

## РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу

Юськовича Віктора Костянтиновича

на тему «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у багатовимірному просторі»,  
представлену на здобуття ступеня доктора філософії

в галузі знань 11 «Математика та статистика»

за спеціальністю 111 «Математика»

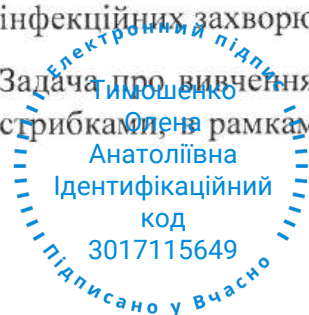
### Актуальність теми дисертації.

Вивчення асимптотичної поведінки випадкових процесів відіграє ключову роль у сучасній теорії ймовірностей. Серед ефективних моделей випадкових процесів широко використовуються стохастичні диференціальні рівняння (СДР), які застосовуються в економіці, управлінні, передаванні інформації, статистичній фізиці та інших галузях. Інтерес до вивчення СДР пояснюється їхньою застосовністю в різних задачах, таких як фільтрація, оптимальна зупинка, стохастичне керування, задачі екології та фінансової математики. Багато наукових праць і монографій були присвячені дослідженню властивостей СДР, і цей напрямок досліджень продовжує активно розвиватися. До того ж, сучасні досягнення науки і техніки заохочують до проведення досліджень складних явищ природи та технологічних процесів через створення відповідних математичних моделей.

У дисертаційній роботі Юськовича В.К. вивчаються асимптотичні властивості багатовимірних СДР, збурених за допомогою вінерівського процесу, а також досліджується асимптотика одновимірних автономних СДР, в яких окрім вінерівського шуму присутній ще й пуассонівський шум. Для однорідних в часі процесів більшість питань, що поставлені в дисертації є добре вивченими, але для неоднорідних, багатовимірних СДР та СДР зі стрибками точна асимптотична поведінка розв'язку є відомою лише в окремих випадках.

Актуальність теми дисертації полягає в тому, що багатовимірні СДР вважаються важливою моделлю для задач сьогодення, але асимптотичні властивості таких рівнянь є мало дослідженими. Багатовимірні СДР можуть бути використані для моделювання руху космічних об'єктів та прогнозування їх розвитку на великі проміжки часу, у керуванні групами дронів на великі відстані, а також для дослідження передачі інфекційних захворювань.

Задача про вивчення асимптотичної поведінки одновимірних неавтономних СДР зі стрибками, в рамках застосування теорії псевдорегулярних функцій, виникла ще в



2010 році у дослідницькій групі під керівництвом проф. Булдігіна В.В., але до цього часу так і не була вирішеною. Важливо відмітити, що у наявних дослідженнях (див. напр., D. Applebaum, M. Siakalli (2009) або Quanxin Zhu (2014)) були встановлені умови стійкості розв'язків для СДР збурених вінерівським та пуассонівським процесами, питання про асимптотичну поведінку на нескінченності залишалося невивченим. Результати досліджень Юськовича В.К., який виявив степеневу асимптотику розв'язків у випадку, коли коефіцієнт зносу має степеневу асимптотику на нескінченності, безсумнівно вносять вагомий внесок в теорію процесів Леві. СДР з шумом Леві краще підходять для опису розривних систем, і це зумовлює підвищений інтерес до СДР такого типу. Більшість питань, які пов'язані з асимптотичними властивостями процесу, що є розв'язком рівняння, де шум отримують з процесу Леві за допомогою розкладу Леві-Іто на неперервну складову, збурену вінерівським процесом, і стрибкоподібну частину з пуассонівською випадковою мірою, не є добре вивченими. Це означає, що тематика дисертації є актуальною, а отримані результати можуть мати застосування при аналізі математичних моделей на основі СДР зі стрибками.

### **Оцінка обґрунтованості наукових результатів дисертації, їх достовірності та новизни.**

Наукова новизна результатів дисертаційного дослідження полягає в наступному.

1) Розглянуто асимптотичну поведінку розв'язків одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками. Доведено теорему про лінійну асимптотику розв'язку для випадку, коли коефіцієнт зсуву прямує до константи. Для автономного СДР зі стрибками наведено деякі достатні умови, за яких коефіцієнт зсуву суттєво впливає на асимптотичний розв'язок, тоді як члени, що включають вінерівський та пуассонівський шуми, майже напевно збігаються до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Також досліджено умови, за яких розв'язок диференціального рівняння, яке збурене вінерівським процесом та має стрибкоподібну частину з пуассонівською випадковою мірою, поводить себе на нескінченності аналогічно до не випадкової степеневій функції.

2) Для неавтономного «класичного» СДР,

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = x_0,$$

де  $a$  і  $b$  – деякі неперервні функції,  $W$  – стандартний вінерівський процес, розроблено загальну теорію гармонічних функцій для дослідження асимптотичної поведінки розв'язку  $X$  при  $t \rightarrow \infty$ .

3) Для багатовимірних СДР запропоновано спосіб визначення норми та кута розв'язку; встановлено умови, за яких норма розв'язку сходиться до

нескінченності, а також знайдено умови стабілізації кута розв'язку; визначено точну асимптотичну поведінку норми розв'язку.

Дослідження, що проведені в дисертаційній роботі, виконано у відповідності з основними напрямками наукової діяльності кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського під керівництвом провідного наукового співробітника Інституту математики НАН України, д.ф.-м.-н., професора Пилипенка А.Ю. Робота над дисертацією частково проводилася в рамках проєкту про українсько-норвезьке співробітництво у галузі математичної освіти (СРЕА-LT-2016/10139). Результати, отримані автором є новими, достовірними та належно обґрунтованими.

Отже, в дисертаційній роботі поставлене наукове завдання про дослідження асимптотичної поведінки розв'язків СДР у багатовимірному просторі виконано, здобувач повною мірою оволодів методологією наукової діяльності.

**Оцінка змісту дисертації, її завершеність та дотримання принципів академічної доброчесності.**

За своїм змістом дисертаційна робота здобувача Юськовича В.К. відповідає Стандарту вищої освіти зі спеціальності 111 «Математика» та напрямкам досліджень відповідно до освітньої програми «Математика».

Дисертаційна робота є завершеною науковою працею і свідчить про наявність особистого внеску здобувача у теорію випадкових процесів.

Згідно звіту подібності за результатами перевірки дисертаційної роботи на текстові співпадіння, можна зробити висновок, що дисертаційна робота Юськовича В.К. є результатом самостійних досліджень здобувача і не містить елементів фальсифікації, компіляції, фабрикації, плагіату та запозичень.

Дисертацію оформлено відповідно до вимог, що висуваються до кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня доктора філософії (див. наказ МОН України від 12 січня 2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертації»). Порухень академічної доброчесності у дисертації та наукових працях Юськовича В.К. не виявлено.

**Мова та стиль викладення результатів.**

Дисертаційна робота написана українською мовою з використанням загальноприйнятої термінології. Мета та завдання дослідження, що містяться в роботі, сформульовано чітко та мають вибудовану аргументацію.

Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, огляду літератури, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та додатків. Загальний обсяг дисертації 125 сторінок.

У *вступі* обґрунтовано актуальність обраної тематики, сформульовано мету роботи та задачі дослідження, подано коротку характеристику результатів дослідження, описано наукову новизну актуальність отриманих результатів, ступінь їх апробації та публікації.

В *огляді літератури* презентуються джерела, що мають відношення до обраної теми дисертації. Автор висвітлює основні результати переважно чотирьох дослідницьких груп, що стосуються обраного напрямку наукової роботи.

У *першому розділі* присутня низка допоміжних результатів, які використовуються автором дисертації для доведення основних тверджень стосовно асимптотики розв'язку СДР зі стрибками у розділі 2. У своїх дослідженнях асимптотичної поведінки розв'язків СДР зі стрибками автор використовує ідеї схожі до тих, що застосовували Й.І. Гіхман та А.В. Скороход в своїй монографії (див. §17, 1968) для автономних СДР. Тобто для досягнення мети дисертаційної роботи ключовими є умови, які гарантують збіжність до нуля при нормуванні не випадковою функцією (у даному випадку степеневою) доданків, що містять шуми. Саме тому у першому розділі автор доречно доводить серію тверджень, що гарантують при нормуванні не випадковою степеневою функцією прямування до нуля інтегралів за вінерівським процесом, стохастичних інтегралів зі стрибками, інтегралів від випадкових процесів та субмартингалів.

У *другому розділі* досліджуються асимптотичні властивості рівнянь зі стрибкоподібним шумом. Основна увага зосереджена на частковому випадку СДР керованих процесом Леві, з коефіцієнтами, у певному розумінні, степеневого характеру. Використовуючи ключові інструменти, такі як формула Іто для загальних напівмартингалів, нерівності Гьольдера, Коші-Буняковського, формулу Тейлора та вдале розбиття проміжку інтегрування для інтеграла Стілтєса з мірою Леві за «короткими» та «довгими» стрибками, автор визначає швидкість росту розв'язку СДР зі стрибками. Особливо варто відмітити теорему 2.4.1 та наслідок 2.4.5, які у сукупності містять нову інтерпретацію ідеї викладеної в монографії Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода (§17, 1968).

У *третьому розділі* теорію функцій Ляпунова автор дисертації використовує для встановлення умов прямування до нескінченності майже напевно розв'язку неавтономного диференціального рівняння збуреного за допомогою лише вінерівського процесу. За припущення прямування розв'язку до нескінченності наведено умови степеневої асимптотики для розв'язку неавтономного СДР з

вінерівським шумом. Останній результат є тривіальним наслідком аналогічного результату з розділу 2 для СДР зі стрибками, якщо відкинути частину з пуассонівським збуренням.

У *четвертому розділі* вивчається асимптотична поведінка розв'язку  $X$  багатовимірного автономного СДР, а саме знайдено достатні умови, за яких  $P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = \infty\right\} = 1$ ; визначено вигляд СДР для кута  $\frac{X}{|X|}$  розв'язку  $X$  та доведено теорему

про існування границі  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{|X(t)|} = \varphi_\infty$  майже напевно; показано, що норма розв'язку  $X$

багатовимірного автономного СДР є еквівалентною степеневій функції, що залежить від граничного кута  $\varphi_\infty$ .

### **Оприлюднення результатів дисертаційної роботи.**

Результати дисертації висвітлені у двох публікаціях у періодичних наукових виданнях, проіндексованих у базі даних Scopus, з яких одна стаття є опублікованою у виданні, що має тквартиль Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank та Journal Citation Reports. Опубліковані статті відповідають вимогам щодо присудження ступеня доктора філософії. Результати дисертації були апробовані на 5 наукових фахових конференціях, доповідались та обговорювалися на 3 наукових семінарах.

**Недоліки та зауваження до дисертаційної роботи.** До дисертації можна зробити такі зауваження.

- В огляді літератури наведено значну кількість джерел з тематики асимптотичної поведінки розв'язків СДР, але фактично порівняння відомих результатів з результатами дисертації є не достатньо глибоким і присутнє лише для декількох наборів робіт, які є найближчими до результатів дисертації. У випадку одновимірних неавтономних СДР можна було б згадати роботи А. Родкіної, а у випадку СДР зі стрибками, наприклад, доречним було б провести дослідження очевидного зв'язку тематики роботи з дуже добре відомою теорією асимптотичної стійкості, звернувшись до результатів А. Родкіної та Х. Мао (1995) або Д. Епплбаум та М. Сіакаллі (2009), які використовують схожі методи до методів дисертаційної роботи.
- Бібліографія налічує 70 джерел, але в тексті дисертаційної роботи відсутні посилання на 32 з них. Бібліографія повинна містити лише джерела, на які є посилання в тексті. Бібліографічні посилання вказують за алфавітним порядком або у порядку за місцем розташування у тексті. Бібліографія дисертації має хаотичний порядок.
- У дисертації використано мовні вирази та конструкції, які не властиві науковому стилю письма і які доцільно уникати. Мовний стиль подачі

матеріалу не є однорідним. На відміну від розділів 3 та 4, у розділах 1 та 2 роз'яснення досить стислі, присутні часті повтори одних і тих самих речень та однокореневих слів в межах однієї сторінки. Наприклад,

- речення «Застосовуючи теорему 1.3.1 з  $\mu := \frac{1}{2} + \beta$ , отримуємо результат теореми» присутнє на стор.36, рядок 2 та на стор.37, рядок 13;
- стор. 65, слова «оцінкою», «оцінками», «оцінимо» присутні 6 разів.

- Формулювання лем і теорем повинно чітко визначати умови, яким мають задовольняти процеси, функції та константи, включати основне твердження і висновки. Так, лема 2.2.2, лема 2.4.2, лема 2.4.3 мають дивний вигляд. Кожна з цих лем містить просто по одній формулі, додаткові обмеження на параметри необхідно шукати в попередніх твердженнях, що ускладнює сприйняття.
- Допоміжні леми мають бути подані та доведені перед основним твердженням, а не в середині доведення цього твердження.
- У дисертації розглянуто багато достатніх умов асимптотичної поведінки розв'язків різних типів СДР. Ці умови обговорюються в досить великій кількості прикладів. Однак, не було представлено жодного прикладу, в якому складно знайти явний розв'язок, асимптотична поведінка була б невідомою заздалегідь, але достатні умови підтверджували б використання отриманих результатів в дослідженні. Також не представлено жодного СДР зі стрибками, розв'язок якого прямує до нескінченності, а коефіцієнти задовольняють усім умовам теореми 2.4.1.
- Введення універсальної константи є стандартним прийомом для великих математичних текстів, але в межах одного доведення є доречним використовувати індексацію, або відображати зміни. Наприклад, стор. 33, рядки

8-9: замість « $\dots \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-2\gamma})^k \int_0^{2^{k+1}} (1+s^{2\alpha}) ds \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (4^{1-\gamma})^k + C \sum_{k=0}^{\infty} (4^{1+\alpha-\gamma})^k < \infty \dots$ » має бути

$$\langle \dots \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-2\gamma})^k \int_0^{2^{k+1}} (1+s^{2\alpha}) ds \leq 2C \sum_{k=0}^{\infty} (4^{1-\gamma})^k + 2^{2\alpha+1} C \sum_{k=0}^{\infty} (4^{1+\alpha-\gamma})^k < \infty \dots \rangle.$$

Доведення та формулювання деяких тверджень містять невеликі описки та недогляди.

- Стор. 16, рядок 5, замість « $f(t) \sim g(t) \Leftrightarrow \frac{f(t)}{g(t)} \rightarrow 1$ , де  $f, g$  – функції» має бути « $f(t) \sim g(t) \Leftrightarrow \frac{f(t)}{g(t)} \rightarrow 1$ , при  $t \rightarrow \infty$ , де  $f, g$  – функції».
- Стор. 22, рядок 21, не вказано зв'язок між  $N$  – пуассонівською випадковою мірою та  $\tilde{N}$  – компенсованою пуассонівською мірою, тобто має бути додано  $\tilde{N}(dt, du) = N(dt, du) - dtv(du)$ ,  
вперше про цей зв'язок, можна здогадатись після зауваження 1.5.4, стор 38.

- Стор. 22, рядок 23, « Наступна теорема дає ...», але далі йде наслідок 2.3.3\*.
- Стор. 23, наслідок 2.3.3\*, теорема 2.4.1\*, наслідок 2.4.5\* мають маркування з символом «\*», однак усі інші твердження у розділі «Вступ» не мають цього маркування. Не зрозуміло причини використання цього символу.
- Стор. 30, рядок 13, «..., та так званих *псевдорегулярних* (PRV) функцій...», має бути посилання на [62].
- У зауваженні 1.4.2, зауваженні 1.5.2, зауваженні 1.5.3 фігурує параметр  $\beta$ , обмеження на цей параметр мають бути включеними до формулювання, навіть, якщо вони такі самі, як у теорем, що передують цим зауваженням.
- Стор. 36, рядок 8-9, замість
 
$$\left\langle \dots C \left( t + \frac{t^{1+2\beta}}{1+2\beta} \right) \leq C(1+t^{1+2\beta}) = \dots \right\rangle$$
 має бути  $\left\langle \dots C \left( t + \frac{t^{1+2\beta}}{1+2\beta} \right) \leq C(1+t^{1+2\beta}) = \dots \right\rangle$ ,  
 те саме зауваження стор.37, рядок 19-20.
- Стор. 47, рядок 11, замість
 
$$\left\langle \dots + x_0 \sum_{k=1}^{n+1} (1+c)^{k-1} (e^{\tau_k} - e^{\tau_{k-1}}) + \dots \right\rangle$$
 має бути  $\left\langle \dots + x_0 \sum_{k=1}^{n+1} (1+c)^{k-1} (e^{a\tau_k} - e^{a\tau_{k-1}}) + \dots \right\rangle$ .
- Стор. 48, у зауваженні 2.1.4 згадується наслідок 2.1.3. Наслідок 2.1.3 у дисертаційній роботі відсутній.
- Стор. 52, рядок 18, елементи  $b_k$  є невизначеними.
- На стор 51 та на стор.56 з оцінки  $EX^2(t) \leq C(1+t^2) + C \int_0^t (EX^2(s-))^\beta ds$  автор робить однакові висновки, але обґрунтовує їх різними твердженнями з однієї книги. У таких випадках варто обрати, щось одне: або теорему 7.3, або наслідок 7.5. Якщо обирати теорему 7.3 з [35], то це не «лема Вендроффа», а теорема про узагальнення нерівності Вендроффа.
- Стор. 61, в формулі (2.21) зайвий символ «d» перед  $\tilde{N}(dt, du)$ .
- Стор. 61, припущення  $EX^2(0) < \infty$  та  $0 \leq \alpha < 1$  мають бути внесеними в формулювання теореми 2.4.1.
- Стор. 67, рядок 10, вираз  $Cx^{-2\alpha}$  є зайвим.
- Стор. 69, рядок 7, у тексті дисертації написано «... (тут  $\xi$  з леми 2.4.2) ...», але в твердженні леми 2.4.2 немає  $\xi$ . Можна припустити, що мається на увазі  $\xi_{x,\mu}$ , що з'являється в доведенні леми 2.4.2.
- Стор.72, рядок 10, у тексті дисертації написано «... (тут  $\xi$  з леми 2.4.3) ...», та в твердженні леми 2.4.3 немає  $\xi$ .
- Стор 77, рядок 5, замість «... =  $ae^{-at} X(t)$  - ...» має бути «... =  $ae^{at} X(t)$  - ...».
- Стор 80-81, автор плутається в позначеннях, в доведенні теореми 3.2.1. скрізь замість «u» має бути «v».

- Стор 87, у зауваженні 3.3.4. доречно було б представити явний вигляд розв'язку СДР і таким чином продемонструвати, що розв'язок прямує до нескінченності, що підтвердить коректність умов теореми 3.3.1 та теореми 3.3.2.
- Стор 103, рядок 20, відсутнє уточнення, в якому сенсі розуміється границя.
- Стор 108, у формулюванні теореми 4.3.1 відсутнє уточнення щодо значень параметра  $\alpha$ .

Перераховані зауваження не зменшують загального позитивного враження від роботи та не впливають на позитивну оцінку наукового рівня дисертації.

### Висновок про дисертаційну роботу.

Дисертаційна робота здобувача ступеня доктора філософії Юськовича Віктора Костянтиновича на тему «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у багатовимірному просторі» є завершеним науковим дослідженням. Отримані результати мають важливе теоретичне значення для теорії випадкових процесів, а також їх можна використати для дослідження природничих процесів, для моделювання, яких використовують стохастичні диференціальні рівняння.

Дисертаційна робота Юськовича Віктора Костянтиновича, публікації та їх апробація відповідають спеціальності 111 Математика та вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. №44, а їх автор заслуговує на присудження ступеня доктора філософії.

### Рецензент:

доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей  
Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,  
к.ф.-м.н.

Олена ТИМОШЕНКО  
Підпис: *Тимошенко О.А.*  
Засвідчую  
Відділ кадрів та дипломатії  
№ 6  
р-шс

М.П. «01» серпня 2024 року



**Документ підписано у сервісі Вчасно (продовження)**  
240801 Рецензія Тимошенко\_с.pdf

Документ відправлено: 12:58 01.08.2024

**Власник документу**

**Електронний підпис**

12:58 01.08.2024

Ідентифікаційний код: 3017115649

Тимошенко Олена Анатоліївна

Власник ключа: Тимошенко Олена Анатоліївна

Час перевірки КЕП/ЕЦП: 12:58 01.08.2024

Статус перевірки сертифікату: Сертифікат діє

Серійний номер: 2DBD5940D955E12A0400000080330100DF260500

Тип підпису: кваліфікований