (2, \infty). \tag{2.15}$$

Відмітимо, якщо $s \leq 5/2$ і для деякого j число $l_j = 1$, то відсутні умови узгодження, які включають g_j.

Основний результат цього розділу для параболічної задачі (2.1)–(2.3) полягає в тому, що лінійне відображення (2.6) продовжується єдиним чином до ізоморфізму між відповідними парами узагальнених просторів Соболєва, мова про які йшла в першому розділі. Вкажемо ці пари. Виберемо довільне дійсне число $s \geq 2$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. У випадку $s = 2$ додатково припустимо, що φ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Це припущення пов'язане з тим, що в роботі розглядаються лише такі праві частини системи (2.1), що є інтегровними з квадратом за Лебегом на Ω функціями. Візьмемо простір $(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega))^N$ в якості області визначення цього ізоморфізму. А його область значень вкладається в гільбертів простір

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi} :=& \big(H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\big)^N \\ &\oplus \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}(S) \oplus \big(H^{s-1;\varphi}(G)\big)^N\end{aligned}$$

і позначається $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$. [Якщо $\varphi \equiv 1$, тоді $\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ є простором, в який діє оператор (2.7).] Означимо простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ окремо для випадків $s \notin E$ та $s \in E$.

Почнемо з випадку $s \notin E$. За означенням, лінійний простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ складається з усіх векторів

$$F := \big(f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_N, h_1, \dots, h_N\big) \in \mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}$$

які задовольняють умови узгодження (2.11). Ці умови коректно поставлені для будь-якого зазначеного вище вектора F оскільки вони є коректними завжди, коли $F \in \mathcal{H}^{s-\varepsilon-2,s/2-\varepsilon/2-1}$ та $0 < \varepsilon \ll 1$ і тому, що

$$\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}^{s-\varepsilon-2,s/2-\varepsilon/2-1}. \tag{2.16}$$

Це неперервне вкладення випливає безпосередньо з (1.10) та (1.11). Для випадку $s = 2$ у міркуваннях цього абзацу покладаємо $\varepsilon = 0$; тоді вкладення (2.16) є правильним з огляду на припущення зростання (в нестрогому сенсі) функції φ (див. [51, пункт 3]). Наділимо лінійний простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ нормою з гільбертового простору $\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$– повний, тобто він гільбертовий. Дійсно,

$$\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi} = \mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi} \cap \mathcal{Q}^{s-\varepsilon-2,s/2-\varepsilon/2-1}$$

якщо $0 < \varepsilon \ll 1$. Тут простір $\mathcal{Q}^{s-\varepsilon-2,s/2-\varepsilon/2-1}$ є повним завдяки тому, що диференціальні оператори та оператори сліду, що фігурують в умовах узгодження, є обмеженими у відповідних парах соболєвських просторів. Тому простір

$$\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi} \cap \mathcal{Q}^{s-\varepsilon-2,s/2-\varepsilon/2-1}$$

повний відносно суми норм у компонентах перетину, ця сума еквівалентна нормі в $\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Останнє твердження випливає з вкладання (2.16). Отже, простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ є повним (відносно зазначеної вище норми).

Якщо $s \in E$, тоді означаємо гільбертів простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ з допомогою квадратичної інтерполяції між його, введеними вище, аналогами. А саме, покладемо

$$\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi} := \bigl[\mathcal{Q}^{s-\varepsilon-2,s/2-\varepsilon/2-1;\varphi}, \mathcal{Q}^{s+\varepsilon-2,s/2+\varepsilon/2-1;\varphi}\bigr]_{1/2}. \tag{2.17}$$

Тут довільно вибране число $\varepsilon \in (0, 1/2)$, а права частина рівності є результатом квадратичної інтерполяції з параметром $1/2$ записаної пари гільбертових простірів. Гільбертів простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$, означений формулою (2.17) не залежить від вибору числа ε з точністю до еквівалентності норм і є неперервно вкладеним в $\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Це буде обгрунтовано у зауваженні 2.1 в кінці пункту 2.4.

2.3. Коректна розв'язність задачі

В цьому пункті сформулюємо основний результат даного розділу.

Теорема 2.1. *Для довільних числа $s \geq 2$ і функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ (при $s = 2$ додатково припускаємо, що функція φ зростає в нестрогому сенсі) відображення* (2.6) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda : \left(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\right)^N \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{2.18}$$

Ця теорема є відомою у випадку просторів Соболєва $\varphi \equiv 1$. А саме, вона була доведена в цьому випадку В. А. Солонніковим [23, теорема 5.4] для загальних параболічних систем у припущенні $s, s/2 \in \mathbb{Z}$. Це припущення може бути зняте, як показали С. Д. Ейдельман і М. В. Житарашу в своїй монографії [35, теорема 5.7]. В шкалі узагальнених просторів Соболєва в роботах В. М. Лося і О. О. Мурача доведені версії цієї теореми для скалярної параболічної задачі [58, теореми 4.1 і 4.2](випадок $s > 2$) і [51, теореми 1 і 2] (випадок $s = 2$).

Теорема 2.1 про ізоморфізми має багато застосувань. З її допомогою можна досліджувати властивості глобальної та локальної регулярності узагальнених розв'язків параболічної задачі. Ця теорема також дозволяє отримати нові достатні умови неперервності узагальнених розв'язків, зокрема знайти умови, за яких розв'язки є класичними. Ці застосування буде розглянуто в наступному розділі. Відмітимо, що подібні результати у випадку одного рівняння отримано в [52–57].

Слід зауважити, що необхідність означення простору $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ окремо у випадку $s \in E$ викликана наступним: якщо визначити цей простір для $s \in E$ у спосіб, який використовується у випадку $s \notin E$, то ізоморфізм (2.18) не буде правильним принаймні для $\varphi \equiv 1$. Це випливає з результату Солонникова [22, п. 6] (див. також [49, зауваження 6.4]).

2.4. Доведення теореми 2.1

Виведемо теорему 2.1 з її відомого аналога у випадку просторів Соболєва [35, теорема 5.7] за допомогою квадратичної інтерполяції з функціональним параметром. Означення та необхідні властивості такої інтерполяції було наведено в першому розділі роботи.

Спочатку розглядаємо випадок $s > 2$.

Як випливає з означення простору $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$, нам потрібна відповідна інтерполяційна формула для цього простору у випадку, коли $s \notin E$, де множина E означена формулою (2.15). Нехай $\{J_l : 1 \leq l \in \mathbb{Z}\}$ позначає сукупність усіх зв'язних компонент множини $(2, \infty) \setminus E$. Кожна компонента J_l є певним скінченним підінтервалом променя $(2, \infty)$.

Лема 2.1. *Нехай* $1 \leq l \in \mathbb{Z}$. *Припустимо, що дійсні числа* $s_0, s, s_1 \in J_l$ *задовольняють нерівності* $s_0 < s < s_1$ *і що* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Означимо інтерполя-*

ційний параметр ψ *рівністю* (1.14). *Тоді правильна рівність*

$$\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi} = \left[\mathcal{Q}^{s_0-2,s_0/2-1}, \mathcal{Q}^{s_1-2,s_1/2-1}\right]_{\psi} \tag{2.19}$$

з еквівалентністю норм.

Доведення. Спочатку доведемо аналог формули (2.19) для простору $\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Згідно з твердженнями 1.2, 1.3 та 1.4, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\left[\mathcal{H}^{s_0-2,s_0/2-1}, \mathcal{H}^{s_1-2,s_1/2-1}\right]_{\psi} \\
&\quad = \left(\left[H^{s_0-2,s_0/2-1}(\Omega), H^{s_1-2,s_1/2-1}(\Omega)\right]_{\psi}\right)^{N} \\
&\qquad \oplus \bigoplus_{j=1}^{N} \left[H^{s_0-l_j-1/2,\,(s_0-l_j-1/2)/2}(S), H^{s_1-l_j-1/2,\,(s_1-l_j-1/2)/2}(S)\right]_{\psi} \\
&\qquad \oplus \left(\left[H^{s_0-1}(G), H^{s_1-1}(G)\right]_{\psi}\right)^{N} \\
&\quad = \left(H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\right)^{N} \oplus \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}(S) \oplus \left(H^{s-1;\varphi}(G)\right)^{N} \\
&\quad = \mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\left[\mathcal{H}^{s_0-2,s_0/2-1}, \mathcal{H}^{s_1-2,s_1/2-1}\right]_{\psi} = \mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi} \tag{2.20}$$

з еквівалентністю норм.

Розглянемо множину

$$\left\{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k < \frac{1}{2}\left(s - l_j - \frac{3}{2}\right)\right\} \tag{2.21}$$

для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$. Ця множина пов'язана з умовами узгодження (2.11) і не залежить від s кожного разу, коли число s належить довільно вибраному інтервалу J_l. Нехай $q_{l,j}$ позначає кількість усіх елементів (2.21).

Вибравши $1 \leq l \in \mathbb{Z}$, побудуємо лінійне відображення P_l на

$$\bigcup_{\sigma \in J_l} \mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1} \tag{2.22}$$

таке, що звуження P_l на простір $\mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1}$ є проєктором цього простору на його підпростір $\mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1}$ для кожного $\sigma \in J_l$. Для довільного вектора

$$F := \big(f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_N, h_1, \dots, h_N\big) \in \bigcup_{\sigma \in J_l} \mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1},$$

покладемо

$$\begin{cases} g_j^* := g_j & \text{якщо } q_{l,j} = 0, \\ g_j^* := g_j + T_{l,j}(w_{j,0}, \dots, w_{j,q_{l,j}-1}) & \text{якщо } q_{l,j} \geq 1 \end{cases} \tag{2.23}$$

для кожного $j \in \{1, \dots, N\}$. Тут

$$\begin{aligned} w_{j,0} &:= \mathcal{B}_{j,0}(v_{1,0}, \dots, v_{N,0}) \restriction \Gamma - g_j \restriction \Gamma, \\ &\dots \\ w_{j,q_{l,j}-1} &:= \mathcal{B}_{j,q_{l,j}-1}(v_{1,0}, \dots, v_{N,0}, \dots, v_{1,q_{l,j}-1}, \dots, v_{N,q_{l,j}-1}) \restriction \Gamma \\ &\quad - \partial_t^{q_{l,j}-1} g_j \restriction \Gamma, \end{aligned}$$

де функції $v_{1,0}, \dots, v_{N,q_{l,j}-1}$ та диференціальні оператори $\mathcal{B}_{j,0}, \dots, \mathcal{B}_{j,q_{l,j}-1}$ визначені формулами (2.12) і (2.13) відповідно, а $T_{l,j}$ означає лінійне відображення T з [58, лема 6.1] для випадку $r = q_{l,j}$.

Це відображення діє неперервно

$$T : \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{\lambda-2k-1;\varphi}(\Gamma) \to H^{\lambda,\lambda/2;\varphi}(S)$$

і є правим оберненим до оператора даних Коші

$$R : \eta \mapsto \big(\eta \restriction \Gamma, \partial_t \eta \restriction \Gamma, \dots, \partial_t^{r-1} \eta \restriction \Gamma\big), \quad \text{з} \quad \eta \in \bigcup_{\lambda > 2r-1} H^{\lambda,\lambda/2;\varphi}(S).$$

Відображення T є спільним для всіх $\lambda > 2r - 1$ і будується за допомогою локальних координат на Γ і S на основі лінійного оператора [58, доведення леми 6.1]

$$T_0 : \omega \mapsto F^{-1}_{\xi \mapsto x}\Big[\beta\big(\langle \xi \rangle^2 t\big) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \widehat{\omega_k}(\xi) \times t^k\Big](x, t),$$

з $\omega := (\omega_0, \ldots, \omega_{r-1}) \in \bigl(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})\bigr)^r$. Тут $T_0\omega$ означає розподіл на евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ точок (x,t), де $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in \mathbb{R}$; функція $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ вибрана таким чином, що $\beta = 1$ в деякому околі нуля. Як звичайно, вираз $F^{-1}_{\xi\mapsto x}$ позначає обернене перетворення Фур'є відносно $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Змінна ξ є дуальною до змінної x відносно прямого перетворення Фур'є $\widehat{w}(\xi) = (Fw)(\xi)$ функції $w(x)$. Зауважимо, що наведена вище формула для T_0 подібна до тієї, що використовується в [37, доведення теореми 2.5.7].

Лінійне відображення

$$
\begin{aligned}
P_l :\ &\bigl(f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_N, h_1, \ldots, h_N\bigr) \\
&\mapsto \bigl(f_1, \ldots, f_N, g_1^*, \ldots, g_N^*, h_1, \ldots, h_N\bigr),
\end{aligned}
$$

задане на (2.22) є необхідним. Дійсно, його звуження на простір $\mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1}$ є обмеженим оператором на цьому просторі для кожного $\sigma \in J_l$, що випливає з (2.12)–(2.14) та [58, лема 6.1]. Тут скористались обмеженістю операторів T у випадку, коли $r = q_{l,j}$, $\lambda = \sigma - l_j - 1/2$ і $\varphi(\cdot) \equiv 1$, при цьому виконується умова $\lambda > 2r - 1$, оскільки

$$
q_{l,j} < \frac{1}{2}\left(\sigma - l_j - \frac{3}{2}\right) + 1 \quad \text{якщо} \quad \sigma \in J_l.
$$

Крім того, це випливає з означення P_l і простору $\mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1}$ що

$$
P_l F = (f_1, \ldots, f_N, g_1^*, \ldots, g_N^*, h_1, \ldots, h_N) \in \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1}
$$

для кожного $F \in \mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1}$. Дійсно,

$$
\begin{aligned}
\partial_t^r g_j^* \restriction \Gamma =& \partial_t^r g_j \restriction \Gamma + \partial_t^r T_{l,j}(w_{j,0}, \ldots, w_{j,q_{l,j}-1}) \restriction \Gamma \\
=& \partial_t^r g_j \restriction \Gamma + w_{j,r} \\
=& \partial_t^r g_j \restriction \Gamma + \mathcal{B}_{j,r}(v_{1,0}, \ldots, v_{N,0}, \ldots, v_{1,r}, \ldots, v_{N,r}) \restriction \Gamma - \partial_t^r g_j \restriction \Gamma
\end{aligned}
$$

$$=\mathcal{B}_{j,r}(v_{1,0},\ldots,v_{N,0},\ldots,v_{1,r},\ldots,v_{N,r})\restriction\Gamma$$

для всіх j і r, зазначених у (2.11). Таким чином, вектор $P_l F$ задовольняє умови узгодження, тобто $P_l F \in \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1}$. Крім того, включення $F \in \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1}$ означає, що $P_l F = F$. А саме, якщо $F \in \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1}$, то має місце (2.11), це означає, що всі $w_{j,r}=0$, тобто $g_1^*=g_1$, ..., $g_N^*=g_N$.

Згідно з твердженням 1.1 пара

$$\bigl[\mathcal{Q}^{s_0-2,s_0/2-1},\mathcal{Q}^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]$$

є регулярною (тобто другий простір неперервно і щільно вкладено в перший), і

$$\begin{aligned}&\bigl[\mathcal{Q}^{s_0-2,s_0/2-1},\mathcal{Q}^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_{\psi}\\&=\bigl[\mathcal{H}^{s_0-2,s_0/2-1},\mathcal{H}^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_{\psi}\cap\mathcal{Q}^{s_0-2,s_0/2-1}\end{aligned}\tag{2.24}$$

з еквівалентністю норм.

З формул (2.24) і (2.20) випливає, що

$$\begin{aligned}&\bigl[\mathcal{Q}^{s_0-2,s_0/2-1},\mathcal{Q}^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_{\psi}\\&=\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}\cap\mathcal{Q}^{s_0-2,s_0/2-1}=\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}.\end{aligned}$$

Остання рівність виконується, оскільки $s,s_0\in J_l$; тобто всі елементи підпростору $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ задовольняють ті ж умови узгодження, що й елементи $\mathcal{Q}^{s_0-2,s_0/2-1}$.

□

Доведення. теореми 2.1. Нехай $s>2$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Спочатку розглянемо випадок, коли $s\notin E$. Тоді $s\in J_l$ для деякого цілого $l\geq 1$. Виберемо числа $s_0,s_1\in J_l$ такі, що $s_0<s<s_1$ і $s_j+1/2\notin\mathbb{Z}$ і $s_j/2+1/2\notin\mathbb{Z}$ для кожного $j\in\{0,1\}$. Відповідно до результату М. В. Житарашу та С. Д. Ейдельмана [35, теорема 5.7], відображення (2.6) продовжується однозначно (за

неперервністю) до ізоморфізму

$$\Lambda:\ \big(H^{s_j,s_j/2}(\Omega)\big)^N \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s_j-2,s_j/2-1} \quad \text{для кожного} \quad j\in\{0,1\}. \tag{2.25}$$

Означимо інтерполяційний параметр ψ формулою (1.14). З тверджень 1.2, 1.4 (для випадку $W=\Omega$) та леми 2.1 випливає, що звуження оператора (2.25) з $j=0$ на простір

$$\big[\big(H^{s_0,s_0/2}(\Omega)\big)^N, \big(H^{s_1,s_1/2}(\Omega)\big)^N\big]_\psi = \big(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\big)^N$$

встановлює ізоморфізм

$$\Lambda:\ \big(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\big)^N \leftrightarrow \big[\mathcal{Q}^{s_0-2,s_0/2-1}, \mathcal{Q}^{s_1-2,s_1/2-1}\big]_\psi = \mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{2.26}$$

Оскільки множина $(C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ є щільною в $(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega))^N$, то оператор (2.26) є продовженням за неперервністю відображення (2.6). Отже, теорему 2.1 доведено у випадку $s\notin E$.

Тепер розглянемо випадок $s\in E$. Виберемо довільне $\varepsilon\in(0,1/2)$. Оскільки $s\pm\varepsilon\notin E$ і $s-\varepsilon>2$, маємо ізоморфізми

$$\Lambda:\big(H^{s\pm\varepsilon,(s\pm\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega)\big)^N \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s\pm\varepsilon-2,(s\pm\varepsilon)/2-1;\varphi}, \tag{2.27}$$

як щойно було доведено. Вони означають, що відображення (2.6) однозначно продовжується (за неперервністю) до ізоморфізму

$$\begin{aligned}\Lambda:&\ \big[\big(H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega)\big)^N, \big(H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega)\big)^N\big]_{1/2}\\ &\leftrightarrow \big[\mathcal{Q}^{s-\varepsilon-2,(s-\varepsilon)/2-1;\varphi}, \mathcal{Q}^{s+\varepsilon-2,(s+\varepsilon)/2-1;\varphi}\big]_{1/2} = \mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Остання рівність є означенням простору $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Завдяки твердженням 1.5 і 1.2 маємо

$$\big[\big(H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega)\big)^N, \big(H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega)\big)^N\big]_{1/2} = \big(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\big)^N. \tag{2.29}$$

Залишається застосувати (2.29) до (2.28). Теорему доведено для випадку $s > 2$.

Випадок $s = 2$ доводиться так само, як і теорема 2.1 (разом з лемою 2.1) у випадку $s > 2$, за умови, що використовуємо інтерполяційні формули з [51, розділ 6] замість їх аналогів, використаних у наведеному доведенні.

$\square$

Зауваження 2.1. Нехай $s \in E$. Простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$, визначений формулою (2.17), не залежить від $\varepsilon \in (0, 1/2)$ з точністю до еквівалентності норм. Дійсно, згідно з теоремою 2.1, маємо ізоморфізм

$$\Lambda : \bigl(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\bigr)^N \leftrightarrow \bigl[\mathcal{Q}^{s-\varepsilon-2,(s-\varepsilon)/2-1;\varphi}, \mathcal{Q}^{s+\varepsilon-2,(s+\varepsilon)/2-1;\varphi}\bigr]_{1/2}$$

коли $0 < \varepsilon < 1/2$. Звідси прямо випливає згадана незалежність. Крім того, простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ неперервно вкладається в $\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Дійсно, вибираючи $\varepsilon \in (0, 1/2)$, маємо неперервні вкладення

$$\mathcal{Q}^{s\mp\varepsilon-2,(s\mp\varepsilon)/2-1;\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}^{s\mp\varepsilon-2,(s\mp\varepsilon)/2-1;\varphi} \tag{2.30}$$

з огляду на $s \mp \varepsilon \in (2, \infty) \setminus E$ і означення простору, що записаний зліва. Завдяки інтерполяційній формулі (2.29) та її аналогам для просторів на S і G отримуємо

$$\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi} = \bigl[\mathcal{H}^{s-\varepsilon-2,(s-\varepsilon)/2-1;\varphi}, \mathcal{H}^{s+\varepsilon-2,(s+\varepsilon)/2-1;\varphi}\bigr]_{1/2}, \tag{2.31}$$

див. також [57, лема 6.4]. З (2.30) випливає, що оператор вкладання діє неперервно з (2.17) в (2.31), як і було зазначено.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі дисертації досліджено коректну розв'язність крайової задачі для параболічної за Петровським системи диференціальних рівнянь другого порядку в шкалі узагальнених просторів Соболєва. Одержана теорема про ізоморфізми має широке коло застосувань, зокрема, дає можливість досліджувати регулярність узагальнених розв'язків, їх неперервність на певних множинах та класичність. Для отримання результату було використано теореми про ізоморфізми для параболічних задач в шкалі класичних просторів Соболєва. Основним методом дослідження є квадратична інтерполяція з функціональним параметром. Одержано такі основні результати:

1. Показано, що узагальнений простір Соболєва $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ правих частин параболічної задачі є результатом квадратичної інтерполяції з підходящим функціональним параметром пари відповідних просторів Соболєва (лема 2.1).

2. Встановлено теорему про ізоморфізми в узагальнених просторах Соболєва, породжені неоднорідною початково-крайовою параболічною задачею для системи диференціальних рівнянь другого порядку (теорема 2.1).

Результати цього розділу опубліковано у статті [32] та висвітлено у тезах конференції [2].

РОЗДІЛ 3
РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

В цьому розділі отримаємо нові достатні умови глобальної та локальної регулярності узагальненого розв'язку параболічної задачі (2.1)–(2.3) в узагальнених просторах Соболєва, а також нові достатні умови класичності цього розв'язку.

3.1. Глобальна і локальна регулярність узагальнених розв'язків

Почнемо з означення згаданого вище узагальненого розв'язку.

Нехай усі компоненти правих частин f, g та h задачі є довільними розподілами на Ω, S і G відповідно. Вектор-функцію $u \in \bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^N$ називаємо узагальненим розв'язком задачі (2.1)–(2.3), якщо

$$\Lambda u = (f, g, h), \tag{3.1}$$

де Λ — обмежений оператор (2.18) для $s = 2$ і $\varphi = 1$. З рівності (3.1) випливає, що

$$(f, g, h) \in \mathcal{Q}^{0,0}. \tag{3.2}$$

З ізоморфізму (2.18) випливає (див. також [35, теорема 5.7]), що параболічна задача (2.1)–(2.3) має єдиний узагальнений розв'язок $u \in \bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^N$ для кожного вектора (3.2).

Теорема 3.1. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2.1)–(2.3), *праві частини якої* *задовольняють умову*

$$(f,g,h)\in\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$$

для деяких $s\geq 2$ *і* $\varphi\in\mathcal{M}$ *(у випадку* $s=2$ *додатково припускаємо, що* φ *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією). Тоді* $u\in\bigl(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\bigr)^{N}$.

Цей результат про достатню умову глобальної (тобто в усьому циліндрі Ω аж до його межі) регулярності розв'язку є прямим наслідком теореми 2.1.

Тепер сформулюємо локальну версію цієї теореми. Для цього будуть потрібні локальні версії узагальнених просторів Соболєва, які використовували у попередньому розділі. Нагадаємо їх означення, скориставшись, наприклад, [57, п. 4] або [16, п. 3.4]. Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $\Omega_0:=U\cap\Omega\neq\varnothing$ і $U\cap\Gamma=\varnothing$. Покладемо $\Omega':=U\cap\partial\overline{\Omega}$, $S_0:=U\cap S$, $S':=U\cap\{(x,\tau):x\in\Gamma\}$ і $G_0:=U\cap G$. Позначимо [57, п. 4] через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')$ лінійний простір усіх розподілів u на Ω таких, що $\chi u\in H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Omega'$. Аналогічно, позначимо [57, п. 4] через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_0,S')$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v\in H^{s,s/2;\varphi}(S)$ для будь-якої функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{S})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi\subset S_0\cup S'$. Нарешті, $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_0)$ [57, п. 4] позначає лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w\in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{G})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi\subset G_0$.

Теорема 3.2. *Нехай* $s\geq 2$ *і* $\varphi\in\mathcal{M}$ *(у випадку* $s=2$ *додатково припускаємо, що* φ *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією). Припустимо, що вектор-функція* $u\in\bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^{N}$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2.1)–(2.3), *праві частини якої задовольняють такі* *умови:*

$$f \in \left(H^{s-2,s/2-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N, \tag{3.3}$$

$$g \in \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_0,S'), \tag{3.4}$$

$$h \in \left(H^{s-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_0)\right)^N. \tag{3.5}$$

Тоді $u \in \left(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N$.

Якщо $\Omega' = \varnothing$, то теорема 3.2 стверджує, що регулярність узагальненого розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненого циліндра $\overline{\Omega}$. Якщо $G_0 = \varnothing$, то ця теорема стверджує, що регулярність розв'язку $u(x,t)$ підвищується при $t > 0$. В цих випадках вона є наслідком [54, теорема 2].

Зазначимо, що припущення $U \cap \Gamma = \varnothing$ істотне, оскільки без нього висновок теореми 3.2 є взагалі хибним. Для його істинності у цьому випадку, треба накласти на праві частини задачі (2.1)–(2.3) на множині $U \cap \Gamma$ деякі додаткові умови узгодження.

3.2. Умови неперервності та класичності узагальнених розв'язків

Узагальнені простори Соболєва дозволяють отримати більш тонкі, ніж у випадку класичних просторів Соболєва, достатні умови неперервності узагальненого розв'язку u та його узагальнених похідних заданого порядку на множині $\Omega_0 \cup \Omega'$.

Подібно до [57, с.3617] (див. також [16, зауваження 2.1]) узагальнену функцію $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ називаємо неперервною на множині $\Omega_0 \cup \Omega'$, якщо існує неперервна функція v_0 на $\Omega_0 \cup \Omega'$ така, що

$$v(\omega) = \int\limits_{\Omega_0} v_0(x,t)\,\omega(x,t)\,dxdt \tag{3.6}$$

для довільної функції $\omega \in C^{\infty}(\Omega)$, носій якої задовольняє умову $\operatorname{supp}\omega \subset \Omega_0$. Тут $v(\omega)$ — значення функціонала v на функції ω.

Теорема 3.3. *Нехай задано довільне ціле число $p \geq 0$. Припустимо, що вектор-функція $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2.1)–(2.3), *праві частини якої задовольняють умови* (3.3)–(3.5) *для $s := p + 1 + n/2$ і деякого функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$, що задовольняє умову*

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty, \tag{3.7}$$

причому у випадку $s = 2$ додатково припускаємо, що функція φ зростає (в нестрогому сенсі). Тоді розв'язок $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_N(x,t))$ і кожна його узагальнена частинна похідна $D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t) = (D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u_1(x,t), \ldots, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u_N(x,t))$, де $|\alpha| + 2\beta \leq p$, неперервні на множині $\Omega_0 \cup \Omega'$.

Для цієї теореми правильні версії зауважень 1 і 2 з [54](див. також [16, зауваження 2.2 і 2.3]). Сформулюємо їх.

Зауваження 3.1. Умова (3.7) в теоремі є точною. А саме, нехай $s = p + 1 + n/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і припускаємо, що для кожної функції $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ правильним є твердження: якщо u є розв'язком задачі (2.1)–(2.3), праві частини якої задовольняють (3.3)–(3.5), то цей розв'язок u задовольняє висновок теореми 3.3. Тоді параметр φ задовольняє умову (3.7).

Зауваження 3.2. Узагальнені простори Соболєва дають можливість отримати в теоремі 3.3 мінімальні числові показники регулярності в умовах (3.3)–(3.5). Якщо переформулювати теорему 3.3 на випадок класичних просторів Соболєва ($\varphi = 1$), то (3.7) не виконується і доведеться замінити в умовах (3.3)–(3.5) показник $s = p+1+n/2$ на деяке число $s > p+1+n/2$. Такі умови є більш сильними з огляду на ліві вкладання у (1.10) та (1.11).

Теорема 3.3 дозволяє отримати нові й тонкі достатні умови класичності узагальненого розв'язку задачі (2.1)–(2.3). Сформулюємо означення класичного розв'язку цієї задачі.

Нехай $l_0 := \max\{l_1, \ldots, l_N\}$. Покладемо

$$S_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, S) < \varepsilon\}, \quad G_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, G) < \varepsilon\},$$

де число $\varepsilon > 0$.

Узагальнений розв'язок $u \in \big(H^{2,1}(\Omega)\big)^N$ задачі (2.1)–(2.3) називаємо класичним, якщо узагальнені частинні похідні вектор-функції $u = u(x,t)$ задовольняють такі три умови:

(a) $D_x^\alpha \partial_t^\beta u$ неперервна на Ω, якщо $0 \leq |\alpha| + 2\beta \leq 2$;

(b) $D_x^\alpha u$ неперервна на $S_\varepsilon \cup S$ для деякого числа $\varepsilon > 0$, якщо $0 \leq |\alpha| \leq l_0$;

(c) u неперервна на $G_\varepsilon \cup G$ для деякого числа $\varepsilon > 0$.

Якщо розв'язок $u = u(x,t)$ задачі (2.1)–(2.3) класичний, то її ліві частини є неперервними функціями на відповідних множинах.

Теорема 3.4. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \big(H^{2,1}(\Omega)\big)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2.1)–(2.3)*, праві частини якої* *задовольняють такі умови:*

$$\begin{aligned} f \in \big(H^{1+n/2,\,1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing)\big)^N \cap \\ \cap \big(H^{l_0-1+n/2,\,l_0/2-1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_\varepsilon,S)\big)^N \cap \\ \cap \big(H^{-1+n/2,\,-1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_\varepsilon,G)\big)^N, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$g \in \bigoplus_{j=1}^{N} H^{l_0+n/2-l_j+1/2,\,l_0/2+n/4-l_j/2+1/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S,\varnothing), \tag{3.9}$$

$$h \in \big(H^{n/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G)\big)^N, \tag{3.10}$$

з деяким функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$, який задовольняє умови теореми 3.3. Тоді розв'язок u класичний.

3.3. Доведення теорем 3.2, 3.3 і 3.4

У скалярному випадку $N = 1$ теореми 3.2, 3.3 і 3.4 встановлено в [57, розд. 6] (див. також монографію [16, розд. 3.4, 3.5]). Узагальнюємо розроблені там методи доведення на випадок систем.

Доведення. теореми 3.2. Першим кроком доведемо, що з умов (3.3)–(3.5) випливає істинність імплікації

$$\begin{aligned} u \in \big(H^{s-\lambda,(s-\lambda)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N \Longrightarrow \\ \Longrightarrow u \in \big(H^{s-\lambda+1,(s-\lambda+1)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N \end{aligned} \tag{3.11}$$

для всіх цілих $\lambda \geq 1$, що задовольняють умову $s-\lambda+1 > 2$.

Нехай $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ є довільною функцією такою, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Omega'$. Для χ існує функція $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega_0 \cup \Omega'$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Переставивши диференціальні оператори A і B з оператором множення на функцію χ, отримаємо

$$\begin{aligned} \Lambda(\chi u) = \Lambda(\chi\eta u) = \chi\Lambda(\eta u) + \Lambda'(\eta u) = \\ = \chi\Lambda u + \Lambda'(\eta u) = \chi(f,g,h) + \Lambda'(\eta u). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Тут $\Lambda' := (A', B', 0)$ – оператор, елементи A' і B' якого мають вигляд

$$A' := \Bigl(\sum_{|\alpha|\le 1} a^{\alpha}_{j,k,1}(x,t)\, D^{\alpha}_{x}\Bigr)^{N}_{j,k=1} \quad \text{і} \quad B' := \bigl(b_{j,k,1}(x,t)\bigr)^{N}_{j,k=1},$$

де $a^{\alpha}_{j,k,1} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $b_{j,k,1} \in C^{\infty}(\overline{S})$. Іншими словами, A' і B' — деякі матричні диференціальні оператори, порядки кожної компоненти яких принаймні на одиницю менші, ніж порядки відповідних компонент операторів A і B.

Для кожного $\sigma \ge 1$ оператор Λ' неперервно діє на парі просторів

$$\Lambda' : \bigl(H^{\sigma,\sigma/2;\varphi}(\Omega)\bigr)^{N} \to \mathcal{H}^{\sigma-1,\,\sigma/2-1/2;\,\varphi}. \tag{3.13}$$

У випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ цей факт відомий. Він випливає з властивостей операторів диференціювання та операторів сліду у просторах Соболєва. Звідси неперервність оператора (3.13) у загальному випадку отримуємо методом квадратичної інтерполяції. Для $\sigma > 1$ і довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ це випливає з тверджень 1.2, 1.3 та 1.4. Для $\sigma = 1$ і зростаючої функції $\varphi \in \mathcal{M}$ — з [51, леми 2 і 3], [61, теорема 4.1] та твердження 1.2.

З умов (3.3)–(3.5) теореми випливає, що

$$\chi\,(f,g,h) \in \mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{3.14}$$

Врахувавши неперервність оператора Λ' на парі просторів (3.13), де $\sigma := s-\lambda$, маємо

$$\begin{aligned} u \in \bigl(H^{s-\lambda,(s-\lambda)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\bigr)^{N} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \Lambda'(\eta u) \in \mathcal{H}^{s-\lambda-1,(s-\lambda-1)/2;\varphi}. \end{aligned}$$

З цієї імплікації, включення (3.14) та формули (3.12) випливає, що

$$u\in\left(H^{s-\lambda,(s-\lambda)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N\Longrightarrow \\ \Longrightarrow\Lambda(\chi u)\in\mathcal{H}^{s-\lambda-1,(s-\lambda-1)/2;\varphi}. \tag{3.15}$$

Далі покажемо, що з умов $U\cap\Gamma=\varnothing$ і $\Lambda(\chi u)\in\mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}$ випливає включення

$$\Lambda(\chi u)\in\mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi} \tag{3.16}$$

для будь-якого $\sigma\geq 2$. Цей факт дасть можливість довести (3.11), скориставшись теоремою 3.1.

Оскільки $U\cap\Gamma=\varnothing$, то $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi,\Gamma)>0$. Це означає, що $\Lambda(\chi u)=0$ в деякому околі множини Γ. Тому вектор-функція $\Lambda(\chi u)$ задовольняє умови узгодження (2.11) правих частин параболічної задачі (2.1)–(2.3). Отже, згідно з означенням простору $\mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}$ у випадку $\sigma\notin E$ виконується включення $\Lambda(\chi u)\in\mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}$.

Розглянемо випадок $\sigma\in E$. Нехай $\chi_1\in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\chi_1=0$ в околі множини Γ і $\chi_1=1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. З попередніх міркувань випливає, що відображення $M_{\chi_1}:F\mapsto\chi_1 F$ є обмеженим оператором на просторах

$$M_{\chi_1}:\mathcal{H}^{\sigma\pm\varepsilon-2,(\sigma\pm\varepsilon)/2-1;\varphi}\to \\ \to\mathcal{Q}^{\sigma\pm\varepsilon-2,(\sigma\pm\varepsilon)/2-1;\varphi}, \tag{3.17}$$

якщо $0<\varepsilon<1/2$, оскільки $\sigma\pm\varepsilon\notin E$. Інтерполюючи з числовим параметром $1/2$ оператори (3.17) маємо обмежений оператор

$$M_{\chi_1}:\left[\mathcal{H}^{\sigma-\varepsilon-2,(\sigma-\varepsilon)/2-1;\varphi},\mathcal{H}^{\sigma+\varepsilon-2,(\sigma+\varepsilon)/2-1;\varphi}\right]_{1/2}\to \\ \to\left[\mathcal{Q}^{\sigma-\varepsilon-2,(\sigma-\varepsilon)/2-1;\varphi},\mathcal{Q}^{\sigma+\varepsilon-2m,(\sigma+\varepsilon)/2-1;\varphi}\right]_{1/2}.$$

Згідно з інтерполяційною формулою (2.31) для просторів $\mathcal{H}^{\sigma\pm\varepsilon-2,(\sigma\pm\varepsilon)/2-1;\varphi}$ та означенням простору $\mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}$ (див. формулу (2.17)) цей оператор діє на парі просторів

$$M_{\chi_1} : \mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi} \to \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}. \tag{3.18}$$

Оскільки χ_1 така, що $\chi_1 = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$, то $\chi_1\Lambda(\chi u) = \Lambda(\chi u)$. Нагадаємо, що $\Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}$. Тоді на підставі (3.18) виконується включення

$$\Lambda(\chi u) = \chi_1\Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}.$$

Випадок $\sigma \in E$ розглянуто.

З формул (3.15) і (3.16), де $\sigma = s - \lambda + 1$, випливає за теоремою 3.1, що

$$\begin{aligned} & u \in \left(H^{s-\lambda,(s-\lambda)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{s-\lambda-1,(s-\lambda-1)/2;\varphi} \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{s-\lambda-1,(s-\lambda-1)/2;\varphi} \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow \chi u \in \left(H^{s-\lambda+1,(s-\lambda+1)/2;\varphi}(\Omega)\right)^N. \end{aligned}$$

Оскільки $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ є довільною функцією, підпорядкованою умові $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Omega'$, то останнє включення означає, що $u \in \left(H^{s-\lambda+1,(s-\lambda+1)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N$. Оскільки за умовою теореми $\chi u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ й, крім того, $s - \lambda + 1 > 2$, то можна застосувати теорему 3.1. Імплікацію (3.11) доведено.

За її допомогою доведемо потрібне включення $u \in \left(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N$. Нагадаємо, що $s \geq 2$. Нехай спочатку $s \notin \mathbb{Z}$. Тоді існує ціле число λ_0 таке, що

$$s - \lambda_0 < 2 < s - \lambda_0 + 1.$$

За умовою теореми $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$. Використавши (3.11) послідовно для значень $\lambda := \lambda_0$, $\lambda := \lambda_0 - 1$,..., $\lambda := 1$, робимо висновок, що

$$u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N \subset \left(H^{s-\lambda_0,(s-\lambda_0)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u \in \big(H^{s-\lambda_0+1,(s-\lambda_0+1)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N \Longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \Longrightarrow u \in \big(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N.$$

Отже, потрібне включення доведено у розглянутому випадку.

Перейдемо до випадку коли $s \in \mathbb{Z}$ і $s > 2$. Використаємо щойно отриманий результат. Нехай $0 < \varepsilon \ll 1$. Тоді $s - \varepsilon \notin \mathbb{Z}$ і $s - \varepsilon > 2$. Згідно з цим результатом

$$u \in \big(H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N.$$

Застосувавши імплікацію (3.11), де $\lambda = 1$, робимо висновок, що

$$u \in \big(H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N \subset \big(H^{s-1,(s-1)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow u \in \big(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N.$$

Випадок $s = 2$ розглянемо окремо, оскільки в ньому є таке додаткове припущення: функція $\varphi \in \mathcal{M}$ зростає. З умов (3.3)–(3.5) теореми випливає включення

$$\chi\,(f,g,h) \in \mathcal{H}^{0,0;\varphi}. \tag{3.19}$$

для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умову $\mathrm{supp}\,\chi \subset \Omega_0 \cup \Omega'$. З неперервності оператора (3.13), де $\sigma = 1$, випливає імплікація

$$u \in \big(H^{1,1/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N \Longrightarrow \Lambda'(\eta u) \in \mathcal{H}^{0,0;\varphi},$$

де функція η така, як і раніше у доведенні. На підставі умови $u \in \big(H^{2,1}(\Omega)\big)^N$, формули (3.12), включення (3.19) та цієї імплікації робимо висновок, що

$$\begin{aligned} &u \in \big(H^{2,1}(\Omega)\big)^N \subset \big(H^{1,1/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{0,0;\varphi}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

З формул (3.20) і (3.16), де $\sigma = 2$, та теореми 3.1 випливає, що

$$u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N \Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{0,0;\varphi} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{0,0;\varphi} \Longrightarrow \chi u \in \left(H^{2,1;\varphi}(\Omega)\right)^N.$$

□

Доведення. теореми 3.3. Нагадаємо, що $n \geq 2$, тому $p + 1 + n/2 \geq 2$. Згідно з теоремою 3.2 виконується включення $u \in \left(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Omega')\right)^N$, де $s = p + 1 + n/2$ і φ задовольняє (3.7). У праці [57, доведення теореми 4.3] (див. також [16, доведення теореми 2.6]) встановлено такий результат: якщо узагальнена функція v належить простору $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Omega')$, де $s = p + 1 + n/2$, а φ задовольняє (3.7), то вона разом з усіма її узагальненими частинними похідними $D^{\alpha}_x \partial^{\beta}_t v(x,t)$, де $|\alpha| + 2\beta \leq p$, є неперервною на множині $\Omega_0 \cup \Omega'_0$. Звідси і випливає висновок теореми 3.3. □

Доведення. теореми 3.4. Треба показати, що u задовольняє умови (a)–(c) означення класичного розв'язку. З умови (3.8), а саме, із включення

$$f \in \left(H^{1+n/2,\, 1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)\right)^N$$

випливає на підставі теореми 3.3 у випадку, коли $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega' = S_0 = S' = G_0 = \varnothing$ і $p = 2$, що u задовольняє умову (a).

Включення

$$f \in \left(H^{l_0-1+n/2,\, l_0/2-1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_\varepsilon, S)\right)^N$$

і умова (3.9) тягнуть за собою виконання умови (b) для u з огляду на теорему 3.3 у випадку, коли $\Omega_0 = S_\varepsilon$, $\Omega' = S_0 = S$, $S' = G_0 = \varnothing$ і $p = l_0$.

Нарешті, u задовольняє умову (c) на підставі включення

$$f \in \left(H^{-1+n/2,\, -1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_\varepsilon, G)\right)^N$$

і умови (3.10) згідно з теоремою 3.3 у випадку, коли $\Omega_0 = G_\varepsilon$, $\Omega' = G_0 = G$, $S_0 = S' = \varnothing$ і $p = 0$.

$\square$

3.4. Класичність розв'язків параболічної задачі тепломасообміну

Крайові задачі для параболічних систем диференціальних рівнянь другого порядку є математичними моделями багатьох прикладних задач. Розглянемо в цьому пункті окремий змістовний випадок параболічної задачі. А саме, мішану задачу для системи двох диференціальних рівнянь другого порядку з двома крайовими умовами, одна з яких Діріхле, друга – Неймана. Такі задачі виникають, зокрема, в теорії тепломасообміну [34, п.2.4]. В теоремі 3.4 сформульовано достатні умови класичності узагальнених розв'язків широкого класу параболічних задач, до якого належить і згадана задача. При цьому в означенні класичного розв'язку не вимагалась його неперервність на лінії з'єднання основи і бічної поверхні циліндра. Часто зазначену умову неперервності вважають частиною означення класичного розв'язку задачі (див., наприклад, [19, с.42]). В цьому випадку класичний розв'язок називатимемо сильно класичним. Встановимо в цьому пункті нові достатні умови, за яких узагальнений розв'язок задачі буде сильно класичним, а також конкретизуємо умови існування класичного розв'язку цієї задачі на основі теореми 3.4.

Розглянемо у циліндрі Ω таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\partial_t u_1(x,t) =& a_{11}\Delta u_1(x,t) + a_{12}\Delta u_2(x,t) + f_1(x,t),\\ \partial_t u_2(x,t) =& a_{21}\Delta u_1(x,t) + a_{22}\Delta u_2(x,t) + f_2(x,t),\\ &\text{для всіх}\quad (x,t)\in\Omega.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Тут всі коефіцієнти a_{ij} є сталі дійсні числа, а характеристичні числа λ_1 і λ_2 матриці (a_{ij}) такі, що $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Така система задовольняє умову (i) означення параболічної задачі (див. пункт 2.1), або, іншими словами, система є параболічною за Петровським (див., наприклад, [34, п. 2.4]).

На бічній поверхні циліндра задано дві крайові умови:

$$\begin{aligned}b_{11}\, D_n u_1(x,t) + b_{12}\, D_n u_2(x,t) = g_1(x,t),\\ b_{21} u_1(x,t) + b_{22} u_2(x,t) = g_2(x,t),\\ \text{для всіх}\quad (x,t)\in S.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Тут всі коефіцієнти b_{ij} є сталі дійсні числа такі, що для задачі (3.21)–(3.22) виконується умова (ii) означення параболічної задачі (див. пункт 2.1). Ця умова виконується, зокрема, якщо $b_{11}b_{22} = 0$ або $b_{21}b_{12} = 0$, але не одночасно (див., наприклад, [34, п. 2.4]).

На основі циліндра задано початкові дані Коші:

$$\begin{aligned}&u_1(x,t)\big|_{t=0} = h_1(x),\\ &u_2(x,t)\big|_{t=0} = h_2(x),\\ &\text{для всіх}\quad x\in G.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Згідно зі зробленими припущеннями щодо коефіцієнтів у лівих частинах виразів (3.21) і (3.22), початково-крайова задача (3.21)–(3.23) буде параболічною за Петровським у циліндрі Ω (див. означення в пункті 2.1).

Параболічність за Петровським задачі (3.21)–(3.23) означає її коректну розв'язність у відповідних шкалах узагальнених просторів Соболєва, що випливає з теореми 2.1. Це, зокрема, означає, що для будь-якого вектора $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$ правих частин задачі з соболєвського простору $\mathcal{Q}^{0,0}$ задача має єдиний розв'язок $(u_1, u_2) \in \big(H^{2,1}(\Omega)\big)^2$.

В нашому випадку простір $\mathcal{Q}^{0,0}$ складається з вектор-функцій $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$, які належать простору

$$\big(H^{0,0}(\Omega)\big)^2 \oplus H^{1/2,1/4}(S) \oplus H^{3/2,3/4}(S) \oplus \big(H^1(G)\big)^2$$

і задовольняють природню умову узгодження на лінії Γ з'єднання бічної поверхні і основи циліндра:

$$g_2 \restriction \Gamma = (b_{21}h_1 + b_{22}h_2) \restriction \Gamma. \tag{3.24}$$

Отже, для будь-якого вектора $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$ правих частин задачі (3.21)–(3.23), що задовольняє такі умови

$$\begin{aligned}
&f_1, f_2 \in H^{0,0}(\Omega),\\
&g_1 \in H^{1/2,1/4}(S),\ \ g_2 \in H^{3/2,3/4}(S),\\
&h_1, h_2 \in H^1(G),\\
&g_2 \restriction \Gamma = (b_{21}h_1 + b_{22}h_2) \restriction \Gamma,
\end{aligned}$$

задача має єдиний розв'язок $u = (u_1, u_2) \in \big(H^{2,1}(\Omega)\big)^2$. Цей розв'язок називаємо *узагальненим* розв'язком нашої задачі.

З практичної точки зору є важливим питання, за яких умов на праві частини задачі її узагальнений розв'язок буде в певному розумінні класичним. Оскільки під класичним розуміють такий неперервно диференційовний певну кількість разів розв'язок $u = (u_1, u_2)$, що ліві частини системи, крайових та початкових умов обчислюються в сенсі класичного диференціювання та слідів неперервних функцій u_1 та u_2. Як згадували на початку цього пункту, часто однією з умов в означенні класичного розв'язку задачі є умова його неперервності на лінії Γ з'єднання бічної поверхні і основи циліндра. Ця умова буде виконана, якщо розв'язок є неперервним у замкненому циліндрі $\overline{\Omega}$. В такому випадку будемо вживати термін "сильно класичний розв'язок".

Сфорулюємо точне означення. Нехай

$$S_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, S) < \varepsilon\}, \quad G_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, G) < \varepsilon\},$$

де число $\varepsilon > 0$.

Узагальнений розв'язок $u = (u_1, u_2) \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^2$ задачі (3.21)–(3.23) назвемо *сильно класичним,* якщо він та його узагальнені похідні задовольняють такі умови:

(a1) $D_x^\alpha u_1$, $D_x^\alpha u_2$ при $0 \le |\alpha| \le 2$ та $\partial_t u_1$ і $\partial_t u_2$ неперервні на Ω;

(b1) $D_x^\alpha u_1$ і $D_x^\alpha u_2$ неперервні на $S_\varepsilon \cup S$ для деякого числа $\varepsilon > 0$, якщо $0 \le |\alpha| \le 1$;

(c1) u_1 і u_2 неперервні на $\overline{\Omega}$.

Нагадаємо, узагальнений розв'язок $u = (u_1, u_2) \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^2$ задачі (3.21)–(3.23) називається *класичним,* (див. пункт 3.2) якщо він та його узагальнені похідні задовольняють умови (a1), (b1) та

(c2) u_1 і u_2 неперервні на $G_\varepsilon \cup G$ для деякого числа $\varepsilon > 0$.

В означенні класичного розв'язку задачі формулюються мінімальні умови на вектор-функцію u, за яких вона в термінах класичних похідних і слідів задовольняє рівняння (3.21), крайові умови (3.22) і початкові умови (3.23). Для цього умова (c1) неперервності вектор-функції u в усьому циліндрі заміняється на умову (c2) неперервності лише в деякому малому околі основи G.

Якщо вектор-функція $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ є класичним розв'язком задачі (3.21)–(3.23), то ліві частини рівняння, крайових та початкових умов є неперервними функціями на відповідних множинах. Зрозуміло, що сильно класичний розв'язок є класичним, але не навпаки.

Умови, за яких узагальнений розв'язок загальної параболічної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь є класичним сформульовані в теоремі 3.4. Наступна теорема є конкретизацією зазначеної теореми для розглядуваної задачі.

Теорема 3.5. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^2$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (3.21)–(3.23), *праві частини якої задовольняють такі умови:*

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) \in \bigl(&H^{1+n/2,\,1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)\bigr)^2 \cap \\ &\cap \bigl(H^{n/2,\,n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_\varepsilon, S)\bigr)^2 \cap \\ &\cap \bigl(H^{-1+n/2,\,-1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_\varepsilon, G)\bigr)^2, \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$g_1 \in H^{n/2+1/2,\,n/4+1/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S, \varnothing),\ \ g_2 \in H^{n/2+3/2,\,n/4+3/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S, \varnothing),$$

$$(h_1, h_2) \in \bigl(H^{n/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G)\bigr)^2$$

з деяким функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$, *що задовольняє інтегральну умову*

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty. \tag{3.26}$$

У випадку $n = 2$ *додатково припускаємо, що функція* φ *зростає (в нестрогому сенсі). Тоді розв'язок* $u = (u_1, u_2)$ *класичний.*

Теорема 3.5 є окремим випадком теореми 3.4 при $N = 2$, $l_0 = l_1 = 1$ і $l_2 = 0$.

Нагадаємо, припущення зростання φ при $n = 2$ необхідне з огляду на те, що результат про розв'язність задачі (3.21)–(3.23) в узагальнених просторах Соболєва (теорема 2.1) отримано за умови, що її праві частини належать просторам, які вкладаються у відповідні простори $L_2(\cdot)$. А, наприклад, простір $H^{0,0;\varphi}(\Omega)$ для спадної φ буде вже ширший ніж $H^{0,0}(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Відмітимо для тільки наведеної теореми версію зауваження 3.2.

Зауваження 3.3. Використання узагальнених просторів Соболєва дає більш тонкий результат ніж у випадку просторів Соболєва. А саме, щоб висновок теореми 3.5 залишився правильним при $\varphi = 1$ (тут (3.26) не виконується), треба в (3.25) збільшити числові показники регулярності просторів на деяке число $\delta > 0$. Іншими словами ці умови замінити на такі:

$$
\begin{aligned}
(f_1, f_2) \in \bigl(H^{1+n/2+\delta,\, 1/2+n/4+\delta/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)\bigr)^2 \cap \\
\cap \bigl(H^{n/2+\delta,\, n/4+\delta/2}_{\mathrm{loc}}(S_\varepsilon, S)\bigr)^2 \cap \\
\cap \bigl(H^{-1+n/2+\delta,\, -1/2+n/4+\delta/2}_{\mathrm{loc}}(G_\varepsilon, G)\bigr)^2,
\end{aligned}
$$

$$
g_1 \in H^{n/2+1/2+\delta,\, n/4+1/4+\delta/2}_{\mathrm{loc}}(S, \varnothing), \;\; g_2 \in H^{n/2+3/2+\delta,\, n/4+3/4+\delta/2}_{\mathrm{loc}}(S, \varnothing),
$$

$$
(h_1, h_2) \in \bigl(H^{n/2+\delta}_{\mathrm{loc}}(G)\bigr)^2.
$$

Як показують ліві вкладання в (1.10) та (1.11), останні умови є більш сильними ніж (3.25).

Сформулюємо тепер основний результат цього пункту – умови, за яких розв'язок $u = u(x, t)$ задачі (3.21)–(3.23) буде сильно класичним.

Теорема 3.6. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \bigl(H^{2,1}(\Omega)\bigr)^2$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (3.21)–(3.23), *праві частини якої задовольняють такі умови:*

$$(f_1, f_2) \in \bigl(H^{1+n/2,\,1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)\bigr)^2 \cap \bigl(H^{n/2,\,n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_\varepsilon, S)\bigr)^2, \tag{3.27}$$

$$\begin{gathered} g_1 \in H^{n/2+1/2,\,n/4+1/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S, \varnothing), \\ g_2 \in H^{n/2+3/2,\,n/4+3/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S, \varnothing), \end{gathered} \tag{3.28}$$

$$(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4;\varphi} \tag{3.29}$$

з деяким функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$, *що задовольняє інтегральну умову* (3.26). *У випадку* $n = 2$ *додатково припускаємо, що функція* φ *зростає (в нестрогому сенсі). Тоді розв'язок* $u = (u_1, u_2)$ *сильно класичний.*

Відмітимо, щоб вказати, яким просторам належать праві частини задачі згідно умови (3.29), треба скористатись означенням простору $\mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4;\varphi}$. Він має доволі складну будову завдяки умовам узгодження (2.11), накладеним на компоненти його елементів. Кількість та складність цих умов зростає зі зростанням n.

Зауваження 3.4. У випадках $n = 2$ або $n = 3$ умова (3.29) в теоремі 3.6 еквівалентна такій

$$\begin{aligned} &(f_1, f_2) \in \bigl(H^{-1+n/2,\,-1/2+n/4;\varphi}(\Omega)\bigr)^2, \\ &g_1 \in H^{n/2-1/2,\,n/4-1/4;\varphi}(S), \\ &g_2 \in H^{n/2+1/2,\,n/4+1/4;\varphi}(S), \\ &(h_1, h_2) \in \bigl(H^{n/2;\varphi}(G)\bigr)^2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Взагалі, простір $\mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4;\varphi}$ для $n = 2$ або $n = 3$ складається з вектор-функцій, що задовольняють одночасно (3.30) і (3.24). Але для вектор-функцій $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$ з формулювання теореми 3.6 виконання (3.24) випливає з умови теореми $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^2$. Дійсно, тоді $(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}^{0,0}$. За означенням простору $\mathcal{Q}^{0,0}$, його елементи задовольняють (3.24). При $n \geq 4$ простір $\mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4;\varphi}$ складається з векторів, які задовольняють включення (3.30) та більш складні ніж (3.24) умови узгодження (2.11).

Зазначимо, що для теореми 3.6 правильна версія зауваження 3.3.

Доведення. теореми 3.6. Покажемо, що функції u_1 і u_2 задовольняють умови (a1)–(c1) означення сильно класичного розв'язку. Для умов (a1) і (b1) використаємо теорему 3.3.

Почнемо з (a1). Покладемо $N = 2$, $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega' = S_0 = S' = G_0 = \varnothing$ і $p = 2$. Далі скористаємось включенням

$$(f_1, f_2) \in \left(H^{1+n/2,\,1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)\right)^2$$

з умови (3.27). Тоді з теореми 3.3 випливає, що вектор-функція $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ і кожна її узагальнена частинна похідна $D^\alpha_x \partial^\beta_t u(x,t) = (D^\alpha_x \partial^\beta_t u_1(x,t), D^\alpha_x \partial^\beta_t u_2(x,t))$, де $|\alpha| + 2\beta \leq 2$, неперервні на множині $\Omega_0 \cup \Omega' = \Omega$. При $\beta = 0$ маємо неперервність $D^\alpha_x u_1$ і $D^\alpha_x u_2$ для $|\alpha| \leq 2$, при $|\alpha| = 0$ – неперервність $\partial_t u_1$ і $\partial_t u_2$ відповідно. Таким чином, виконується умова (a1).

Перейдемо до умови (b1). Покладемо $N = 2$, $\Omega_0 = S_\varepsilon$, $\Omega' = S_0 = S$, $S' = G_0 = \varnothing$ і $p = 1$. Використаємо включення

$$(f_1, f_2) \in \left(H^{n/2,\,n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_\varepsilon, S)\right)^2$$

з (3.27) та включення (3.28):

$$g_1 \in H^{n/2+1/2,\,n/4+1/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S, \varnothing), \quad g_2 \in H^{n/2+3/2,\,n/4+3/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S, \varnothing).$$

В цьому випадку з теореми 3.3 випливає, що вектор-функція $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ і кожна її узагальнена частинна похідна $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) = (D_x^\alpha \partial_t^\beta u_1(x,t), D_x^\alpha \partial_t^\beta u_2(x,t))$, де $|\alpha| + 2\beta \leq 1$, неперервні на множині $\Omega_0 \cup \Omega' = S_\varepsilon \cup S$. При $\beta = 0$ маємо неперервність $D_x^\alpha u_1$ і $D_x^\alpha u_2$ для $|\alpha| \leq 1$. Отже, виконується умова (b1).

Нарешті, розглянемо умову (c1). Скориставшись включенням (3.29)

$$(f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}^{-1+n/2,-1/2+n/4;\varphi}$$

та теоремою 3.1 з $s = 1 + n/2$ робимо висновок, що

$$(u_1(x,t), u_2(x,t)) \in (H^{1+n/2,1/2+n/4;\varphi}(\Omega))^2.$$

Розглянемо простір $H^{1+n/2,1/2+n/4;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ з функціональним параметром φ, який задовольняє інтегральну умову (3.26). З [16, Теорема 1.13(i)] при $p = 0$ і $b = 1$ випливає, що всі елементи цього простору є неперевними на $\mathbb{R}^{n+1}$ функціями. За означенням, простір $H^{1+n/2,1/2+n/4;\varphi}(\Omega)$ складається зі звужень на Ω розподілів з простору $H^{1+n/2,1/2+n/4;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$. Тому для u_1 і u_2 існують такі w_1 і w_2 з простору $H^{1+n/2,1/2+n/4;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $u_1 = w_1 \restriction \Omega$ і $u_2 = w_2 \restriction \Omega$. Це означає, що u_1 і u_2 є неперервними функціями на $\overline{\Omega}$, тобто виконується умова (c1).

$\square$

Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджено властивості регулярності узагальнених розв'язків параболічної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь другого порядку у гільбертових анізотропних узагальнених просторах Соболєва. Отримано нові достатні умови класичності узагальнених розв'язків. Результати конкретизовано та доповнено на випадок задач для системи двох диференціальних рівнянь, які виникають, зокрема, в теорії тепломасообміну. Одержано такі основні результати:

1. Встановлено теореми про глобальну і локальну регулярність узагальнених розв'язків неоднорідної початково-крайової параболічної задачі для системи диференціальних рівнянь другого порядку в узагальнених просторах Соболєва (теореми 2.1 і 3.1).

2. Отримано нові достатні умови неперервності похідних узагальненого розв'язку задачі в заданій області, зокрема умови, за яких узагальнений розв'язок є класичним (теореми 3.2 і 3.3). Їх сформульовано в термінах узагальнених просторів Соболєва.

3. Умови класичності узагальненого розв'язку конкретизовано на випадок задач для системи двох диференціальних рівнянь (теорема 3.4). Для цих задач отримано умову сильної класичності узагальненого розв'язку (теорема 3.5).

Результати цього розділу опубліковано у статті [5] та висвітлено у тезах конференцій [3, 4].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

У дисертації досліджено характер розв'язності та властивості регулярності узагальнених розв'язків крайових задач для параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами Діріхле або крайовими умовами першого порядку в шкалах гільбертових анізотропних узагальнених просторів Соболєва. Регулярність належних цим просторам розподілів характеризується функціональним параметром, на відміну від класичних просторів Гельдера і Соболєва, у яких ця характеристика виражається дійсними числами. Тому використання узагальнених просторів Соболєва дає можливість описати властивості гладкості, зокрема неперервності, належних ним функцій більш точно ніж це можна зробити в термінах згаданих класичних шкал функціональних просторів.

У дисертації отримано такі основні результати.

1. Встановлено теорему про коректну розв'язність лінійних неоднорідних початково-крайових параболічних задач для систем диференціальних рівнянь другого порядку в узагальнених просторах Соболєва. Тобто показано, що оператори, породжені цими задачами, встановлюють ізоморфізми між відповідними парами згаданих просторів.

2. Встановлено теорему про глобальну (в усьому циліндрі аж до його межі) регулярність узагальнених розв'язків цих задач в узагальнених просторах Соболєва.

3. Встановлено теорему про локальну (в заданій області) регулярність узагальнених розв'язків цих задач в узагальнених просторах Соболєва.

4. Отримано нові достатні умови неперервності похідних цілого порядку $p \geq 0$ узагальненого розв'язку задачі в заданій області. В цих умовах визначено мінімально необхідний числовий показник регулярності $s = p+1+n/2$ узагальненого простору Соболєва. Цей результат є більш точним порівняно з використанням просторів Соболєва, оскільки для останніх має бути $s > p+1+n/2$.

5. Знайдено нові достатні умови класичності узагальнених розв'язків розглядуваних в роботі задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – Т.19, № 3. – С. 53 – 161.

2. *Дяченко О., Лось В.* Про деякі мішані задачі для параболічних за Петровським систем у просторах Хермандера // Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування: Матеріали міжнародної наукової конференції присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана, 16-19 вересня 2020р. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2020. – С. 120 – 121.

3. *Дяченко О.* Про регулярність розв'язків деяких параболічних систем // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (23–25 травня 2023 р.). Тези доповідей. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023– С. 341 – 342.

4. *Дяченко О.* Про класичність узагальнених розв'язків неоднорідних крайових задач для параболічних систем другого порядку // Математика та інформаційні технології: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. – С. 189 – 190.

5. *Дяченко О. В., Лось В. М.* Умови регулярності розв'язків деяких параболічних систем // Укр. матем. журн. — 2022. — Т.74, № 8. — С. 1107 – 1117.

Переклад англ. мовою:

Diachenko O., Los V. Regular conditions for the solutions to some parabolic systems // Ukrainian Math. J. – 2023. – 74, № 8. – P. 1263–1274.

6. *Житарашу Н. В.* Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2–теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И. Г. Петровскому уравнения // Математический сборник.– 1985.– Т. 128(170), № 4(12).– С. 451–473.

7. *Житарашу Н. В.* О корректной разрешимости общих модельных параболических граничных задач в пространствах $\mathcal{H}^s$, $-\infty < s < \infty$ // Известия АН СССР.– 1987.– Т. 51, № 5.– С. 962–993.

8. *Житарашу Н. В.* L_2–теория обобщенных решений общих линейных параболических граничных задач // Математические исследования.– 1990.– Т. 112.– С. 104–115.

9. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости общих параболических граничных задач в негативных пространствах Гельдера // Доклады АН УССР. Серия А.– 1977.– № 5.– С. 396–400.

10. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Выща школа, 1990. – 200 с.

11. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – Т.15, № 2. – С. 97 – 154.

12. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. – 1962. – Т.17, № 3. – С. 3 – 146.

13. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

14. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

15. *Лионс Ж.-Л., Мадженес. Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с. (Переклад видання: Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1. Paris: Dunod, 1968. 372 p.)

16. *Лось В. М., Михайлець В. А., Мурач О. О.* Параболічні граничні задачі та узагальнені простори Соболєва. – Київ: Наукова думка, 2023. – 162 с.

17. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О корректности задач Дирихле и Неймана для параболических уравнений второго порядка с коэффициентами из классов Дини // Украинский математический журнал.– 1974.– Т. 26, № 3.– С. 328–337.

18. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2010. – 372 с.

19. *Михайлов В. П.* Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем. Математическая энциклопедия. Т. 5. Москва: Советская энциклопедия, 1985. 1248 с.

20. *Ройтберг И. Я., Ройтберг Я. А.* Формула Грина и плотность решений общих параболических задач в функциональных пространствах на многообразиях // Диф. ур-ния.— 1995.— Т. 31, N8.— С.1426—1433.

21. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Ученые записки Ленинградского гос. пед. ин-та. – 1958. – Т.197 – С. 54 – 112.

22. *Солонников В. А.* Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа // Труды Математического института АН СССР. – 1964. – Т.70, С. 133 – 212.

23. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Труды Математического института АН СССР. – 1965. – Т.83, С. 3 – 163.

24. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968. 428 с. (Переклад видання: Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall Inc, 1964.)

25. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. Москва: Наука, 1964. (Переклад англійською: Eidel'man S. D. Parabolic systems. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.)

26. *Anop, A.; Chepurukhina, I.; Murach, A.* Elliptic Problems with Additional Unknowns in Boundary Conditions and Generalized Sobolev Spaces // Axioms.–2021, 10, 292, P. 1–23.

27. *A. Anop, R. Denk, A. Murach* Elliptic problems with rough boundary data in generalized Sobolev spaces // Commun. Pure Appl. Anal.–2021.–20,no. 2, P. 697–735.

28. *N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels* Regular Variation, Encyclopedia Math. Appl., 27, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

29. *Denk R., Hieber M., Prüss J.* $\mathcal{R}$-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. Memoirs of the American Mathematical Society. Vol. 166, N 788. Providence, RI: American Mathematical Society, 2003. viii+114 pp.

30. *Denk R., Hieber M., Prüess J.* Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Mathematische Zeitschrift. 2007. Vol. 257. no. 1. P. 193–224.

31. *Denk R., Kaip M.* General parabolic mixed order systems in L_p and applications. Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 239. Cham: Birkhäuser/Springer, 2013. viii+250 pp.

32. *Diachenko O., Los V.* Some problems for Petrovskii parabolic systems in generalized Sobolev spaces // J. Elliptic Parabol. Equ. – 2022. – vol.8. – P. 313–329.

33. *Dong H., Kim D.* Elliptic and parabolic equations with measurable coefficients in weighted Sobolev spaces // Advances in Mathematics.– 2015.– Vol. 274. – P. 681–735.

34. *S. D. Eidel'man* Parabolic equations // Encyclopaedia Math. Sci., (Partial differential equations, VI. Elliptic and parabolic operators), Springer, Berlin, vol. 63, 1994, pp. 205–316.

35. *S. D. Eidel'man, N. V. Zhitarashu* Parabolic Boundary Value Problems. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 101, Birkhäser, Basel, 1998.

36. *Hieber M., Prüss J.* Heat kernels and maximal $L_p - L_q$ estimates for parabolic evolution equations // Communications in Partial Differential Equations.–1997.– Vol. 22, N 9–10. P. 1647–1669.

37. *L. Hörmander* Linear Partial Differential Operators. Grundlehren Math. Wiss., Band 116, Springer, Berlin, 1963.

38. *L. Hörmander* The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol.II. Differential Operators with Constant Coefficients, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

39. *Hummel F.* Boundary value problems of elliptic and parabolic type with boundary data of negative regularity // Journal of Evolution Equations (2021). https://doi.org/10.1007/s00028-020-00664-0

40. *Hummel F., Lindemulder N.* Elliptic and parabolic boundary value problems in weighted function spaces. arXiv preprint. arXiv:1911.04884. 2019.

41. *N. Jacob* Pseudodifferential Operators and Markov Processes, in 3 volumes, Imperial College Press, London, 2001, 2002, 2005.

42. *Kim K.-H.* $L_q(L_p)$-theory of parabolic PDEs with variable coefficients // Bulletin of the Korean Mathematical Society.– 2008.– Vol. 45, N 1.– P. 169–190.

43. *Kohne M., Prüss J., Wilke M.* On quasilinear parabolic evolution equations in weighted L_p-spaces // Journal of Evolution Equations.– 2010.– Vol. 10, N 2.– P. 443–463.

44. *Krylov N. V.* Weighted Sobolev spaces and Laplace's equation and the heat equations in a half space // Communications in Partial Differential Equations.— 1999.— Vol. 24, N 9–10.— P. 1611–1653.

45. *Krylov N. V.* The heat equation in $L_q((0,T), L_p)$-spaces with weights. SIAM Journal on Mathematical Analysis.– 2001.– Vol. 32, N 5.– P. 1117–1141.

46. *LeCrone J., Prüss J., Wilke M.* On quasilinear parabolic evolution equations in weighted L_p-spaces II // J. Evol. Equ. – 2014. – vol.14, № 3. – P. 509–533.

47. *Lindemulder N.* Maximal regularity with weights for parabolic problems with inhomogeneous boundary conditions // Journal of Evolution Equations.– 2020.– Vol. 20, N 1.– P. 59–108.

48. *Lindemulder N., Veraar M.* The heat equation with rough boundary conditions and holomorphic functional calculus // Journal of Differential Equations.– 2020.– Vol. 269, N 7.– P. 5832–5899.

49. *J.-L. Lions, E. Magenes* Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Applications, vol. II, Grundlehren Math. Wiss., Band 182, Springer, Berlin, 1972.

50. *Los V. M.* Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder // J. Math. Sci. (N.Y.) – 2016. – vol.217, № 4. – P. 456 – 467.

51. *Los V. M.* Theorems on isomorphisms for some parabolic initial-boundary-value problems in Hörmander spaces: limiting case // Ukrainian Math. J. – 2016. – vol.68, № 6. – P. 894 – 909.

52. *Los V. M.* Classical solutions of parabolic initial-boundary-value problems and Hörmander spaces // Ukrainian Math. J. – 2017. – vol.68, № 9. – P. 1412–1423.

53. *Los V. M.* Sufficient conditions for the solutions of general parabolic initial-boundary-value problems to be classical // Ukrainian Math. J. – 2017. – vol.68, № 11. – P. 1756–1766.

54. *Los V. M.* Systems parabolic in Petrovskii's sense in Hörmander spaces // Ukrainian Math. J. – 2017. – vol. 69, № 3. – P. 426–443.

55. *Los V.* A condition for generalized solutions of a parabolic problem for a Petrovskii system to be classical // Methods Funct. Anal. Topology – 2020. – vol. 26, № 2. – P. 111–118.

56. *Los V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications // Comm. Pure Appl. Anal. – 2017. – vol. 16, № 1. – P. 69–97.

57. *Los V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* Parabolic problems in generalized Sobolev spaces // Comm. Pure Appl. Anal. – 2021. – vol. 20, № 10. – P. 3605–3636.

58. *Los V., Murach A.* Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces // Open Mathematics – 2017. – 15. – P. 57–76.

59. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – vol. 6, № 2. – P. 211 – 281.

60. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hoϊmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.

61. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – vol. 67, № 1. – P. 135 – 152.

62. *F. Nicola, L. Rodino* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean Spaces, Birkhäser, Basel, 2010.

63. *B. Paneah* The Oblique Derivative Problem. The Poincaré Problem, Wiley–VCH, Berlin, 2000.

64. *Weidemaier P.* Lizorkin-Triebel spaces of vector-valued functions and sharp trace theory for functions in Sobolev spaces with a mixed L_p-norm in parabolic problems // Sbornik: Mathematics.– 2005.– Vol. 196., no. 6.– P. 3–16.

ДОДАТОК

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. *Diachenko O., Los V.* Some problems for Petrovskii parabolic systems in generalized Sobolev spaces // J. Elliptic Parabol. Equ. – 2022. – **8**. – P. 313–329. DOI: https://doi.org/10.1007/s41808-022-00154-z
   SCOPUS, SCImago Journal and Country Rank Q2.

2. *Дяченко О. В., Лось В. М.* Умови регулярності розв'язків деяких параболічних систем // Укр. матем. журн. — 2022. — **74**, № 8. — С. 1107 – 1117. DOI: https://doi.org/10.37863/umzh.v74i8.7225
   Категорія А.
   Переклад англ. мовою:
   Diachenko O. V., Los V. M. Regular conditions for the solutions to some parabolic systems // Ukrainian Math. J. – 2023. – **74**, № 8. – P. 1263–1274. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-023-02133-6
   SCOPUS, SCImago Journal and Country Rank Q3.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

3. *Дяченко О., Лось В.* Про деякі мішані задачі для параболічних за Петровським систем у просторах Хермандера // Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування: Матеріали міжнародної

наукової конференції присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана, 16-19 вересня 2020р. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2020. – С. 120 – 121.

4. *Дяченко О.* Про регулярність розв'язків деяких параболічних систем // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (23–25 травня 2023 р.). Тези доповідей. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023– С. 341 – 342.

5. *Дяченко О.* Про класичність узагальнених розв'язків неоднорідних крайових задач для параболічних систем другого порядку // Математика та інформаційні технології: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. – С. 189 – 190.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародній науковій конференції присвяченій 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана «Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування», 16-19 вересня 2020 р., м. Чернівці, Чернівецький нац. ун-т;
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023», 23–25 травня 2023 р., м. Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;

- Міжнародній науковій конференції присвяченій 55-річчю факультету математики та інформатики «Математика та інформаційні технології», 28–30 вересня 2023 р., м. Чернівці, Чернівецький нац. ун-т.