

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу
Станжицького Андрія Олександровича
на тему «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально
диференціальних рівнянь в гільбертових просторах»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії
в галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дисертації.

У рецензованому дисертаційному дослідженні вивчаються нескінченновимірні стохастичні функціонально-диференціальні рівняння. Причому, у їх правих частинах присутній необмежений лінійний оператор, що є генератором напівгрупи обмежених операторів класу C_0 . Це робить можливим застосування отриманих результатів до рівнянь у частинних похідних, тобто до рівнянь, що є математичними моделями реальних процесів, параметри яких залежать від просторових змінних (розподілені). Більше того, розглядувані рівняння можуть моделювати процеси, поведінка яких у майбутньому суттєво залежить від їх попередніх станів і зазнає впливу випадкових сил. Типовими представниками таких моделей є, наприклад: кліматичні дифузійні моделі, узагальнене рівняння ядерного реактора, стохастичні популяційні моделі із врахуванням вікових категорій, стохастичне рівняння тонких плівок, стохастичне функціонально-диференціальне рівняння Бюргерса та багато інших. Перше питання, що виникає при вивченні таких рівнянь – це питання коректної розв'язності відповідних початково-крайових задач. Інше наступне питання – вивчення їх еволюційної поведінки на великих часових інтервалах. Саме ці питання і стали предметом даного дисертаційного дослідження. Слід відзначити, що у роботі вивчаються не тільки системи, що містять запізнення у правій їх частині, а і рівняння нейтрального типу, у яких запізнення входить і в ліву частину, під знак диференціала. Тобто, досліджуються і функціонально-диференціальні рівняння нейтрального типу. Дослідженню стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь як у скінченновимірних просторах так і у просторах нескінченної розмірності, були присвячені роботи широкого кола науковців: Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка та його учнів, Красовського М.М., Д.І. Мартинюка, Мишкіса А.Д., Є.Ф. Царькова та його учнів, J.K. Hale, J.D. Murray, M. Jovanovic, V. Kolmanovskii, N. Koroleva, E.-H. Lakhel, X.X. Liao, K. Liu, T. M. Scheutzow, M. Rockner, R. Zhu, X. Zhu, F. Wei, A. Anguraj, P. Balasubramaniam, B. Boufoussi, T. Caraballo, H. Chen, S. Hajji, Z. Li, K. Liu, J. Luo, N. I. Mahmudov, M. McKibben, D. Ruan, J. Luo, F. Jiang, Y. Shen, L. Yan та інших. Однак ще багато питань залишаються не розв'язаними. Це,

наприклад, адаптація умов коректної розв'язності до прикладних задач та асимптотична поведінка розв'язків початкових задач на великих часових інтервалах.

На даний момент для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу відомі тільки окремі результати стосовно існування м'яких розв'язків. Причому такі результати отримані при досить жорстких умовах: глобальний лінійний ріст та глобальна умова Ліпшиця, що у застосуваннях далеко не завжди виконуються. Стосовно асимптотичної поведінки розв'язків, наприклад, у плані існування інваріантних мір, то ці питання зовсім не вивчені.

Зважаючи на це, тема дисертаційної роботи А.О. Станжицького є безумовно актуальною.

Оцінка обґрунтованості наукових результатів дисертації, їх достовірності та новизни.

Наукова новизна результатів дисертаційного дослідження полягає в наступному:

- 1) для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу без глобальної умови Ліпшиця на коефіцієнти зносу та дифузії отримано умови існування та єдиності глобального м'якого розв'язку задачі Коші у просторах зсувів $C_h([-h, 0], H)$;
- 2) встановлена неперервна у середньому квадратичному залежність розв'язків від початкових функцій;
- 3) доведена марковська властивість розв'язків та встановлена феллеровська властивість для відповідної напівгрупи, породженої перехідною функцією у просторах зсувів;
- 4) отримані достатні умови існування інваріантних мір у просторі $C_h([-h, 0], H)$, які пов'язані із існуванням глобально обмеженого за ймовірністю розв'язку рівняння;
- 5) для стохастичного диференціального рівняння із запізненням типу "реакція-дифузія" встановлені коефіцієнтні умови коректної розв'язності та існування інваріантних мір;
- 6) отримано умови існування та єдиності глобального слабкого розв'язку для системи двох спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, одне із яких із необмеженим оператором, а інше звичайне диференціальне;
- 7) для стохастичного рівняння серцевого дефібрилятора (бідоменне рівняння) із запізненням становлено існування та єдиність сильних локальних його розв'язків.

Наукові дослідження були виконані здобувачем на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського в рамках науково-дослідної теми «Дослідження якісних і спектральних характеристик динамічних систем» (номер державної реєстрації 0113U004540), під керівництвом професора кафедри математичної фізики та

диференціальних рівнянь, доктора фізико-математичних наук, професора Дудкіна Миколи Євгеновича.

Отже, в дисертаційній роботі поставлене наукове завдання про дослідження стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у гільбертових просторах виконано повністю, здобувач повною мірою оволодів методологією наукової діяльності.

Оцінка змісту дисертації, її завершеність та дотримання принципів академічної доброчесності.

За своїм змістом дисертаційна робота здобувача Станжицького А.О. повністю відповідає Стандарту вищої освіти зі спеціальності 111 «Математика» та напрямкам досліджень відповідно до освітньої програми «Математика».

Дисертаційна робота є завершеною науковою працею і свідчить про наявність особистого внеску здобувача у науковий напрям «Диференціальні рівняння».

Розглянувши звіт подібності за результатами перевірки дисертаційної роботи на текстові співпадіння, можна зробити висновок, що дисертаційна робота Станжицького Андрія Олександровича є результатом самостійних досліджень здобувача і не містить елементів фальсифікації, компіляції, фабрикації, плагіату та запозичень. Використані ідеї, результати і тексти інших авторів мають належні посилання на відповідне джерело.

Мова та стиль викладення результатів.

Дисертаційна робота написана українською мовою. Робота добре структурована, викладення результатів достатньо повне із використанням загально прийнятої у світовій математичній літературі символіки.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, 4 розділів, висновків, загальних висновків, списку літератури та додатку. Загальний обсяг дисертації 141 сторінка.

В анотаціях стисло висвітлено актуальність дослідження, описана структура роботи, наведено основні результати, ключові слова та зміст роботи.

У *вступі* переконливо обґрунтовано актуальність роботи, сформульована мета дослідження, висвітлена наукова новизна, теоретичне та практичне значення, зв'язок роботи з науковою темою та зазначено особистий внесок здобувача.

У *першому* розділі дисертації приведено детальний огляд літератури із тематики дослідження. Відзначу, що список літератури містить достатньо свіжі посилання, що ще раз підкреслює актуальність досліджень та вказує на обізнаність автора у даній області.

Другий розділ дисертаційного дослідження має допоміжний характер. Тут приведені деякі результати із теорії марковських динамічних систем, теорії

інваріантних мір, зокрема ключова у цьому плані теорема Крилова-Боголюбова, теорії ядерних операторів, генераторів та дробових степенів операторів. Також висвітлені питання, пов'язані із конструкцією та властивостями стохастичного інтеграла за нескінченновимірним процесом Вінера.

Третій розділ роботи присвячений дослідженню стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу у гільбертових просторах. Приведено означення м'якого розв'язку (mildsolution), який розуміється у сенсі згортки відповідної напівгрупи, породженої головним оператором із нелінійностями, що входять у рівняння. Зазначимо, що на відміну від функціонально-диференціальних рівнянь звичайного типу тут є принципова складність. Присутність запізнення у похідній даного рівняння, приводить до того, що у означенні розв'язку залишається необмежений оператор, що значно ускладнює дослідження. Автори попередніх досліджень долали дану трудність шляхом накладання досить жорстких умов на гладкість відображення $g(u_t)$, яке відповідає за нейтральний тип та на малість сталої Ліпшиця для нього, що у конкретних застосуваннях далеко не завжди виконується. Заслугою здобувача є те, що він ці умови значно послабив, зробивши їх придатними до застосувань, що і підтверджує розглянутий у роботі приклад стохастичного рівняння із запізненням типу реакція-дифузія, де виписані коефіцієнтні умови, які легко перевірити. Ключовою теоремою даного розділу, на думку рецензента є теорема параграфа 3.3. про існування інваріантної міри. Зазначимо, що вона доведена не у гільбертових просторах, а у просторах, що є більш природними для даних рівнянь—просторах зсувів $C_h([-h, 0], H)$. Ідея доведення базується на прямому використанні теореми Крилова-Боголюбова у банахових просторах та нескінченновимірному варіанті теореми Арцелла-Асколлі. Слід зазначити, що такі результати для рівнянь нейтрального типу отримано вперше. Для цього автору довелись виконати велику допоміжну роботу, а саме довести марковість розв'язків у просторах зсувів $C_h([-h, 0], H)$, встановити феллеровську властивість та отримати умови стохастичної неперервності відповідної перехідної функції. Окремої уваги заслуговує встановлення компактності операторів, пов'язаних із головним необмеженим оператором рівняння.

У четвертому розділі вивчено системи спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, одне із яких нескінченновимірне, а інше—скінченновимірне функціонально-диференціальне рівняння. Такі системи часто моделюють реальні процеси із розподіленими та зосередженими параметрами, які часто виникають на практиці, що і продемонстровано на моделі серцевого дефібрилятора. Оскільки при цьому часто важливу роль відіграє гладкість розв'язків за просторовою змінною, то особливого значення набувають слабкі та сильні розв'язки, які за гладкість і відповідають.

Основними результатами розділу є теореми існування та єдиності глобальних слабких розв'язків та сильних локальних розв'язків. Для доведення існування слабких розв'язків автор застосовує підхід компактності та монотонності, що разом із умовами коерцетивності забезпечує встановлення необхідних апіорних оцінок у відповідних галеркінських апроксимаціях. При цьому методи компактності дозволяють виділити компактні підпослідовності, а метод монотонності дозволяє зробити відповідні граничні переходи. Зазначимо, що присутність тут стохастичного члена вимагає додаткових зусиль для отримання досить тонких оцінок моментів стохастичних інтегралів. Доведення існування сильних розв'язків для рівнянь бідоменного типу проводиться шляхом певної заміни, що зводить вихідне стохастичне рівняння до детермінованого рівняння із параметром та подальшим застосуванням методів критичних підпросторів.

У висновках як до розділів так і до дисертації в цілому стисло викладено основні результати, що винесені на захист.

Список використаних джерел містить 118 найменувань.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою роботи та інформацію про апробацію результатів.

Дисертаційна робота оформлена відповідно до вимог наказу МОН України від 12 січня 2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертації».

Оприлюднення результатів дисертаційної роботи.

Наукові результати дисертації висвітлені у трьох наукових працях здобувача, опублікованих у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus, з яких одна стаття, що входить до квартиля Q2, одна до квартиля Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank.

Також результати дисертації доповідались на 5 наукових фахових конференціях.

Таким чином, наукові результати описані в дисертаційній роботі повністю висвітлені у наукових публікаціях здобувача.

Недоліки та зауваження до дисертаційної роботи.

До роботи є кілька зауважень та побажань.

1. Для рівнянь нейтрального типу у третьому розділі отримані умови існування та єдиності м'якого розв'язку за припущення, що головний оператор є секторіальним. Бажано було б у подальшому довести і існування такого розв'язку за умови, що даний оператор є тільки просто генератором C_0 неперервної напівгрупи.
2. Існування сильних розв'язків у четвертому розділі отримано лише для бідоменного рівняння із запізненням. Здається можливим аналогічними методами довести існування і для більш загальних рівнянь із секторіальним головним оператором.

3. У параграфі 4.3 варто було б детальніше розписати властивості бідоменного оператора, а не обмежуватись лише посиланнями на відповідні роботи.
4. Також мабуть потрібно було краще розписати граничний перехід у формулі (4.31).
5. Робота містить певні описки та друкарські помилки:
 - 1) стр.57—« компактоності» замість «компактності»;
 - 2) стр.75. залишився англійський термін «Lemma»;
 - 3) на стр. 82-83 деякі формули набрані меншим шрифтом;
 - 4) стр.126—дві великі літери у слові «Початкова»;
 - 5) у формулі (1.3) присутній англійський термін «in» замість «в».

Вважаю, що висловлені зауваження не є визначальними і не зменшують загальну наукову новизну та практичну значимість результатів та не впливають на позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Висновок про дисертаційну роботу

Вважаю, що дисертаційна робота здобувача ступеня доктора філософії Станжицького Андрія Олександровича на тему «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах» виконана на високому науковому рівні, не порушує принципів академічної доброчесності та є закінченим науковим дослідженням, сукупність теоретичних та практичних результатів якого розв'язує наукове завдання, що має істотне значення для галузі знань 11 «Математика та статистика». Дисертаційна робота за актуальністю, практичною цінністю та науковою новизною повністю відповідає вимогам чинного законодавства України, що передбачені в п.6 – 9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44.

Здобувач Станжицький Андрій Олександрович заслуговує на присудження ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Рецензент:

доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь, Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», кандидат фізико-математичних наук

«27» жовтня 2023 року



Тетяна ЄРЬОМІНА
ЗАСВІДЧУЮ
Вчений секретар
В.В. Холєвко