

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису
УДК 004.021/539.371

МАЗУРИК РОМАН ВОЛОДИМИРОВИЧ

ДИСЕРТАЦІЯ
МЕТОД БАЗОВИХ ТА ЗГЛАДЖУВАЛЬНИХ РІШЕНЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ
СТАТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНО-НЕЛІНІЙНИХ
ОДНОВИМІРНИХ СИСТЕМ

113 – Прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_____ Р.В.Мазурик

Науковий керівник:

Ориняк Ігор Володимирович, доктор технічних наук, професор

Київ 2024

АНОТАЦІЯ

Мазурик Р.В. Метод базових та згладжувальних рішень для аналізу статичної деформації геометрично-нелінійних одновимірних систем. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика. — Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2024.

Метою роботи є створення новітньої методології, алгоритмів і програм розрахунку просторових геометрично нелінійних одновимірних систем на основі розривного базового, БР, і згладжувального, ЗР, рішень, де базове рішення є відносно простою круговою чи хеліксною геометрією з відповідно «вбудованою» системою базових сил, що максимально враховує геометричну нелінійність задачі та задає криволінійну систему координат для отримання аналітичного ЗР; а ЗР, в свою чергу, коректує БР за допомогою спеціальної ітераційної процедури уточнень.

Інженерні розрахунки машин та конструкцій традиційно виконується в геометрично лінійній постановці, де вважається що деформаційні переміщення і зміна форми тіла є незначними і не впливають на розрахункову схему. Впровадження в різних галузях промисловості більш гнучких композитних матеріалів (наприклад, в літакобудуванні), зафіксовані в сучасних нормативних документах вимоги щодо покращання точності аналізу (трубопровідна індустрія, підйомно-транспортні машини) з врахуванням великих деформаційних переміщень – роблять актуальними створення методів аналізу в геометрично-нелінійній, ГН, постановці. Більше того, сучасна тенденція розширення сфери застосування проектних розрахунків на гнучкі медичні прибори (ендоскопи), розбірні будівельні конструкції (палатки, манежи), спортивне спорядження (шести, ракетки), вантові конструкції спонукає до створення методів і програм розрахунку, що враховують зміну

форми тіла в процесі навантаження. Застосування ГН аналізу гнучких довгих тіл є актуальним при геометричному моделюванні (побудова апроксимаційних і інтерполяційних сплайнів) траєкторій і зображень, а також в кіноіндустрії, де вимога правдоподібності згенерованих комп'ютером процесів деформування та руху приводить до все ширшого застосування алгоритмів, що ґрунтовані на фізично обґрунтованих моделях, тобто є рішеннями диференціальних рівнянь деформації балок чи канатів.

Як не дивно, сучасні комерційні програми, при всій своїй досконалості, часу і традиціям розвитку, науковому забезпеченні, зручності застосування та представлення вхідних і вихідних даних -- все ще не здатні вирішувати подібні задачі. Це пов'язано як з недоліками аналітичних розрахункових елементів, що застосовуються для моделювання властивостей фізичних тіл, так і з організацією ітераційних процесів. Власне, з цим і пов'язаний широкий потік наукових розробок в літературі, які, проте, мають вузьке застосування та недостатнє підтвердження чисельними та експериментальними тестами.

До недоліків існуючих методів віднесемо наступне. Перше, майже всі вони базуються на принципах мінімізації енергії для заздалегідь вибраних степенях свободи в деяких точках і апроксимуючих функцій для всіх інших проміжних точок. Очевидно, є сумнівним те, чи можуть такі штучно сконструйовані функції моделювати всі диференціальні залежності між фізичними і геометричними параметрами задач. Друге, для нелінійних задач необхідно проводити лінеаризацію, щоб отримати систему лінійних рівнянь. Оскільки всі існуючі методи будують неперервні ітераційні наближення, що мало відрізняються від попереднього і це приводить до дуже довгих обчислень (сотні ітерацій) чи до рішення задач де ГН має обмежений вплив на результати (декілька десятків процентів); окрім того вони вимагають точного початкового положення, наприклад для нульових зовнішніх дій, і це значно ускладнює задачу, коли початкове положення тіла невідоме. Третє, існують дві ГН математичні моделі довгих гнучких тіл – балка і канат, причому відомо, що сильно розтягнута балка отримує властивості канату. Проте в літературі не

вказуються межі їх окремого застосування, не описуються комбіновані методи, коли на деяких ділянках може застосовуватися менш трудомістка модель каната (наприклад внутрішні ділянки), а модель балки - на границях тіла, чи в зонах контакту з іншими тілами.

Таким чином, важливим є створення методів чисельного аналізу ГН одновимірних задач, які базувались би на точних аналітичних рішеннях моделей канату та простої, розтягнутої, і стисненої криволінійної балки для елементарних базових ділянок; та розробка ефективного алгоритму уточнень, що дозволяв би незалежне уточнення положення кожної базової ділянки (геометрії) на заданій ітерації з наступним його згладжуванням за допомогою ЗР, що значно прискорить процес уточнень і зробить його незалежним від правильного вибору початкового положення.

В *першому розділі* проведено аналіз актуальності задачі деформації в довгих гнучких тілах, існуючі рішення та зроблена постановка задачі досліджень. Показано широку сферу застосування даної задачі в різних сферах проектування конструкцій і пристроїв. Також розглянуто як з часом розвивалися методи розрахунку балок і канатів, зокрема метод скінченних елементів та метод початкових параметрів. Досліджено історію балкових сплайнів, їх формулювання і недоліки а також кількісне поняття естетичної міри кривої. Для геометрично нелінійних балок розглянуто існуючі рішення для поперечно навантажених довгих гнучких систем, що мають властивості як канату так і балки. Для просторових балкових систем розглянуто різні підходи до моделювання просторових систем, зокрема з допомогою хеліксного елемента, а також детально проаналізована популярна коротаційна постановка для визначальних рівнянь. Сформульовані задачі досліджень.

Другий розділ присвячено моделюванню плоских та просторових розгалужених канатних систем. В ньому розглянуто адаптацію методу стрільби та методу абсолютних координат для канатів під дією зосереджених сил та приклади їх обчислень. Показано, що популярний метод стрільби не забезпечує збіжності результатів і не може бути основою побудови

розрахункових алгоритмів. Представлено метод базових та згладжувальних рішень для канатних систем який є стійким при довільних значеннях сил, початкових довжин і характеристик видовження канату. Основу методу складає нове аналітичне рішення для канатного елемента, як відхилення від кругової геометрії. Продemonстровано ефективність цього методу на широко відомих в літературі прикладах (гнучкий райзер, просторова система) та розгалужених системах з різним натягом елементів системи. Усі розглянуті плоскі та просторові приклади демонструють ідеальну збіжність процедури незалежно від обраної початкової позиції та потребують на порядок менше розрахункових елементів, ніж це вимагають інші моделі.

Третій розділ присвячено створенню принципово нової методології розрахунку геометрично нелінійних, ГН, балок, що представляє собою суму криволінійного розривного базового рішення, БР, та згладжувального рішення, яке будується в криволінійних координатах БР. Методологія має деякі особливості коротаційного ГН підходу, проте містить принципово нові ідеї і результати. Вперше в літературі запропоновано ефективну комбіновану схему застосування балкових і канатних елементів, коли в зоні опор, контактів, дій зосереджених сил застосовуються балкові елементи, а на всіх інших ділянках – канатні. Проведено порівняльний аналіз застосування для задач геометричного моделювання (побудова сплайнів) трьох різних методів: коротаційний балковий сплайн, КБС, сплайни Безьє, BZ, та ГН балка, ГНБ. Показано, що BZ значно поступається по якості перед двома іншими, і дає значні локальні піки кривизни, і вимагає подальшого уточнення чи оптимізації. КБС для всіх розглянутих задач показав хороші результати.

Четвертий розділ узагальнює методологію базового та згладжувального рішень на тривимірний випадок. Розглядаються задачі спрощеного рівня, які втім і аналізуються в основному в літературі, для яких, власне, можна отримати прийнятний результат і без згладжувального рішення. Порівняння з відомими задачами показують, що навіть самого базового рішення достатньо для точного наближення рішення невеликою кількістю

елементів, зазвичай на порядки нижче, ніж це вимагається в лінійних моделях.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

В додаток до відомого класичного рішення для ланцюгової лінії (catenary), що є основою всіх точних алгоритмів, **для розрахунків канату отримано альтернативне точне (на ділянці) рішення**, що представляє собою суму частинки кола та ЗР, що є рішенням диференційних рівнянь четвертого порядку; і яке, на відміну від ланцюгової лінії, дозволяє точно враховувати довільне видовження канату, тобто розглядати досить еластичні канати. Рішення отримано в вигляді зручному для застосування методу початкових параметрів, МПП (transfer matrix method).

Для попередньо розтягнутої (стисненої) ділянки кола під дією розподілених дотичних і нормальних навантажень **вперше отримані точні аналітичні рішення диференційних рівнянь 6-го порядку в вигляді зручному для застосування МПП**. Для забезпечення комп'ютерної збіжності формул для ділянок, що є майже прямими (кут дуги кола не перевищує 1°), **вперше отримані розклади цих рішень в ряд Тейлора**, і продемонстровано, що експоненціальні («розтягнуті») рішення співпадають з тригонометричними («стиснутими») рішеннями при характерному значенні осьової сили. В свою чергу при відсутності «вбитої» осьової сили лінійне рішення співпадає з тригонометричним. Це забезпечує неперервність загального рішення тіла в цілому при довільній історії навантаження і зміні геометрії.

Вперше сформульовані критерії для яких комбінацій геометричних, фізичних і механічних параметрів **задане довге тіло можна розглядати як канат чи як балку**, та отримані деякі конкретні рішення. Вперше запропонована методика і умови комбінованого спряження канату та балки. Продемонстровані переваги такого підходу, коли внутрішня частина тіла моделюється як канат, а біля границь використовується модель балки.

Вперше запропоновано базове рішення для трьохвимірного елемента як ділянки хелікса, і всі геометричні параметри якого (базисні вектори, відносні положення точок) однозначно зв'язані з системою базисних

глобальних моментів та характеристиками жорсткості січення. Показано, що для деяких видів закріплення просторової балки наявність такого БР навіть при відсутності ЗР може забезпечити достатню точність ГН деформування.

Як основний науковий результат роботи вперше запропоновано метод базових розривних рішень, БР, та згладжувальних рішень, ЗР. Метод є новим варіантом відомого коротаційного підходу, де БР є криволінійною ділянкою (елемент кола чи хелікса) і в цілому враховує ГН деформацію від значних внутрішніх сил та моментів, проте є розривним і не неперервним. ЗР будується в локальних криволінійних координатах, є лінійним і незначним, згладжує БР і забезпечує неперервність всіх параметрів, і слугує для уточнення БР на наступній ітерації. Процедура уточнення є динамічною, і шляхом корекції коефіцієнта уточнення враховує збіжність чи розбіжність результатів на двох послідовних ітераціях.

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що:

1. На прикладі канату, що підданий дії системи зосереджених сил, продемонстровані беззаперечні переваги коротаційних підходів, порівняно з популярним методом стрільби. Кортаційні підходи є стійкими при довільній кількості ділянок, інтенсивності сил, жорсткості січення канату, та його початковій довжині. Що стосується методу стрільби, то він починає розходитися для канатів великої довжини і великій кількості сил.

2. В усіх розглянутих задачах, методах і прикладах застосовується метод початкових параметрів, як найбільш зручний метод організації і алгоритмізації розрахунків. В роботі доповнена його теорія і практика, особливо коли ділянки є розривними і власне рівняння спряження (умови на краях елементів) забезпечують загальну нерозривність методу.

3. Запропоноване комплексне поєднання балкових і канатних елементів, коли біля особливих точок застосовуються канатні, на порядки спрощує розрахунки і при цьому дозволяє знаходити всі особливості і краєві ефекти.

4. Створений метод розрахунку ГН поведінки не вимагає задання початкової геометрії тіла. Це дуже корисно для проведення діагностичних

досліджень конструкцій, початковий стан яких невідомий, а навантажений (деформований) стан задається за допомогою безпосередніх геодезичних вимірювань.

5. Розроблені методи є корисними для проведення сплайнів, коли залягають положення граничних точок, напрямки дотичних в них, та загальна довжина лінії. Тоді отримана запропонованим методом крива є оптимальною серед можливих за критерієм мінімуму енергії, що часто застосовується в геометричному проектуванні. Подібним чином отримані результати можуть застосовуватися для проектування гріпперів (захватів) для роботів та вибору їх довжини та властивостей жорсткості.

6. Приведені значення розрахункових переміщень, сил в табличній формі в вибраних точках можуть слугувати для тестування інших програм та методик, адже на відміну від результатів приведених в літературі, вони отримані для екстремальних значень характеристик жорсткості, великого видовження і значної зміни форми.

7. Нова методологія розрахунку ГН поведінки довгих елементів з використанням розривного БР та ЗР відкриває нові перспективи до створення розрахункових методів взагалі, і може мати потужний вплив на створення новітніх розрахункових комплексів.

Ключові слова: канат, балка, метод початкових параметрів, система гнучких елементів, сплайни, метод базових та згладжувальних рішень, хелікс, еластіка, умови спряження, втрата стійкості.

ABSTRACT

Mazuryk R.V. Method of basic and smoothing solutions for the analysis of static deformation of geometrically nonlinear one-dimensional systems. - Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics - National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2024.

The aim of the work is to create a new methodology, algorithms and programs for calculating spatial geometrically nonlinear one-dimensional systems based on the basic discontinuous, BS, and smoothing, SS, solutions, where the basic solution has a relatively simple circular or helix geometry with a corresponding "built-in" system of basic forces that takes into account the geometric nonlinearity of the problem to the maximum extent possible and sets a curvilinear coordinate system to obtain the analytical SS; and the SS, in turn, corrects the BS using a special iterative refinement procedure.

Engineering calculations of machines and structures are traditionally performed in a geometrically linear formulation, where it is assumed that deformation displacements and changes in the shape of the body are insignificant and do not affect the design scheme. The introduction of more flexible composite materials in various industries (e.g., aircraft construction), requirements for improving the accuracy of analysis (pipeline industry, lifting and transporting machines and equipment), considering large deformation displacements, - it makes relevant to develop analysis methods in the geometrically nonlinear (GN) formulation. Moreover, the current trend of expanding the scope of design calculations to flexible medical devices (endoscopes), actively bent structures (tents, playgrounds), sports equipment (paddles, rackets), and cable structures encourages the creation of calculation methods and programs that take into account changes in body shape under stress. The application of GN analysis of flexible long bodies is relevant in geometric modeling (construction of approximation and interpolation splines) of trajectories and images, as well as in the film industry, where the

requirement of plausibility of computer-generated deformation and motion processes leads to the increasing use of algorithms based on physically based models, i.e., solutions of differential equations of deformation of beams or cables.

Surprisingly, modern commercial programs, despite all their sophistication, time and traditions of development, scientific support, ease of use and presentation of input and output data, are still unable to solve such problems. This is due to both the shortcomings of the analytical computational elements used to model the properties of physical bodies and the organization of iterative processes. In fact, this is the reason for the wide flow of scientific developments in the literature, which, however, have a narrow application and insufficient confirmation by numerical and experimental tests.

The disadvantages of existing methods include the following. First, almost all of them are based on the principles of energy minimization for pre-selected degrees of freedom at some points and approximating functions for all other intermediate points. Obviously, it is questionable whether such artificially constructed functions can model all the differential dependencies between the physical and geometric parameters of the problems. Second, for nonlinear problems, it is necessary to perform linearization to obtain a system of linear equations. Since all existing methods performs continuous iterative approximations that differ little from the previous one, this leads to very long computations (hundreds of iterations) or to solving problems where the GN has a limited influence on the results (several tens of percent); in addition, they require an exact initial position, for example, for zero external actions, and this greatly complicates the problem when the initial position of the body is unknown. Thirdly, there are two GN mathematical models of long flexible bodies - a beam and a cable, and it is known that a highly stretched beam acquires the properties of a cable. However, the literature does not indicate the limits of their separate application, nor does it describe combined methods, when the less labor-intensive cable model can be used in some areas (e.g., internal areas), and the beam model can be used at the boundaries of the body or in areas of contact with other bodies.

Thus, it is important to develop methods for numerical analysis of the GN one-dimensional problems based on accurate analytical solutions of cable models and simple, stretched, and compressed curved beams for elementary basic sections; development of an efficient refinement algorithm that would allow independent refinement of the position of each basic section (geometry) at a given iteration with its subsequent smoothing using SS, which would significantly speed up the refinement process and make it independent of the correct choice of the initial position.

The first section analyzes the relevance of the problem of deformation in long flexible bodies, existing solutions, and formulates the research problem. The wide scope of application of this problem in various areas of designing structures and devices is shown. It is also considered how the methods of calculation of beams and cables have evolved over time, in particular the finite element method and the method of initial parameters. The history of beam splines, their formulations and shortcomings, as well as the quantitative concept of the aesthetic measure of a curve are investigated. For geometrically nonlinear beams, the existing solutions for transversely loaded long flexible systems with both cable and beam properties are considered.

The second chapter is devoted to modeling of plane and spatial branched cable systems. It considers the adaptation of the firing method and the method of absolute coordinates for cables under the action of concentrated forces and examples of their calculations. It is shown that the popular firing method does not provide convergence of results and cannot be the basis for the construction of computational algorithms. The method of basic and smoothing solutions for cable systems is presented, which is stable at arbitrary values of forces, initial lengths, and cable elongation characteristics. The method is based on a new analytical solution for a cable element as a deviation from circular geometry. The effectiveness of this method is demonstrated on examples widely known in the literature (flexible riser, spatial system) and branched systems with different tensions of the system elements. All the considered plane and spatial examples demonstrate perfect convergence of the

procedure regardless of the chosen initial position and require an order of magnitude less computational elements than other models.

The third chapter is devoted to the development of a fundamentally new methodology for the calculation of geometrically nonlinear (GN) beams, which is the sum of a curvilinear discontinuous basic solution (BS) and a smoothing solution constructed in the curvilinear coordinates of the BS. The methodology has some features of the shortening GN approach, but contains fundamentally new ideas and results. For the first time in the literature, an effective combined scheme for the use of beam and cable elements is proposed, when beam elements are used in the zone of supports, contacts, and actions of concentrated forces, and cable elements are used in all other areas. A comparative analysis of the use of three different methods for geometric modeling (spline construction) is carried out: the shortening beam spline, CBS, the Bezier splines, BZ, and the GN beam, GNB. It is shown that BZ is significantly inferior in quality to the other two, and gives significant local curvature peaks, and requires further refinement or optimization. The CBS for all considered problems showed good results.

The fourth section generalizes the methodology of the basic and smoothing solutions to the three-dimensional case. We consider problems of a simplified level, which are analyzed mainly in the literature, and for which, in fact, it is possible to obtain an acceptable result without a smoothing solution. Comparisons with well-known problems show that even a single basic method is sufficient to accurately approximate the solution with a small number of elements, usually tens of times lower than required in linear models.

The scientific novelty of the results is as follows:

In addition to the well-known classical catenary solution, which is the basis of all exact algorithms, **an alternative exact (on the section) solution was obtained for cable calculations**, which is the sum of the circular part and the SS, which is a solution of fourth-order differential equations; and which, unlike the catenary solution, allows to accurately take into account the arbitrary elongation of the cable, i.e., to consider essentially elongated cables. The solution is obtained in the form of

an easy-to-use transfer matrix method, TMM.

For a pre-stretched (compressed) section of a circle under the action of distributed tangential and normal loads, **the exact analytical solutions of the 6th order differential equations are first obtained in the form convenient for application of TMM.** To ensure the computer convergence of the formulas for sections that are almost straight (the arc angle of the circle does not exceed 1°), **the expansions of these solutions in the Taylor series are obtained for the first time,** and it is demonstrated that the exponential ("stretched") solutions coincide with the trigonometric ("compressed") solutions at a characteristic value of the axial force. In turn, in the absence of a predefined axial force, the linear solution coincides with the trigonometric solution. This ensures the continuity of the overall solution of the body as a whole under an arbitrary load history and geometry changes.

The criteria for which combinations of geometric, physical, and mechanical parameters can be used to treat a given long body as a cable or a beam are formulated for the first time, and some specific solutions are obtained. For the first time, a methodology and conditions for the combined conjugation of a cable and a beam are proposed. The advantages of this approach, when the inner part of the body is modeled as a cable and the beam model is used at the boundaries, are demonstrated.

For the first time, a basic solution for a three-dimensional element as a section of a helix is proposed, and all geometric parameters (basis vectors, relative positions of points) are uniquely related to the system of basic global moments and stiffness properties of the section. It is shown that for some types of spatial beam anchoring, the presence of such a BS, even in the absence of a SS, can provide sufficient accuracy of the deformation GN.

As the main scientific result of the work, the method of basic discontinuous solutions, BS, and smoothing solutions, SS, is proposed for the first time. The method is a new variant of the well-known corotational formulation, where the BS is a curved section (circle or helix element) and generally takes into account the GN deformation due to significant internal forces and moments, but is

discontinuous and not aligned. The SS is constructed in local curvilinear coordinates, is linear and insignificant, smooths the BS and ensures the continuity of all parameters, and serves to refine the BS at the next iteration. The refinement procedure is dynamic; and by adjusting the refinement coefficient, it takes into account the convergence or divergence of results at two consecutive iterations.

The practical significance of the results obtained is as follows:

1. On the example of a cable subjected to a system of concentrated forces, the undeniable advantages of corotational approaches have been demonstrated in comparison with the popular method of shooting. Corotational approaches are stable for an arbitrary number of sections, force intensity, cable cross-sectional stiffness, and initial length. As for the shooting method, it begins to diverge for cables with long length and a large number of forces.
2. In all the considered problems, methods and examples, the transfer matrix method is used as the most convenient method for organizing and algorithmizing calculations. Its theory and practice are supplemented in the work, especially when the sections are discontinuous and the actual conjugation equation (conditions at the edges of the elements) provide the overall continuity of the method.
3. The proposed complex combination of beam and cable elements, when cable elements are used near special places, simplifies calculations by orders of magnitude and at the same time allows finding all the features and edge effects.
4. The developed method for calculating the GN behavior does not require specifying the initial geometry of the body. This is very useful for conducting diagnostic studies of structures whose initial state is unknown, and the stress strain state is retrieved using direct geodetic measurements.
5. The developed methods are useful for splines when the positions of the boundary points, the directions of the tangents in them, and the total length of the line are known. Then the curve obtained by the proposed method is optimal among the possible ones according to the criterion of minimum energy, which is often used in geometric design. Similarly, the results obtained can be used to design grippers for robots and select their length and stiffness properties.

6. The values of calculated displacements and forces given in tabular form at selected points can be used to test other programs and methods, because, unlike the results given in the literature, they were obtained for extreme values of stiffness characteristics, large elongation, and significant shape changes.

7. The new methodology for calculating the GN behavior of long elements using discontinuous BS and SS opens up new prospects for the development of computational methods in general, and can have a powerful impact on the creation of the latest computational complexes.

Keywords: cable, beam, method of initial parameters, system of flexible elements, splines, method of basic and smoothing solutions, helix, elasticity, conjugation conditions, loss of stability.

Список публікацій здобувача

1. Orynyak I., Mazuryk R., Oryniak A. (2020). Basic (Discontinuous) and Smoothing-Up (Conjugated) Solutions in Transfer-Matrix Method for Static Geometrically Nonlinear Beam and Cable in Plane. Journal of Engineering Mechanics. Vol. 146, Issue 5 [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001753](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001753) (Scopus, WOS, Q1)

Здобувачем розроблено рівняння спряження та алгоритм для методу базових і поправочних рішень; для майже прямих ділянок проведені розклади рішень в ряд Тейлора; підготовлені приклади та проведені розрахунки для них, досліджена ефективність введених параметрів уточнення.

2. Orynyak I., Mazuryk R. (2022). Application of method of discontinuous basic and enhanced smoothing solutions for 3D multibranched cable. Engineering Structures Volume 251, Part B, 15 January 2022, 113582 <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113582> (Scopus, WOS, Q1)

Здобувачем отримані рівняння спряження для багатоелементних вузлів і алгоритм рішення системи, підготовлені приклади і проведені їх розрахунки.

3. Orynyak I., Guarracino F., Mazuryk R., Modano M. (2022) An efficient iteration procedure for form finding of slack cables under concentrated forces. Archives of Civil Engineering, 2022, 68(2): 645-663 <https://doi.org/10.24425/ace.2022.140664> (Scopus, WOS, Q4)

Здобувачем сформульована процедура ітераційних обчислень та процедури уточнення, підготовлені приклади та розрахунки для них.

4. Orynyak I., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points. System research and information technologies. 2022, N4. doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.10 (Scopus, WOS, Q4)

Здобувачем реалізований МПП та процедура ітераційного уточнення параметрів розрахункової системи для коротацийних балкових сплайнів.

5. Orynyak I., Kulyk K., Mazuryk R. Analysis of geometrically nonlinear

deformation of 3D beams by the method of basic helical elements. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2023. – 66, № 1-2. – С. 5–28. –Бібліогр.: 24 назв. Кат А.

Здобувачем отримані рівняння для базового рішення МПП.

6. Ігор Ориняк, Дмитро Кольцов, Роман Мазурик (2023). Порівняння плоских балкового коротаційного сплайну і геометрично нелінійної балки. Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023" , Львів. Збірник наукових праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2023. – 454 с. С. 393.

Здобувачем проведено розрахунки прикладів геометрично нелінійних систем, розраховано якість їх кривих

7. Ігор Ориняк, Роман Мазурик. Метод базових (розривних) та поправочних розв’язків для геометрично нелінійного аналізу балок та канатів. Там же. С. 85.

Здобувачем представлено техніка реалізації методу, підготовлені приклади і досліджено вплив натягу на збіжність розрахунків.

8. Ігор Ориняк, Костянтин Кулик, Роман Мазурик Аналіз геометрично нелінійного деформування 3D балок методом базових хеліксних ділянок. Там же. С. 79.

Здобувачем представлено просторовий алгоритм уточнення для методу базових і поправочних рішень, підготовлені приклади розрахунків.

9. І.В. Ориняк, Р.В.Мазурик (2023). Моделювання плоских канатів з врахуванням їх жорсткості на вигин методом розривних базових та згладжувальних рішень. Матеріали Міжнародної наукової конференції “Актуальні проблеми механіки” до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка, 14-16 листопада. [Електронний ресурс] // Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України – 2023. – 469 с. С. 385.

Здобувачем досліджені приклади ГН систем, і вплив різних величини натягу на швидкість збіжності результатів.

10. Ориняк І.В., Мазурик Р.В (2023). Комбіноване застосування моделей геометрично нелінійної балки та канату для довгих розтягнутих конструкцій. Матеріали Всеукраїнської наукової конференції. “Сучасні проблеми прикладної математики та комп’ютерних наук”, 7 – 9 листопада 2023, Львів, АРАМС-2023 // Львівський національний університет імені Івана Франка – 250 с. С 169.

Здобувачем проведено розрахунки прикладів геометрично нелінійних змішаних балково-канатних систем

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ	22
ВСТУП.....	23
1. АКТУАЛЬНІСТЬ ЗАДАЧІ ТА АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ РІШЕНЬ.....	30
1.1 Аналітичні та чисельні методи розрахунку канату	32
1.2 Балка як еластика і естетична крива.	36
1.3 Плоска ГН балка	44
1.4 Трьохвимірна ГН балка.	53
1.5. Постановка задачі досліджень	59
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РІШЕННЯ КАНАТНИХ СИСТЕМ.....	61
2.1. Канат під дією зосереджених сил.....	61
2.1.1 Метод абсолютних координат.....	61
2.1.2 Метод стрільби	66
2.1.3 Приклади обчислень	71
2.2 МЕТОД БАЗОВИХ ТА ЗГЛАДЖУВАЛЬНИХ РІШЕНЬ	76
2.2.1 Ідея методу, поняття базової геометрії.....	76
2.2.2 Згладжувальне рішення та спряження елементів	80
2.2.3 Організація ітераційного процесу.....	87
2.3 ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕНЬ.....	92
2.3.1 Ізольований канат.....	92
2.3.2. Гнучкий райзер як ланцюгова лінія.	95
2.3.3 Складні плоскі системи	100
2.3.4 Просторові системи.	107
Висновки за розділом 2	111
РОЗДІЛ 3. МЕТОД БАЗОВИХ І ЗГЛАДЖУВАЛЬНИХ РІШЕНЬ ДЛЯ	
ПЛОСКИХ БАЛОК	113
3.1 Ідея методу, поняття базової геометрії.	113
3.2 Згладжувальне рішення	115

	20
3.3 ОРГАНІЗАЦІЯ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ	122
3.3.1 Загальний алгоритм процесу розрахунку	122
3.3.2 Граничні умови та умови спряження.	124
3.3.3 Коефіцієнт руху для корекції Базового рішення.....	125
3.4 ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕНЬ.....	127
3.4.1 Пряма шарнірно оперта балка.....	127
3.4.2 Розрахунок гнучкого райзеру	133
3.4.3 Втрата стійкості консольної балки при стиску.....	141
3.5 КОМБІНОВАНА СХЕМА БАЛКА-КАНАТ.....	146
3.5.1 Особливості застосування	146
3.5.2 Аналіз довгої шарнірно опертої балки.....	148
3.5.3 Застосування комбінованої схеми для гнучкого райзеру.....	150
3.6 ЯКІСТЬ КОРОТАЦІЙНИХ БАЛКОВИХ СПЛАЙНІВ І ГН БАЛОК.....	152
3.6.1 Опис відомих сплайнів для порівняння	152
3.6.2 Приклади порівняння якості кривих	155
ВИСНОВКИ ЗА РОЗДІЛОМ 3	165
РОЗДІЛ 4. ПРОСТОРОВІ ГН БАЛКИ	167
4.1 БАЗОВА ГЕОМЕТРІЯ.....	167
4.2 ФІЗИЧНІ ЗАКОНИ ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕМЕНТУ	169
4.2.1 Зв'язок моментів з кривизною і скрутом	169
4.2.2 Отримання хелікса деформуванням прямого стержня	173
4.3 ІТЕРАЦІЙНИЙ ПРОЦЕС РОЗВ'ЯЗКУ	177
4.4 ПРИКЛАДИ РІШЕННЯ.....	179
4.4.1 Задача Кірхгофа.....	179
4.4.2 Задача Бате.....	182
4.4.3 Задача Ібрагімбеговича	184
ВИСНОВКИ ЗА РОЗДІЛОМ 4	186
ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ.....	188
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	190

ДОДАТКИ..... 203

 Додаток А. Лінійний розв’язок згладжувального рішення для плоских балок 203

 Додаток Б. Експоненційний розв’язок згладжувального рішення для плоских балок 206

 Додаток В Тригонометричний розв’язок згладжувального рішення для плоских балок 209

Перелік умовних скорочень та позначень

БР – базове рішення.

ГН – геометрична нелінійність.

ГН ЗР – геометрично нелінійне згладжувальне рішення.

ГНБ – геометрично нелінійна балка.

ЗР – згладжувальне рішення.

КБС – коротаційний балковий сплайн.

КМЕ – крива мінімальної енергії.

КМВ – крива мінімальної варіації.

Л ЗР – лінійне згладжувальне рішення.

МПП – метод початкових параметрів.

МСЕ – метод скінченних елементів.

BZ– Сплайн Безьє.

\vec{B}^j - базове рішення системи на j -тій ітерації.

\vec{C}^j - згладжувальне рішення на j -тій ітерації.

m_i - коефіцієнт обмеження зміни базової геометрії елемента на i -тій ітерації.

\vec{U}^j - результуюче рішення на j -тій ітерації

ВСТУП

Актуальність. Інженерні розрахунки машин та конструкцій традиційно виконується в геометрично лінійній постановці, де вважається що деформаційні переміщення і зміна форми тіла є незначними і не впливають на розрахункову схему. Впровадження в різних галузях промисловості більш гнучких композитних матеріалів (наприклад, в літакобудуванні, енергетичних вітряках, тощо), зафіксовані в сучасних нормативних документах вимоги щодо покращання точності аналізу (трубопровідна індустрія, підйомно-транспортні машини) з врахуванням великих деформаційних переміщень – роблять актуальними створення методів аналізу в геометрично-нелінійній, ГН, постановці. Більше того, сучасна тенденція розширення сфери застосування проектних розрахунків на гнучкі медичні прибори (ендоскопи), розбірні будівельні конструкції (палатки, манежи, куполи), спортивне спорядження (шести, ракетки), вантові мостові чи архітектурні конструкції спонукають до створення методів і програм розрахунку, що враховують зміну форми тіла в процесі навантаження. Застосування ГН аналізу гнучких довгих тіл є актуальним при геометричному моделюванні (побудова апроксимаційних і інтерполяційних сплайнів) траєкторій і зображень, а також в кіноіндустрії, де вимога правдоподібності згенерованих комп'ютером процесів деформування та руху приводить до все ширшого застосування алгоритмів, що ґрунтуються на фізично обґрунтованих моделях, тобто є рішеннями диференціальних рівнянь деформації балок чи канатів.

Як не дивно, сучасні комерційні програми, при всій своїй досконалості, часу і традиціям розвитку, науковому забезпеченні, зручності застосування та представлення вхідних і вихідних даних -- все ще не здатні вирішувати подібні задачі. Це пов'язано як з недоліками аналітичних розрахункових елементів, що застосовуються для моделювання властивостей фізичних тіл, так і з організацією ітераційних процесів. Власне, з цим і пов'язаний широкий потік наукових розробок в літературі, які, проте, мають вузьке застосування та недостатнє підтвердження чисельними та експериментальними тестами.

До недоліків існуючих методів віднесемо наступне. Перше, майже всі вони базуються на принципах мінімізації енергії для заздалегідь вибраних степенях свободи в деяких точках і апроксимуючих функцій для всіх інших проміжних точок. Очевидно, є сумнівним те, чи можуть такі штучно сконструйовані функції моделювати всі диференційні залежності між фізичними і геометричними параметрами задач. Друге, для нелінійних задач необхідно проводити лінеаризацію, щоб отримати систему лінійних рівнянь. Всі існуючі методи будують неперервні ітераційні наближення, що мало відрізняються від попереднього, і це приводить до дуже довгих обчислень (сотні ітерацій) чи до рішення задач, де ГН має обмежений вплив на результати (декілька десятків процентів); окрім того вони вимагають точного початкового положення, наприклад для нульових зовнішніх дій, і це значно ускладнює задачу, коли початкове положення тіла невідоме. Третє, існують дві ГН математичні моделі довгих гнучких тіл – балка і канат, причому відомо, що сильно розтягнута балка отримує властивості канату. Проте в літературі не вказуються межі їх окремого застосування, не описуються комбіновані методи, коли на деяких ділянках може застосовуватися менш трудомістка модель каната (наприклад внутрішні ділянки), а модель балки - на границях тіла, чи в зонах контакту з іншими тілами.

Таким чином, важливим є створення методів чисельного аналізу ГН одновимірних задач, які базувались би на точних аналітичних рішеннях моделей канату та простої, розтягнутої, і стисненої криволінійної балки для елементарних базових ділянок; та розробка ефективного алгоритму уточнень, що дозволяв би незалежне уточнення положення кожної базової ділянки (геометрії) на заданій ітерації з наступним його згладжуванням за допомогою ЗР, що значно прискорить процес уточнень і зробить його незалежним від правильного вибору початкового положення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря

Сікорського» Дослідження даної роботи проводились згідно з планами науково-дослідних робіт кафедри прикладної математики факультету прикладної математики та в рамках науково-дослідної роботи № 2310п «Інформаційно-аналітична система для математичного моделювання та управління соціальними ризиками з застосуванням у техніці та медицині» (номер державної реєстрації — 0120U102216);

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є створення новітньої методології, алгоритмів і програм розрахунку просторових геометрично нелінійних одновимірних систем на основі базового розривного, БР, і згладжувального, ЗР, рішень, де базове рішення є круговою чи хеліксною геометрією з відповідно «вбудованою» системою базових сил, що максимально враховує геометричну нелінійність задачі та задає криволінійну систему координат для отримання аналітичного ЗР; а ЗР, в свою чергу, коректує БР за допомогою спеціальної ітераційної процедури уточнень.

Для досягнення вказаної мети у даній дисертаційній роботі вирішуються такі задачі:

- Демонстрація переваг коротаційного (що оперують рішеннями в локальній системі координат) підходу в порівнянні з методом стрільби на простому прикладі навантаження канату системою зосереджених сил.

- Створення загальної методології рішення як суми БР та ЗР для аналізу ГН задач, що на відміну від традиційних коротаційних підходів розглядає БР як уже деформовану геометрію, що є основною частиною повного рішення.

- Отримання нового точного ЗР для ділянки канату, базова геометрія якого є дугою кола, що майже точно враховує діюче нормальне навантаження, та довжина якого враховує уже досягнуту осьову силу (видовження).

- Отримання точних аналітичних лінійних ЗР для кругової попередньо стиснутої, розтягнутої чи ненавантаженої балки з врахуванням постійних нормального і дотичного навантаження.

- Апроксимація отриманих аналітичних ЗР для ділянок балки, кут дуги яких прямує до нуля, демонстрація їх неперервності при довільному знаку

«вбитої в рішення» осьової сили.

- Для спрощення розрахунків з можливістю врахування краєвих ефектів в зонах закріплень чи контактів, створення ефективної методології розгляду розтягнутої балки як комбінації балкових і канатних елементів.

-Отримання аналітичного БР для трьохвимірної балки як елемента хелікса, що враховує довільну поперечну форму балки, та застосування її для розрахунку просторових ГН балок.

Методи дослідження. Апаратом дослідження є математичний аналіз, теорія диференційних рівнянь, методи рішень нелінійних рівнянь, метод початкових параметрів, теорія канатів і балок.

Наукова новизна отриманих результатів. Наукова новизна одержаних результатів полягає у такому:

В добавок до відомого класичного рішення для ланцюгової лінії (catenary), що є основою всіх точних алгоритмів, **для розрахунків канату отримано альтернативне точне (на ділянці) рішення**, що представляє собою суму частинки кола та ЗР, що є рішенням диференційних рівнянь четвертого порядку; і яке, на відміну від ланцюгової лінії, дозволяє точно враховувати довільне видовження канату, тобто розглядати досить еластичні канати. Рішення отримано в вигляді зручному для застосування методу початкових параметрів, МПП (transfer matrix method).

Для попередньо розтягнутої (стисненої) ділянки кола під дією розподілених дотичних і нормальних навантажень **вперше отримані точні аналітичні рішення диференційних рівнянь 6-го порядку в вигляді зручному для застосування МПП.** Для забезпечення комп'ютерної збіжності формул для ділянок, що є майже прямими (кут дуги кола не перевищує 2°), **вперше отримані розклади цих рішень в ряд Тейлора**, і продемонстровано, що експоненціальні («розтягнуті») рішення співпадають з тригонометричними («стиснутими») рішеннями при характерному значенні осьової сили. В свою чергу при відсутності «вбитої» осьової сили лінійне рішення співпадає з тригонометричним. Це забезпечує неперервність загального рішення тіла в

цілому при довільній історії навантаження і зміні геометрії.

Вперше сформульовані критерії для яких комбінацій геометричних, фізичних і механічних параметрів **задане довге тіло можна розглядати як канат чи як балку**, та отримані деякі конкретні рішення. Вперше запропонована методика і умови комбінованого спряження канату та балки. Продемонстровані переваги такого підходу, коли внутрішня частина тіла моделюється як канат, а біля границь використовується модель балки.

Вперше запропоновано базове рішення для трьохвимірного елемента як ділянки хелікса, і всі геометричні параметри якого (базисні вектори, відносні положення точок) однозначно зв'язані з системою базисних глобальних моментів та характеристиками жорсткості січення. Показано, що для деяких видів закріплення просторової балки наявність такого БР навіть при відсутності ЗР може забезпечити достатню точність ГН деформування.

Як основний науковий результат роботи вперше запропоновано метод базових розривних рішень, БР, та згладжувальних рішень, ЗР. Метод є новим варіантом відомого коротаційного підходу, де БР є криволінійною ділянкою (елемент кола чи хелікса) і в цілому враховує ГН деформацію від значних внутрішніх сил та моментів, проте є розривним і не неперервним. ЗР будується в локальних криволінійних координатах, є лінійним і незначним, згладжує БР і забезпечує неперервність всіх параметрів, і слугує для уточнення БР на наступній ітерації. Процедура уточнення є динамічною, і шляхом корекції коефіцієнта уточнення враховує збіжність чи розбіжність результатів на двох послідовних ітераціях.

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що:

1. На прикладі канату, що підданий дії системи зосереджених сил, продемонстровані беззаперечні переваги коротаційних підходів, порівняно з популярним методом стрільби. Кортаційні підходи є стійкими при довільній кількості ділянок, інтенсивності сил, жорсткості січення канату, та його початковій довжині. Що стосується методу стрільби, то він починає розходитися для канатів великої довжини і великій кількості сил.

2. В усіх розглянутих задачах, методах і прикладах застосовується метод початкових параметрів, як найбільш зручний метод організації і алгоритмізації розрахунків. В роботі доповнена його теорія і практика, особливо коли ділянки є розривними і власне рівняння спряження (умови на краях елементів) забезпечують загальну нерозривність методу.

3. Запропоноване комплексне поєднання балкових і канатних елементів, коли біля особливих точок застосовуються канатні, на порядки спрощує розрахунки і при цьому дозволяє знаходити всі особливості і краєві ефекти.

4. Створений метод розрахунку ГН поведінки не вимагає задання початкової геометрії тіла. Це дуже корисно для проведення діагностичних досліджень конструкцій, початковий стан яких невідомий, а навантажений (деформований) стан задається за допомогою безпосередніх геодезичних вимірювань.

5. Розроблені методи є корисними для проведення сплайнів, коли залаються положення граничних точок, напрямки дотичних в них, та загальна довжина лінії. Тоді отримана запропонованим методом крива є оптимальною серед можливих за критерієм мінімуму енергії, що часто застосовується в геометричному проектуванні. Подібним чином отримані результати можуть застосовуватися для проектування гріпперів (захватів) для роботів та вибору їх довжини та властивостей жорсткості.

6. Приведені значення розрахункових переміщень, сил в табличній формі в вибраних точках можуть слугувати для тестування інших програм та методик, адже на відміну від результатів приведених в літературі, вони отримані для екстремальних значень характеристик жорсткості, великого видовження і значної зміни форми.

7. Нова методологія розрахунку ГН поведінки довгих елементів з використанням розривного БР та ЗР відкриває нові перспективи до створення розрахункових методів взагалі, і може мати потужний вплив на створення новітніх розрахункових комплексів.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертаційного

дослідження, представлені до захисту, одержані автором особисто. В усіх роботах здобувачу належить загальний алгоритм розрахунку і уточнюючих ітерацій; створені розрахункові програми; проведено підбір тестових прикладів і дослідження їх збіжності. Окрім того, у публікаціях у співавторстві, здобувачеві належать такі результати: в [1] отримані аналітичні вирази для ЗР та їх розклад в ряд Тейлора, запропоновано комбіновану схему балка-канат, яка дозволяє зменшити розрахункову складність систем; в [2] отримані формули для ЗР та їх розклади в ряд Тейлора; в [3] реалізовано метод стрільби; в [4] розробив алгоритм застосування МПП для замкнутих контурів; [5] отримав рівняння для базового рішення МПП. .

Апробація результатів дисертації. Результати та основні положення роботи подавалися та обговорювалися на таких конференціях:

- Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023". Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики. 23-25 травня, 2023. Наживо. [5,6,7]
- Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки”. 14-16 Листопада, 2023 *Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України* [8];
- Всеукраїнська наукова конференція. “Сучасні проблеми прикладної математики та комп’ютерних наук”, 7 – 9 листопада 2023, Львів, АРАМС-2023 [9];
- **Публікації.** За результатами досліджень опубліковано 9 наукових робіт, в тому числі **4 статті** які включено до списку міжнародної наукометричної бази **Scopus** з квантилями **Q1** [1]; **Q1** [2]; **Q3** [3]; **Q4** [4]

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 195 найменувань. Загальний обсяг роботи складає 211 сторінок, з яких 166 сторінок основного тексту, 12 сторінок використаних джерел, 9 сторінок додатків. Робота містить 51 рисунок, 38 таблиць.

РОЗДІЛ 1. АКТУАЛЬНІСТЬ ЗАДАЧІ ТА АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ РІШЕНЬ

Аналіз зміни форми і деформацій в довгих гнучких пружних тілах є складною, проте надзвичайно актуальною задачею для різних галузях промисловості. Опишемо деякі яскраві приклади такого застосування.

Перш за все відмітимо традиційні механічні, будівельні, аерокосмічні, архітектурні системи, де впровадження методів аналізу ГН деформування викликано застосуванням більш гнучких матеріалів, наприклад композитів, чи умовами більш складної роботи цих конструкцій. До них, наприклад відносяться лопаті гвинтів гелікоптерів, авіаційних чи вітрових гвинтів [11,12], крила висотних довголітніх літальних апаратів [13]. В аерокосмічній галузі широко використовуються розгортаючі чи надувні конструкції, що складаються з дуже гнучких балок, щоб зменшити об'єм і вагу під час запуску [14]. У контексті поняття Архітектурної геометрії [15] все більшого інтересу визиває проектування і дослідження геометричних форм активно вигнутих конструкцій. Вони отримуються в результаті згинання каркасів/наборів пружних елементів, таких як стрижні або балки [16]. Гнучкі морські райзери використовуються для транспортування нафти від гирла свердловини на морському дні до платформ, що розміщені на плавучих видобувних системах чи платформах з опорою, що фіксується канатами [17].

Важливими є задачі управління траєкторіями прокладання тіл (manipulation) [18]. Прикладом таких задач є визначення форми гнучкого тіла в процесі його руху в обмеженому просторі, чи його деформування при прикладенні на його границі різних кінематичних обмежень, що є важливим в робототехніці [19]. Подібні задачі виникають при прокладанні електричних кабелів в машинах, літаках, електромеханічному обладнанні, де звичайно простір для їх розміщення є обмежений і важливо, щоб кабелі деформувалися вільно, без пластичних деформацій [20]. Сучасне хірургічне та медичне лікування багатьох захворювань залежить від використання дуже гнучких медичних пристроїв та інструментів, подібних до балки або канату [21].

Проходження голки є важливим компонентом багатьох клінічних процедур, успіх яких процедур залежить від того, наскільки близько кінчик голки маневрує до цілі, уникаючи чи створюючи мінімальні навантаження критичних структур і органів [12]. Пружні троси є ефективною та економічною альтернативою для довгих протяжних конструкцій таких як вантові мости та підвісні дахи [23]. Останні розробки в аеронавтиці та космонавтиці також вимагають аналізу дуже гнучких сіткоподібних канатів, наприклад, для захоплення космічного сміття за допомогою прив'язної сітки (tether-net) як утримувача [24]. Кабельну мережу також можна використовувати як основний структурний компонент сітчастих рефлекторних антен, що розгортаються в космосі [25].

В останні дві декади техніка моделювання гнучких пружних тіл все ширше застосовується для правдоподібного комп'ютерного відтворення реальності чи створення штучних образів як для додатків у режимі офлайн, так і для роботи в реальному часі, таких як кіно та відеоігри [26]. Моделювання довгих гнучких тіл є актуальним напрямком досліджень у комп'ютерній графіці протягом останніх десятиліть. Існують різноманітні комп'ютерні додатки, як-от імітація мотузок, ниток, волосся та хутра віртуальних персонажів, а також рослинності, наприклад дерев чи інших рослин, які базуються на теорії балок Косера чи Кіркгофа [27,28], що враховують згинальну і скрутну жорсткість балки. Пружний згин початково плоских тонких елементів дозволяє реалізувати та економічно виготовляти естетично привабливі форми [29]. Більше того, розроблені спільнотою Комп'ютерної Графіки програми на основі моделей гнучких стержнів, що були в основному призначені для анімації художніх фільмів і візуальних ефектів, були піддані перевірці для розрахунку реальних об'єктів [30]. Всесторонні і послідовні чисельні тести показали, що ці програми загалом працюють добре, а іноді навіть краще, ніж деякі стандартні комерційні інструменти Механічної Інженерії [30].

1.1 Аналітичні та чисельні методи розрахунку канату

Теорія канатів була першою математичною задачею в історії людства, що отримана в результаті рішення диференціальних рівнянь, і передувала теорії балок, хоча обидві були в центрі уваги таких титанів як Ньютон, Бернуллі, Ейлер [31]. Проте перше рішення в вигляді параболи для провисаючого рівномірно навантаженого канатного мосту, відповідно до роботи [32] було запропоновано Бікманом ще в 1615 році; і лише після майже двох століть воно було повторене прийомним сином Ейлера інженером Фусом [33]. Що стосується постановки задачі, то вперше для нерозтяжного канату (як моделі провисаючої ланцюгової лінії, що і дало назві проблемі “catenary”) вона була сформульована Джеймсом Бернуллі [32]: «дія довільної частини лінії на сусідні ділянки є виключно тангенціальною». В сучасному вигляді рішення для канату при симетричному чи несиметричному розміщенні його кінців, відповідно до Ірвіна [31] отримано Рамсі [34].

Сучасна практика розрахунку канатів як конструкцій і елементу складних конструкцій починається з роботи Ернста [35], опублікованою в 1965 році. Він вперше припустив, що канатний елемент можна моделювати за допомогою елементів ферми. Він також представив модифіковану осьову жорсткість для врахування ефекту провисання підвішеного канату. Хоча його метод у деяких випадках давав задовільні результати, він був досить неефективним, оскільки для досягнення прийнятного рівня точності потрібна була велика кількість елементів ферми. Тим не менше, цей метод дав початок застосуванню методу скінчених елементів для канатів і канатних систем.

МСЕ широко застосовується в інженерній практиці. Метод Ерста був модифікований спочатку Худсоном для складних систем в 1971 році [36], а потім іншими дослідниками для врахування нелінійної поведінки і різних умов навантаження [37,38]. Крім того, в роботах [39, 40] були запропоновані різні типи двох-вузлових елементів з врахуванням ротаційного ступеня свободи та просторового розміщення канату. Такі підходи використовують лінійні інтерполяційні функції в рамках гіпотези нескінченно малих

деформацій. Геометричну нелінійність враховують за допомогою коротаційного формулювання [41], що передбачає нелінійне перетворення кінематичних змінних вузла при великих кутових переміщеннях. Недоліком цих елементів є необхідність надмірного уточнення сітки для точного представлення функції переміщень та розподілу осьової сили [42]. Крім того, оскільки ці елементи спеціально не сформульовані як канати, то вони проявляють характерну для стержнів нестабільність проскакування в вузлах (snap-through) при сингулярних (майже прямих) положеннях. Очевидно, що такі елементи не є ефективними. Часто для підвищення ефективності МСЕ в елементах вводять проміжні вузли [43], що дає змогу використовувати поліноми більш високого порядку. Проте тяжко наперед визначити місце розташування таких вузлів, що обмежує застосування МСЕ для канатів з великим провисом.

Як варіант МСЕ, часто канати моделюються за допомогою ізогеометричного підходу з використанням функцій Лагранжа як функції форми. В цьому підході форма нескінченно малого елемента форми апроксимується з використанням багатовузлових криволінійних елементів, зокрема в роботі [44] використовуються 4 вузли, а в роботі [45] запропоновано використання 6 вузлових елементів. Робота [46] основана на загальній Лагранжевій постановці (глобальні координати) і в ній використовуються квадратичні і кубічні В-сплайни. Основним недоліком ізогеометричних елементів є їх складність і велика кількість ступенів вільності. Це робить аналіз трудомістким і вимагає затрат часу. Крім того, матриці дотичної жорсткості отримується в неявному вигляді, і тому повинні застосовуватися ітераційні чисельні методи для її отримання. Зміна положення довільної вузлової точки сплайна призводить до складної зміни положення всіх інших точок лінії канату. Це може приводити чисельної нестабільності [47].

Альтернативою МСЕ є застосування розрахункового елемента, що використовує аналітичний вираз для пружної ланцюгової лінії, що вперше було запропоновано в роботі О'Браяна та Френсіса [48], та в подальшому розвинутий в [49]. В цьому методі загальна рівновага розтягнутого елемента

забезпечується в координатах Лагранжа, а точний профіль провису отримується після прикладення граничних умов на кінцях канату і не залежить від довжини канатного елемента. В подальшому було запропоновано сотні робіт, що розвивають та застосовують даний підхід. Наприклад, Андреа [42] запропонував нове формулювання елемента, що деформується (розтягується) для аналізу сітки канатів. Греко та ін. [50] запропонував процедуру рішення для 3Д канатної конструкції при навантаженні консервативними силами. Рішення для канату отримано в трьохвимірній векторній формі, довільно орієнтованих рівномірно розподілених сил, та зосереджених сил. Ефективний ітераційний метод для задач статичного і динамічного деформування канатних систем на основі рішення для ланцюгової лінії, запропонований в роботі [51]. Він дозволяє розглядати кожен канат лише як один розрахунковий елемент. В роботі [52] розглядаються трьохвимірні канатні структури на основі моделі нерозтяжного канату, до якого прикладені зосереджені розподілені та термічні навантаження, і який може в процесі деформування змінювати площину провису.

Можна стверджувати, що застосування аналітичних рішень дають значну перевагу в практичних застосуваннях [53], порівняно з МСЕ. Власне це і підтверджується в сучасних роботах по моніторингу провису електричних проводів [54, 55], по відтворенню початкового положення та розрахунку великопролітних підвісних мостів [56]. Звичайно, це пояснюється тим, що аналітичне рішення відтворює всі важливі особливості поведінки канату, а деякі локальні ефекти (тривимірність навантаження, нелінійна деформація, зосереджена сила) можуть враховуватися шляхом розбиття канату на більшу кількість елементів.

Тим не менше, аналітичні елементи побудовані на основі ланцюгового рішення мають певні недоліки. В першу чергу вони пов'язані з проблемами врахування великих осьових деформацій, зокрема для корекції розподіленої сили, а також при врахуванні балансу сил в вузлових елементах, чи в точках прикладення зосереджених сил, що пов'язана з тим, що в ланцюговому

рішенні явно застосовується умова, що горизонтальна сила не змінюється на всій довжині елемента [53]. Очевидно, що необхідна більш універсальна форма для точного рішення.

Іншою проблемою застосування ланцюгового рішення є організація процедури обчислень. Починаючи з визначної роботи Ірвіна і Сінклейера [57] для покрокового уточнення геометрії використовується модифікований метод Ньютона чи метод Ньютона-Рафсона [31]. Якщо в системі є лише один канатний елемент, то початкове наближення може бути легко отримане графічно [58]. Проблема стає складною для сильно провисаючого канату, початкова довжина якого є набагато більшою за відстань між точками закріплень, і до якого прикладена система різнонаправлених сил [53, 59]. Найбільш розповсюдженим підходом є вибір дуже натягнутої геометрії в якості початкової з поступовим наближенням положення опори до правильної. Це звичайно робиться з використанням методу Ньютона-Рафсона [53]. Можливою реалізацією по пошуку форми є зменшення початкової довжини канату з наступним її поступовим збільшенням до реальної.

Таким чином, всі розрахункові методи залежать від вибору початкової форми. Для одиночного канату це не є проблемою. Ми завжди можемо зробити правдоподібне припущення щодо його конфігурації. Проблема виникає при аналізі системи чи сітки канатів, де часто важко зробити обґрунтовані припущення щодо початкової форми, зокрема, враховуючи початковий натяг канату. Таким чином, визначення геометрії канатної сітки може бути дуже складною процедурою, яка потребує визначення форми окремих елементів за умови, що відомі їх кінцеві положення та внутрішні сили що знаходяться в рівновазі з прикладеним навантаженням, а потім проведення коригування положень взаємних точок системи, потім знову знаходження форми для окремих канатів і так далі [60]. Інші особливості і проблеми знаходження форми для підвісних канатних мостів обговорюються в роботі [61], зокрема пов'язані з невірноваженістю вузлових сил на ітераційних кроках, і все ще широким застосуванням методу проб і помилок.

Таким чином, доцільним є створення нових аналітичних методів розрахунку каната, як елементу складної системи, де б усі фізичні, геометричні рівняння та рівняння рівноваги уже б формулювалися як лінійні рівняння, що значно б спростило процедуру уточнення на кожному кроці ітераційного процесу. Також важливим є можливість фізичного розділення різних елементів в ітераційному процесі, що привело би до більш ефективного і незалежного коригування загальної форми кожним елементом окремо, а значить би забезпечувало кращу збіжність для знаходження форми системи.

1.2 Балка як еластика і естетична крива.

З історичної перспективи, власне балки привели до появи геометричних сплайнів: спочатку як фізичний об'єкт, а пізніше – як математична модель. [62]. Протягом багатьох років, починаючи з ранніх римських часів нашої ери, будівельники кораблів використовували пружні балки (довгі та тонкі смужки дерева) для проведення плавної кривої між певними точками як форми каркаса корабля [63]. Математична кубічна сплайн-апроксимація в її сучасній формі була запропонована в 1957 році Холладеєм [64]. Він зазначив, що для кривих з невеликими нахилами кубічний сплайн є ідентичним вигину прямої балки. Остання оперує чотирма ступенями свободи – переміщенням, кутом повороту (перша похідна), згинальним моментом (друга) і поперечною силою (третя похідна). Щоб застосувати балковий сплайн, необхідно знати положення послідовних точок і вказати одну додаткову граничну умову на кожному кінці. Балка називається натуральною, якщо другу похідну прийняти рівною нулю. У теорії балки це відповідає границі з простою опорою, коли переміщення фіксоване, а момент дорівнює нулю.

Поняття і математичний інструмент теорії балок були плідно використані пізніше. Відмітимо лише кілька ідей. Перш за все, за аналогією з балкою можна розглядати різні граничні умови на кінцях сплайну [62,65]. Це: умови вільного кінця, коли друга і третя похідні (момент і сила) дорівнюють нулю, а положення невідоме; затиснутий, коли задано положення і кут (перша

похідна); умова нульової сили (третя похідна додатково дорівнює нулю). Іншим відкриттям теорії балок є використання моделі розтягнутої балки для використання в балковому сплайні – це робить сплайн більш прямим [66] за рахунок збільшення кривизни в заданих положеннях (контрольних точках). Замість полінома 3-го порядку використовується поліном 1-го порядку та дві експоненціальні функції, $\exp(\pm kx)$, де коефіцієнт k пропорційний квадратному кореню із заданої осьової сили (що використовується додатково до розрахункової поперечної сили) [67]. Зауважимо, що якщо $k \rightarrow 0$ ми отримуємо звичайний балковий сплайн. Також зауважимо, що 4-параметрична модель поперечно навантаженої балки фактично є спрощенням 6-параметричної задачі плоскої балки (аналог *elastica*).

Згадаємо деякі додаткові особливості балок, запропоновані під час «золотого віку» домінування балок у розвитку сплайнів. Дуже ефективним є застосування моделі балки на пружних опорах замість звичайних жорстких опор, де крива розміщувалася на пружинах, закріплених у її контрольних точках для згладжування похибок вимірювань [68]. Жорсткість пружини контролює, наскільки точно контур балки інтерполуює ці точки [69]. Аскер [70] запропонував декілька додаткових підходів для подолання небажаних осциляцій лінії [71]. Застосування змінної жорсткості балки, як кусочно-постійної на окремих ділянках і кусочно-лінійної в рамках однієї ділянки, дозволяє локально змінювати поведінку сплайна зі збереженням тих самих контрольних точок. Насправді, як зазначено в [71], ці методи еквівалентні зваженому сплайну Салкаускаса [72].

Основним недоліком «класичних» балкових сплайнів є те, що вони придатні лише для інтерполяції до плоских кривих, які повертаються на кут менше 180° [73]. Причиною є явне представлення форми $y = f(x)$, яка залежить від вибору осей, не може представляти багатозначні функції, і не може бути використана, коли є певні обмеження, що стосуються нескінченності похідної [74].

Власне тому для сучасних криволінійних сплайнів використовуються неявні представлення в вигляді $f(x, y) = 0$ та параметричні представлення в формі $y = f(t)$ та $x = g(t)$, де t є додатковим параметром [74]. Що стосується, зокрема, балкових сплайнів, Фергюсон [75] ввів параметричну кубічну сплайн-криву, застосовуючи кубічну сплайн-функцію для кожної окремої координати за допомогою незалежного параметру кривої t , побто приводячи у відповідність кожній парі векторних точок (x, y) одне неспадаюче значення параметра t . Їх основний недолік полягає в довільності параметра t , різний вибір якого призводить до різної конфігурації [76], особливо при згладжуванні гострих кутів [77], або взагалі при виникненні великої кривизни [78]. Звичайно, це можна «залагодити», висунувши додаткову вимогу до поперечної сили (третя похідна), та змінивши положення кутових точок [77], але все ж це передбачає додаткові ускладнення. Таким чином, параметричний балковий сплайн в даний час використовується рідко.

Зараз дуже популярними є сплайни на основі кривих Безьє, В-сплайни та NURBS [74]. Їх особливістю є те, що вони утворюються спеціальними поліноміальними або раціональними функціями, сума яких у кожній контрольній точці дорівнює 1. Дуже часто використовуються й інші види кривих [78,79]. Тим не менш, незважаючи на нинішню меншу розповсюдженість використання, балкові кубічні сплайни велике історичне значення та значний вплив на розвиток теорії сплайнів. Ми можемо сформулювати, принаймні, три їхні суттєві внески.

1. Кількісне поняття естетичної міри кривої або «добротності» ('fairness') . Кількість кривих, що проходять через заданий набір точок, є нескінченною, тому проблема інтерполяції за своєю природою є некоректною [80]. Тому необхідно сформулювати зручні критерії для найкращої кривої. Звичайно, поняття добротної кривої з'явилося задовго до виникнення кубічного балкового сплайну, і в літературі широко використовувалися різні якісні формулювання [71,80]. Однак перше математично точне визначення

базувалося на аналогії з теорією пружної балки, де енергія деформації E задається виразом [64,67]:

$$E = \int_0^L \kappa^2(l) dl \quad (1.1a)$$

де κ є кривизною, l це елемент довжини та L повна довжина балки. Тому, крива вважається найкращою, якщо вона забезпечує мінімум енергії деформації E . В контексті систем автоматизованого проектування (CAD) цей інтеграл по квадрату кривизни став однією зі стандартних мір добротності плоских кривих [81]. Зауважимо, що кубічні сплайни дають мінімальну енергію лише при малих прогинах.

Вираз (1.1a) для енергії E дуже часто доповнюється іншими складовими, які також мають «балкове» походження. Наприклад, для тривимірної балки зазвичай вводять енергію «розтягу», яка пропорційна видовженню балки та є інтегралом від квадрата першої похідної, або енергію «скручування», яка визначається як інтеграл від квадрата третьої похідної (закручування балки) [82]. Для апроксимаційного сплайна контрольні точки часто розглядаються як пружини [69], розтяг або стиснення яких вносить додатковий внесок у пружну енергію. Так, для кожної «пружинної» (контрольної) точки розглядається додатковий член, який пропорційний квадрату різниці між положенням пружини та згладжених точок [83]. Такі криві узагальнено називають кривими мінімальної енергії, КМЕ [79].

Звичайно, енергетичні критерії на основі теорії балок не є унікальними математичними формулюваннями для визначення найкращої кривої. Широко використовуються і інші формулювання, але вони або були натхненні аналогією з енергетичними критеріями, або з'явилися в результаті виявлення недоліків КМЕ для побудови найкращої кривої. Пояснимо це. Коли довжина сплайна не обмежена, то (математично) найкраща КМЕ може бути досягнута для сплайна нескінченної довжини та мінімальної кривизни [84].

Таким чином, загалом КМЕ не відповідає відомій вимозі Фаріна [85], що графік кривої має бути майже кусочно-лінійним, безперервним і лише з

невеликою кількістю сегментів. Так, у [71] запропоновано інший функціонал, який задовольняє критеріям Фаріна, так звану криву мінімальної варіації, КМВ. В ньому в функціоналі (1a) замість виразу $\kappa^2(l)$ використовується квадрат похідної від кривизни $\left(\frac{d\kappa(l)}{dl}\right)^2$. На відміну від КМЕ, що згинається настільки мало як це можливо, КМВ згинається так однорідно і рівномірно як це можливо [71]. Проте КМВ не має чіткого фізичного сенсу, вона не така гнучка в застосуваннях, як КМЕ, щоб могли врахувати інші обмеження, наприклад, щодо необхідної близькості розміщення до контрольних точок в задачах апроксимації.

Таким чином, КМЕ все ще широко використовуються у звичайній неперервній [81] або дискретній формі [86], де енергія враховується інтегрально в контрольних точках як сума квадратів кутових неспіввідностей. Мінімізація функціональності здатна утворити естетично приємну криву, яка є стабільною для відносно повільно змінюваних кутів між сусідніми контрольними точками. Дуже часто мінімізація енергії застосовується як інструмент покращання для кривих, які утворюються іншими видами сплайнів. Наприклад, у багатьох роботах мінімізація енергії застосовується до кривих Безьє [87, 88], для кубічних сплайн-кривих [89], для біаркових (утворених ділянками кіл) сплайнів [90], В-сплайнів [91], для сплайнів Ерміта [92] і багато інших.

2. Розвиток математичних інструментів побудови еластики та сприяння її поширенню. Поняття еластики виникло в кінці XVII століття завдяки зусиллям братів Бернуллі [93]. Власне, еластика - це деформація вільної форми пружної балки, яка має таку форму, що квадрат її кривизна (1a) стає мінімальним. Це була цікава математична задача, і багато відомих вчених зробили внесок у її вирішення та застосування до різних проблем, достатньо згадати лише Ейлера, Лапласа, Кірхгофа, Макса Борна, Лава тощо [93].

Практичне відродження інтересу до еластики було започатковано роботами Шенберга [44] 1946 року, де сплайн був визначений як варіаційна

проблема, яка мінімізує функціонал (1a), але в наближенні малих відхилень кривої від початкової прямої лінії. Основний недолік робіт Шоленберга і Холлідея [44] був відмічений Біркгофом і де Буром у 1965 році [94], де було зазначено, що лінеаризовані схеми інтерполяції не є інваріантними щодо жорсткого обертання. Тому вони запропонували замінити лінеаризовані сплайн-криві на нелінійні сплайни (або «еластіку»). Крім того, вони отримали диференціальне рівняння для функцій кривизни $\kappa(l)$, які задовольняють вимогу мінімальної енергії (1a):

$$\ddot{\kappa}(l) + \frac{1}{2}\kappa^3 = 0 \quad (1.16)$$

Цю криву розглядають як вільну пружну криву, оскільки вона відноситься до плоскої пружної кривої без обмежень по довжині. Цей результат був розширений у роботі [95], де було показано, що рівняння (1б) можна застосувати для сегментованої функції кривизни з природними граничними умовами, які проходять через заданий набір контрольних точок. Інше узагальнення цих результатів полягає в обґрунтуванні справедливості рівняння (1б), коли граничні умови даються у вигляді заданих напрямків дотичних (кутів нахилу) [96].

На основі цих загальних результатів були запропоновані різні алгоритми побудови еластики. Перша така робота була описана Глассом у [97], де положення дискретних точки на кривій уточнювалися ітераційно. Технічно цей алгоритм пізніше був вдосконалений Малькольмом [98]. Мехлум [99] використав метод апроксимації за допомогою дуг кола, що забезпечував довільну бажану точність. Пізніше Мехлум використав ці методи в системі Autokon для проектування кривих і поверхонь, яка фактично стала першим комерційним програмним забезпеченням САПР, і підкреслила тісний зв'язок між представленнями кривої у вільній формі та математичними функціями, що мають фізичне підґрунтя [100]. Інша методика побудови нелінійного сплайна була запропонована в [81], де шукана функція представлена як кусково-поліноміальна функція кривизни.

Серед багатьох ранніх робіт з еластики відмітимо роботу Хорна [101], де

було ретельно вивчено конкретний сегмент КМЕ, визначений двома точками на базовій лінії з вертикальним дотичним обмеженням в граничних точках. Підхід полягає в представленні шуканої кривої у вигляді набору дуг кола з мінімізацією енергії. Починаючи з однієї дуги, потім розглядалися дві і більше дуг і аж до шістдесяти чотирьох, при цьому отримана крива нагадує обруч для крокету. Отримана енергія становила лише 0,913953% від енергії півкола. Потім була побудована еліптична крива з мінімальною енергією, яка дорівнювала 93,42% від півкола, а для спіралі Корню енергія становила всього 0,9178%. Потім Хорн отримав замкнуті вирази для енергії, довжини дуги та максимальної кривизни досліджуваної кривої, причому найменше значення енергії дорівнює 0,913893%. Очевидно, що КМЕ має принаймні два принципових недоліки: по-перше, вона порушує дуже бажану властивість для сплайнів, таку як властивість круглості [80], а інший полягає в тому, що енергія залежить від наперед невизначеної довжини еластики. Так, у роботах Каллая [102,103] розроблено теоретичне обґрунтування та чисельний метод для обчислення форми, що враховує положення та напрямки в граничних точках та загальну довжину. У цьому випадку поняття енергії та мета оптимізації стають більш зрозумілими та пов'язані з фіксованою довжиною. У роботі [104] еластика побудована сегментами пружної кривої, які виражаються в замкнутій формі через еліптичні функції. Метод залежить від правильного початкового припущення для апроксимуючої кривої з подальшим застосуванням градієнтної оптимізації.

3. Застосування локальної системи координат для кожного розрахункового елемента. У будівельній механіці цей підхід називають коротаційним [105, 106]. Тут загальна конфігурація балки представлена у вигляді суми двох компонентів: прямолінійного положення елементів і чистого деформаційного зміщення точок. Деформація вимірюється за допомогою обертової системи координат, що зв'язана з прямолінійним елементом, і лінеаризовані формульні рішення використовуються в чисельній інкрементальній процедурі. Нелінійність враховується за допомогою матриці

повороту між елементами. Отже, розривні кути повороту між елементами є ключовими параметрами такої ротаційної схеми. Відмітимо, що геометрично нелінійна балкова модель роботи [1] є розширеним коротаційним підходом, де базова геометрія є частиною кола і вже містить вбудовану деформацію (базове рішення), яке доповнюється згладжувальним рішенням, отриманим шляхом інтегрування лінійної системи постановочних диференціальних рівнянь, записаних в криволінійних (полярних) координатах.

У спільноті комп'ютерної графіки шукані криві зазвичай представляють як безперервні на кожному етапі (ітерації) обчислення. Єдиним відомим нам винятком є метод Фаулера-Вілсона [64], який фактично базувався на звичайних кубічних сплайнах в локальній двовимірній системі координат. По суті, схема Фаулера-Вілсона є переходом від явного представлення сплайна $y = f(x)$, до неявного $g(x, y) = 0$. Він був дуже популярним до початку 21 століття і використовувався в багатьох галузях промисловості в усьому світі [65]. Отже, спочатку сплайн задається набором прямих ділянок, які визначають дотичний вектор і вектор нормалі. Розрахунок (переміщення точок) кожної окремої ділянки проводиться в напрямку по нормалі до перетину, тобто по локальній нормальній координаті. Основна додаткова вимога – це забезпечення безперервності нахилу і кривизни на границях між окремими ділянками. Для цього складаються нелінійні вирази для кутів в глобальній системі координат, які потім ітераційно рішення.

Підводячи підсумок, відмітимо, що задачі нелінійної теорії балок, та теорії сплайнів доповнюють одна одну та мають спільний фундамент – теорію еластичності. Більше того спільнота Механічної інженерії та спільнота Комп'ютерної графіки часто працюють над подібними проблемами і доповнюють одна одну [30]. В цьому плані, особливий інтерес для порівняння має проведення кривих (еластичності, сплайнів, геометрично нелінійної балки), яке визначається двома кінцевими точками з дотичним обмеженням, визначеним у кожній точці. Цей вибір зважливий тому, що: 1) подібні задачі розглядалися в давніх теоретичних дослідженнях еластичності [101,103]; 2)

добротність такої кривої легко оцінити візуально; 3) ця задача є практично важливою для тонкого деформованого дроту, який утримується на кожному кінці роботизованим захватом [109] і для роботизованого різання гарячим лезом [104,110].

1.3 Плоска ГН балка

Мета цього підрозділу полягає в розгляді аналітичних методів для ГН балок, існуючих чисельних підходів рішення геометрично лінійних та нелінійних балок, та, особливо, в дослідженні літератури щодо рішення довгих гнучких систем навантаженими поперечними силами, що мають властивості як канату так і балки.

Почнемо з аналітичних ГН рішень. В підрозділі 1.2 уже згадувалися геометрично нелінійні балки, що досліджувалися як лінії, кривизна яких задовольняє умовам мінімальності енергії. Насправді найбільше аналітичних робіт було присвячено встановленню післякритичного стану балки (навантаженої поздовжньою силою, що перевищує критичну), які досліджувалися з часів піонерської роботи Ейлера в 1744 році. Було вивчено багато моделей, щоб дослідити стійкість моделей балок за різноманітних випадків навантаження. Зосереджуючись на простій моделі балки Бернуллі-Ейлера, існує низка дослідницьких робіт, що стосуються закритичного вигинання балок для кількох випадків навантаження, таких як поперечне навантаження зосередженою силою [111], поздовжнє точкове навантаження консольної балки [112], чи балки з кутовими пружними обмеженнями [113], загальне навантаження системою сил на вільному краї [114].

В роботі [115] досліджується поведінка пружної балки, що защемлена з одного краю і шарнірно закріплена з іншого, в деякій внутрішній точці якої прикладений зосереджений згинальний момент. В ній отримане точне рішення на основі диференціальних рівнянь для еластичності, які формулюються в термінах еліптичних інтегралів Якобі першого і другого родів. Для перевірки результатів теоретичного підходу використовується чисельний метод

стрільби, який чисельно за допомогою методу Рунге-Кутта п'ятого порядку інтегрує ці самі диференційні рівняння. З цією метою береться пробне значення кута на одному з кінців, починаючи від цього кінця послідовно інтегрується задача аж до іншого кінця і перевіряється правильність отриманого граничного значення. По результатам співставлення коректується початкове значення кута.

Ці результати знайшли свої продовження в роботі [116], де довжина балки є змінною і залежить від характеру її деформування. Змінність довжини дуги виникає через те, що один кінець є шарнірно закріплений або защемлений, а інший кінець підтримується роликом без тертя на фіксованій відстані від цього краю. Рішення задачі дається за допомогою техніки еліптичних інтегралів і методу стрільби реалізованого як задача на початкові умови з використанням методу Рунге-Кутта 4 порядку. В роботі відмічаються складності з застосуванням аналітичних підходів, коли на деяких ділянках кривизна змінює свій знак, в таких випадках потрібно перебудовувати розрахункову схему [116]. Проблема знаків в аналітичних рішеннях еластики детально обговорюється в недавній роботі [117]. Вказано, що знак еліптичного інтеграла змінюється зі знаком кривизни вздовж деформованої лінії, а також залежить від параметрів початку координат, таких як еліптичний модульний кут і кривизна. Через невизначеність знаку еліптичного інтегралу досить важко отримати однозначне правильне рішення [117]. Іншим недоліком аналітичних рішень є те, що вони розглядають лише класичну балку Ейлера-Бернуллі, де не враховується ні зсувні деформації, ні деформації розтягу.

Розглянемо деякі аналітичні рішення для плоских балок, які можуть використовуватися як в методах скінчених елементів, так і як певні аналітичні матричні підходи для рішення задач структурної механіки. Принциповим для цих методів є те, що вони розглядають диференційні рівняння теорії балок і для малих переміщень дають аналітичні рішення зв'язку параметрів на початку ділянки з параметрами в довільній точці ділянки (матриця зв'язку), зокрема для останньої:

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ u(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ N(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{16}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{51}(x) & \dots & a_{56}(x) \\ a_{61}(x) & \dots & a_{66}(x) \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ u_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ N_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} + P_t \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} + P_n \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_5(x) \\ c_6(x) \end{pmatrix} \quad (1.2a)$$

Де параметри $w(x)$, $u(x)$, $\theta(x)$, $M(x)$, $N(x)$, $Q(x)$ є відповідно нормальне і дотичне до осі балки переміщення, кут повороту січення, згинальний момент, дотична та нормальна сила. Такі рішення є давно відомими в теорії балок, але наведемо цитування таких робіт, де вони застосовувалися уже як для розгляду системи, тобто такої, що складається з багатьох ділянок. Найпростішим, але все ще таким, що не втратив практичного значення, є підхід, запропонований Кугучі ще в 1975 році [118,119], де криволінійний елемент моделюється як набір прямолінійних ділянок, де окремо розглядаються задачі згину і розтягу стиску, тоді матриця зв'язку приймає такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ Q(x) \\ u(x) \\ N(x) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}(x) & a_{11}(x) & a_{13}(x) & a_{14}(x) & 0 & 0 \\ a_{11}(x) & a_{11}(x) & a_{13}(x) & a_{13}(x) & 0 & 0 \\ a_{13}(x) & a_{13}(x) & a_{13}(x) & a_{34}(x) & 0 & 0 \\ a_{13}(x) & a_{13}(x) & a_{13}(x) & a_{44}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55}(x) & d_{56}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66}(x) & d_{66}(x) \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \\ u_0 \\ N_0 \end{pmatrix} \quad (1.2б)$$

А зміна геометрії враховується на границях ділянки, як матриця повороту на кут ϕ , який утворюються двома сусідніми прямолінійними ділянками, так званою матрицею спряження

$$\begin{pmatrix} w_{0,i+1} \\ u_{0,i+1} \\ \theta_{0,i+1} \\ M_{0,i+1} \\ N_{0,i+1} \\ Q_{0,i+1} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} w_{e,i} \\ u_{e,i} \\ \theta_{e,i} \\ M_{e,i} \\ N_{e,i} \\ Q_{e,i} \end{pmatrix} \quad (1.2в)$$

Конкретні коефіцієнти в матрицях (1.2a) та (1.2б) залежать від прийнятої моделі деформування балки, проте їхня особливість полягає в тому, що при $x = 0$, всі діагональні елементи стають рівними одиниці, а недіагональні дорівнюють нулю. Зауважимо, що підхід Кугучі є по суті першим застосуванням, так званого, коротаційного підходу, що активно застосовується для розрахунку ГН систем [106].

В літературі існують аналітичні рішення для елементів, що мають іншу геометричну форму. Зокрема, загальний підхід до криволінійних плоских елементів запропоновано в роботі [120], де спочатку аналітично визначаються значення сил та моментів, записані в вигляді МПП, а потім коефіцієнти матриці жорсткості даються як зв'язок сил і моментів з переміщеннями та кутами повороту на краях елементу. Отримані замкнуті рішення для елементів, що являють собою елемент циклоїди, канатної лінії, еліпса, ділянки функції синуса. Проте ці рішення даються в квадратурах, вони прив'язані до переміщень в декартових (а не локальних) координат, і тому є незручними для практичного застосування. Подібне рішення для елементу неперервно змінної кривизни отримано в роботі [121], де всі величини отримані в замкнутому вигляді як функції від кутової координати. Рішення для параболічного елементу дається в роботі [122], де спочатку отримуються аналітичні вирази для силових параметрів (дві сили і момент) через їхні початкові значення, а потім шляхом мінімізації функціоналу енергії даються формули зв'язку кінематичних та силових параметрах з врахуванням згинаючих, розтягуючих та зсувних деформацій. Недоліком цих усіх рішень є неврахування розподілених зовнішніх навантажень, тобто відсутність векторів стовпчиків вільних членів в правій частині (2a).

Точні аналітичні розв'язки для статичних задач плоскої кривої балки зі змінними кривизною та змінним перерізом отримано в роботі [123] в вигляді зручному для застосування методу початкових параметрів, тобто в вигляді (1.2a). Постановочні рівняння включають ефекти осьового розтягування та деформації зсуву. В частинному вигляді кругової балки отримані аналітичні коефіцієнти. Визначаються переваги МПП в організації зручного розрахунку всієї системи, що може бути статично невизначеною високого порядку. Ці результати знайшли подальший розвиток і практичне застосування в роботі [124], де показані практичні приклади розрахунку статично невизначених систем довільної початкової форми. Геометрія тіла розбивається не ділянки, в межах кожної з яких кривизна вважається постійною величиною. Показується

ефективність і переваги такого підходу. До недоліків можна віднести наступне. Перше, відсутність аналітичних рішень для розподілених навантажень, які враховуються лише як зосереджені сили, прикладені в вузлах. Друге, відсутність асимптотичного рішення, якщо кривизна ділянки прямує до нуля. В цьому випадку комбінації добутку і різниці великих і малих чисел може привести до комп'ютерних похибок.

Серія наближених аналітичних рішень для кругової балки була запропонована І. Ориняком та ін. в роботах [125-127]. На відміну від рішень, що застосовувалися Туфексі [124] тут даються вирази для коефіцієнтів матриці зв'язку отримані в першому наближенні по геометрично нелінійній схемі. Вважається, що балка майже кругла, і великі поздовжні сили в балці від нормального тиску є майже константою, яка легко визначається по «котельній» формулі. Тоді всі відхилення від цього стану визначаються як для попередньо розтягнутої балки, і постановочні диференціальні рівняння значно відрізняються від звичайних. Рішення приводяться з використанням гіперболічних функцій, що демонструють значне відхилення від поведінки звичайних тригонометричних рішень. Проте недоліком наведених робіт є неврахування змінних по довжині нормальних і дотичних навантажень, тобто рішення виду (1.2а) не містять правої частини. Окрім того, вирази для всіх 6 параметрів задачі містять сингулярні складові коли кривизна прямує до нескінченності (пряма лінія), а відповідні апроксимаційних виразів в цьому випадку відсутні.

Розглянуті вище роботи базувалися на аналітичних рішеннях, навіть якщо вони застосовувалися в МСЕ. Більш класичним підходом до створення розрахункового елементу є вибір апроксимуючих функцій (функцій форми), складання функціоналу енергії, мінімізація його і отримання матриці жорсткості, що зв'язує силові і кінематичні параметри. Через відсутність узгодженості в інтерполяції деформації зсуву та поздовжньої деформації, ранні спроби вивести елементи криволінійної балки були невдалими. Спостерігалася дуже погана збіжність, локінг та осциляції розрахункових

величин.

Бабу та Пратап [128] розробили простий лінійний двовузловий товстий вигнутий балковий елемент, що не враховує зсуву. В роботі [129] сформульований кінцевий елемент, у якому використовуються кубічні поліноми та враховуються ефекти від осьових і зсувних деформацій, що застосовується для арок змінної товщини. Моларі та Убертіні [130] вивели точну матрицю жорсткості та вектор вузлової сили на основі формулювання гнучкості та розробили її на основі принципу віртуальних сил з використанням кубічних функцій. Саффарі та ін. [131] використовували тригонометричні функції для опису функції радіального переміщення криволінійного балкового елемента, щоб уникнути блокування (локінгу) по механізмам зсуву та розтягу. Шляхом мінімізації повної потенціальної енергії були знайдені залежності сила–деформація та матриця жорсткості в локальній системі координат. Чжан та ін. [132] розробили неklasичний балковий елемент Тимошенка на основі теорії градієнта деформації з використанням формулювань слабкої форми для прогнозування механічної поведінки мікро-/нанорозмірних балок. В роботі [133] введена концепцію базисних функцій переміщення. Показано, що точні функції форми виводяться в термінах цих функцій. Точні функції форми і, отже, і матриці жорсткості матриці виводяться для загальних непрямокутних балкових елементів. Ішакуддін та ін. [134] вивчали підходи узгодженості і збіжності рішень для запобігання явищам блокування (локінга) для навантаження кругової балки Тимошенка із її площини.

Очевидно, що більша частина згаданих робіт так чи інакше пов'язані з проблемою блокування (локінга) [135]. Точність результатів, отриманих за допомогою методів скінченних елементів, залежить від базисних функцій, які використовуються для апроксимації полів зміщення. Якщо балка дуже тонка, може виникнути блокування зсуву (shear locking), а отримані числові наближення особливо для тонкостінних елементів можуть бути помилковими. Проблема спричинена використанням однакових функцій інтерполяції для всіх узагальнених полів деформування (розтяг, зсув, згин). Збільшення

порядку інтерполяційних функцій може пом'якшити ефекти блокування в традиційному МСЕ, але повністю воно не усуває явище блокування [136]. Також швидкість збіжності апроксимації не завжди покращується і зі збільшенням кількості проміжних вузлів і часто призводить до хибних флуктуацій зсувних сил [137]. Причиною виникнення блокування зсуву в балкових, пластинчастих та оболонкових елементах є нездатність цих елементів точно задовольняти умові нульових поперечних деформацій, коли товщина елемента прямує до нуля, і при цьому одночасно використовувати мінімально необхідне число степенів вільності для моделювання інших видів деформацій [138]. Зокрема, проблема зсувного локінгу проявляється коли відношення $\alpha = kAGL^2 / EI$ стає дуже великим, де k – коефіцієнт форми поперечного січення і дорівнює для призматичної форми балки $6/5$, L – характерна довжина балки, G та E – модулі зсуву та пружності відповідно, A та I – площа та момент інерції січення.

Для гнучких балок запропоновано ряд можливих способів обійти або принаймні полегшити блокування зсуву – це методи несумісних видів деформування, зменшеної (вибіркової) інтеграції [135]. Проте найбільш популярними в сучасних реалізаціях МСЕ є змішані методи, коли функціонал енергії залежить не тільки від вузлових переміщень, але і деформацій в них [138]. Останнім часом набуває популярності метод абсолютних координат [139], що спочатку був запропонований для рішення ГН деформування балок за допомогою не інкрементальних процедур уточнення.

Тим не менше, точність методів МСЕ перевіряється за допомогою тестових задач, які отримані аналітично [135]. Більше того впровадження аналітичних методів, тобто матриць жорсткості, які отримані на основі точних рішень повністю знімає проблему зсувного чи осьового (мембранного) блокування [124]. Все це свідчить про необхідність застосування точних чи наближених аналітичних виразів, де всі фізичні константи і механізми деформування враховуються в явному вигляді.

Явище локінгу особливо проявляється при ГН деформуванні балки . Причина в тому, що ГН поведінка спостерігається в більшості для довгих балок, і в цьому випадку значення α є дуже великим. Проблема частково нівелюється, якщо застосовувати балку Ейлера-Бернуллі, оскільки в ній взагалі не розглядається деформація зсуву. Тим не менше, може виникати мембранний локінг [124]. Загалом, мембранний локінг означає нездатність вигнутих структурних елементів, наприклад балок або оболонок, представити умову нерозтяжності для нескінченно малих мембранних/ осьових деформацій в порівнянні зі згинальними. У літературі були запропоновані різні методи, щоб уникнути мембранного блокування стержнів Кірхгофа при застосуванні традиційного МСЕ [140], що використовує поліноми для інтерполяції полів між невідомими змінними.

Проте дана проблема проявляється і при застосуванні базисних функцій, що використовуються в системах геометричного проектування, тобто в ізогеометричному варіанті МСЕ [141]. Для уникнення цієї проблеми в роботі [142] деформована геометрія представляється раціональною кубічною кривою Безьє. Для кращого геометричного представлення складних деформованих конфігурацій деякі вагові коефіцієнти розглядаються як дискретні невідомі, що уточнюються в ітераційному процесі.

Тим не менше, незважаючи на досягнутий прогрес в моделюванні геометрично лінійних чи нелінійних задач, досліджувані в вище приведених роботах приклади стосуються лише згинальної поведінки криволінійних балок. Майже недослідженою проблемою є деформування балки при значних розподілених нормальних навантаженнях, коли в ній виникають великі розтягуючі осьові зусилля і в цілому вона демонструє поведінку подібну до канату. Наприклад, підводні підвішені промислові трубопроводи (так звані «flexible riser») через свою високу нелінійність, зазвичай, моделюються як канати, що є значним спрощенням реальної поведінки тіла [143]. З однієї сторони, це значно економить розрахунки, чи навіть робить їх можливими взагалі. Проте з іншого боку, втрачаються краєві ефекти системи в точках

з'єднання канатів з іншими конструктивними елементами, що не дозволяє визначити сили і моменти їх взаємодії. Більше того, поведінка елемента як балки чи як канату залежить від умов закріплення, діючих навантажень, довжин і є наперед непередбачуваною. Власне ця проблема найбільш проявляється для 2D задач, де деформації згину є малими. В 3D постановках, зазвичай, поздовжня сила переходить (пов'язана) з поперечною силою, що призводить до значних згинальних моментів і відповідного деформування

В літературі є зовсім мало подібних робіт. Більшість з них відносяться до динамічного аналізу, в першу чергу, для теоретичного обґрунтування методів визначення сили натягу в реальних канатних системах [144], де вплив локальних статичних зусиль в точках підвісу чи фіксації канату великих підвісних мостів має дуже значний вплив на власні форми і частоти коливань [145]. Що стосується статичного деформування, то визначення локальних зусиль в особливих точках має вирішальне значення для визначення статичної чи циклічної міцності канату [146], і це враховуються в відповідних стандартах, де обмежується максимальна величина кута нахилу в точці закріплення відносно осі канату [147].

Проте в літературі все ще застосовуються спрощені методи аналізу, коли в цілому розрахунок проводиться як для канату, а локальні ефекти наближено моделюються з допомогою асимптотичного «пристосування» балки до конфігурації (положення і кут нахилу) канату [148, 149, 150]. Зрозуміло, що такі методи не є теоретично обґрунтованими, не враховують реальну поведінку краєвих чи особливих зон, і їх застосування вимагає багатьох ітерацій для отримання такого «пристосування». Більше того, якісні критерії необхідності застосування моделі балки чи канату в літературі не сформовані, зокрема в статті [151] дається наступний вираз для їх розмежування:

$$EAL^2 \gg EI \quad (1.2\Gamma)$$

Розглядаючи наприклад круглу тонкостінну трубу, як поперечне січення отримаємо, що $A = 2\pi Rt$, $I = \pi R^3 t$, отримаємо такий критерій розмежування:

$$L^2 \gg R^2 \quad (1.2д)$$

Очевидно, що при $L = 10R$, критерій виконується, але звичайно подібні конструкції мають розглядатися як балки.

Тому, очевидно, необхідно розробляти методи розрахунку ГН довгих двовимірних балок, де проявляються особливості як канату так і балки, а також по можливості застосовувати в моделі аналітичні рішення, які є завжди стійкими по відношенню до проблем блокування (локінгу).

1.4 Трьохвимірна ГН балка.

Просторова балка значно складніша як для формулювання постановочних рівнянь, так і для їх рішення, ніж двовимірна. Перш за все, відмітимо, що хоча загальноприйняті теорії балок Ейлера-Бернуллі та Тимошенка-Рейснера досить успішно застосовуються протягом довгого часу, їх не можна вважати послідовними та узгодженими з загальною теорією пружності [152], щодо виконання всіх фундаментальних залежностей між деформаціями, напруженнями та переміщеннями. Крім того, ці теорії були розроблені в основному для призматичних балок, і їх використання, наприклад, для попередньо скручених балок іноді може призводити до значних похибок навіть для малих деформацій [152]. Тому розділяють «індукційні» (induced) теорії балок, фізичні рівняння яких безпосередньо отримуються методами теорії пружності для стержня заданого січення, і внутрішньо притаманні (intrinsic) теорії, які безпосередньо встановлюються на основі 1D розгляду [153]. Огляд таких теорій наведено в роботі [153], де зокрема відмічено, що для довгих гнучких балок найпростіші теорії здатні кількісно відобразити всі особливості деформування балок. Що стосується індукційних теорій, то прикладом такої може слугувати робота [154], де всі фізичні і деформаційні залежності для балки як одновимірного елементу, отримані на основі розгляду згину труби як тороїдальної оболонки, що навантажена згинальним моментом в площині і із площини та внутрішнім тиском в геометрично нелінійній постановці, з використанням відповідних

диференційних рівнянь. Таким чином отримані всі 12 диференційних рівнянь деформування просторової балки. Таким чином, отримані залежності між балковими параметрами уже мають на увазі, що згин труби деформується як оболонка.

Аналітичні методи прогнозування геометрично нелінійної поведінки для просторових балок майже не застосовуються. Теоретичні рішення, зазвичай, обмежуються отриманням гвинтової лінії з початкової прямої чи кругової гнучкої консольної балки за допомогою зосередженої сили та моменту, що прикладені до її вільного кінця. Ця, так звана, задача Кірхгофа була приведена в фундаментальній монографії Лава [155] для ізотропного січення балки. Зручні для використання формули, що пов'язують направлені вздовж центральної осі хелікса глобальний згинальний момент та глобальну силу для балки кругового січення, та геометричними характеристиками (скрут і кривизна) хелікса були приведені в роботі [156]. Інші рішення щодо утворення хелікса із початково прямої балки з різними фізичними і геометричними характеристиками поперечного січення приведені в монографії [157].

Розглянемо деякі роботи по геометрично лінійному аналізі просторових балок. Однієї з перших була робота [158], де розглядався круговий елемент балки з круговим січенням. Всі сили і моменти в довільній точці даються відносно умовної початкової точки. Розглядаються два види деформування – в площині, для якого уже були отримані рішення раніше, і із площини, для якої всі елементи матриці жорсткості отримані із енергетичного рівняння, складеного відповідно до теореми Кастильяно. Узагальненням цього методу є робота [159] де теорема Кастильяно застосовується з врахуванням зсувних деформацій і деформацій розтягу, що робить її застосовною до аналізу товстостінних початково круглих стержнів.

Балка, як хеліксний елемент розглядається в роботі [160]. Записуються всі чотири векторних диференційних рівнянь (12 скалярних) в хеліксних координатах. Формулюється потенціал енергії для всіх основних видів

деформації. Його мінімізація дає залежності між силовими і кінематичними параметрами. Окрім цього в роботі розглядається переміщення і повороти тіла як цілого через три власні функції однорідного диференційного рівняння, що дає змогу виразити точно виразити параметри на кінці елемента з таким на початку. Хеліксні координати застосовуються в роботі [161], де розглядається стержень, що неперервно чи дискретно підтримується пружними опорами. Тут отримана матриця жорсткості на основі розгляду загального диференційного рівняння 12 порядку. Це рівняння рішається чисельно за допомогою методу початкових параметрів, і так отримуються коефіцієнти матриці з довільною наперед заданою точністю. В статті [162] формулюється кінцевий елемент для статичної поведінки просторової балки зі змінними характеристиками січення і матеріалу, який дає отримати матрицю жорсткості з необхідною точністю. Це досягається шляхом представлення всіх вхідних геометричних і силових характеристик як поліномів, та вибираючи потрібну кількість членів в поліноміальному представленні всіх шести кінематичних параметрів (три скалярні компоненти кутів і три переміщення). Подібна техніка використовується в роботі [163] для отримання скінченного хеліксного елемента. Функціонал енергії записується і мінімізується в припущенні, що переміщення в нормальному і бінормальному напрямках до осі елемента можуть бути представлені в вигляді поліномів 5-го порядку.

В серії робіт Джімена з колегами також розглядаються просторові елементи [164,165], які моделюються як елементи зі змінною від довжини елемента локальною кривизною та скрутом. Рішення будуються на основі розгляду всіх 12 диференційних рівнянь, і даються як певні наближення. Відмінністю даної роботи від інших є те, що січення не обов'язково розглядається як таке, що має дві осі симетрії. Постановочні рівняння враховують і зсувні і осьові деформації, а фізичні рівняння записуються в абсолютних координатах. Враховується, що вектори кутового деформування і нормальних моментів для прямокутного січення не є між собою колінеарними, що враховується в постановочних рівняннях. Рішення дається в вигляді

придатному до застосування МПП, коефіцієнти матриці якої, втім знаходяться приблизно, як чисельні рішення відповідних диференціальних рівнянь.

Переважає більшість розглянутих робіт розглядає МПП (transfer matrix method) як найбільш ефективну техніку складання розрахункової схеми для складних систем. Особливого поширення і популярності МПП здобув для статичних, вібраційних та динамічних розрахунків трубопровідних систем [166]. Він був вперше запропонований академіком Криловим, як зручний метод рішення задачі для коливання балки на пружній основі [167], і відповідні функції, що мають специфічні властивості щодо значень її та її похідних в початковій точці, називаються функціями Крилова. В західній літературі метод появився незалежно, починаючи з 50-х років минулого століття, і відомий як метод передаточних функцій [168]. Проте до цього часу під впливом радянської літератури в роботах китайських, іранських та ін. учених цей метод часто називається в англійській літературі як *method of initial parameters*, а ще деколи, як *initial values method*. Заслугою Леккі і Пестеля [168] є те, що вони описали техніку застосування методу для складних систем, в тому числі для об'єднання різних елементів, коли відповідні матриці просто перемножуються. Також вони продемонстрували як нумеруються невідомі і як складаються рівняння в загальній схемі. Техніка МПП може слугувати і для правильного запису граничних умов (визначення знаків), а також для формування рівнянь в точках розгалуження системи [169].

Для аналізу механічних вібрацій, зокрема для аналізу явищ взаємодії рідини і твердого тіла, МПП був вперше введений Чаудрі [170], який дав визначення, що таке матриця переходу. Це матриця, яка зв'язує два вектори стану, і надає три типи їх. Перший тип – це рівняння фізичного рішення диференціальних рівнянь, фізична матриця, (*field matrix*) і дають зв'язок між двома граничними точками ділянки. Такі рівняння є основними і часто достатніми для рішення задач простої геометрії. Другий тип – це рівняння в точках спряження, матриця спряження, (*point matrix*) між двома сусідніми елементами, між якими є опори, зосереджені сили, маси, зміна форми, тощо.

Також вводиться поняття загальної матриці (overall transfer matrix), яка утворюється перемноженням сусідніх. Проте в розгалужених системах це не працює так лінійно. Тим не менше МПП ефективно застосовується в одновимірних задачах в різних галузях науки. Єдина вимога його застосування – це наявність точних чи наближених рішень диференціальних постановочних рівнянь. Прикладом подібної реалізації може слугувати робота [171], де розглядувані елементи каркасних конструкцій довільного замкнутого перерізу є прямими ділянками, для яких існують прості рішення для фізичної матриці, а складна просторова постановка задачі забезпечується за допомогою матриць спряження, тут вони виступають як матриці повороту.

Розрахунок геометрично нелінійних просторових балок є надзвичайно актуальною темою останніх десятиліть [172, 173] з десятками публікацій в топових міжнародних журналах щорічно. До цього часу були розроблені різні методи для нелінійного аналізу структур, такі як повна Лагранжева постановка (total Lagrangian formulation, TL), уточнююча Лагранжева постановка (updated Lagrangian formulation, UL) і коротаційна постановка (CR) [174].

У TL постановці усі геометричні і силові величини вимірюються відносно початкової конфігурації. Звичайно, це може приводити до досить складних виразів для деформацій відносно досягнутих переміщень, і складністю відокремлення малих величин від великих (початкові положення і деформаційні переміщення розглядаються разом), що також може приводити до обчислювальних похибок. Іншим недоліком TL постановки є те, що звичайно, максимальний кут повороту обмежується величиною 2π . Цей підхід є надзвичайно популярним в літературі [175]. Іншими варіантами TL постановки є метод абсолютних вузлових координат, де в якості степеней вільності вибираються положення і нахили вузлових точок [176]. Іншим напрямком розвитку цього підходу є ізогеометричні методи, які оперують відомими варіантами сплайнів (B-, T-, раціональними сплайнами, тощо) [177]. Проте подібні підходи, як і взагалі підходи МСЕ страждають від проблеми осьового чи зсувного локінгу.

І навпаки, у постановці UL усі величини відносяться до останньої відомої конфігурації. Це з однієї сторони спрощує отримання коефіцієнтів матриці жорсткості, які можуть представлятися в першому лінійному наближенні, а з іншої, це призводить до накопичення похибок на кожному кроці ітерацій, і взагалі, отримані рішення залежать від шляху і способу ітераційної процедури, крок якої повинен бути завжди дуже малим [178].

Постановка CR є найновішою і найменш розробленою із трьох. У цьому підході переміщення та повороти можуть бути як завгодно великими, але деформації мають бути малими [179]. Основна ідея коротаційної постановки полягає в розкладанні переміщення елемента на твердотільну і чисто деформаційну складові. Для цього використовуються як глобальна (для твердотільної), так і локальна системи координат елементів [180]. Деформаційні переміщення вимірюються в локальній системі координат. Оскільки деформації малі в локальній системі координат, можна використовувати лінійну кінцево-елементну постановку в локальній системі координат. Використовуючи матрицю перетворення, вектор локальної сили в вузлі та матриця лінійної жорсткості пов'язані з відповідними глобальними величинами. Це значно спрощує постановочні рівняння для деформацій, але при цьому не втрачається зв'язок з глобальними координатами, тому похибки на кожному кроці ітерацій не є накопичувальними. Яскравим прикладом застосування коротаційного підходу до аналізу ГН балок є робота Розена [172]. Вісь початково скривленої і закрученої балки в недеформованому стані замінюється набором прямолінійних елементів, а початкові кривизна і скрут – матрицями повороту. На кожному кроці процедури уточнень для довільного січення балки встановлюється фізичний зв'язок між кривизнами (друга похідна від переміщень) і згинальними моментами в глобальних координатах. Останні представляються як поліноми першого порядку. Інтегруючи рівняння для переміщень отримуються фізична матриця переходу МПП. Основна складність методу – це отримання і уточнення матриці кутів повороту на границі між елементами, яка фактично і є основним елементом рішення, що

враховує геометричну нелінійність.

Таким чином, серед основних і найбільш ефективних методів аналізу ГН трьохвимірних балок є коротаційні підходи, в яких вся геометрична нелінійність враховується за допомогою матриць повороту. При цьому розрахункова схема легко будується, якщо рішення представляється як точне чи наближене рішення постановочних рівнянь теорії балок.

1.5. Постановка задачі досліджень

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є створення новітньої методології, алгоритмів і програм розрахунку просторових геометрично нелінійних одновимірних систем на основі базового розривного, БР, і згладжувального, ЗР, рішень, де базове рішення є круговою чи хеліксною геометрією з відповідно «вбудованою» системою базових сил, що максимально враховує геометричну нелінійність задачі та задає криволінійну систему координат для отримання аналітичного ЗР; а ЗР, в свою чергу, коректує БР за допомогою спеціальної ітераційної процедури уточнень.

Для досягнення вказаної мети у даній дисертаційній роботі вирішуються такі задачі:

- Демонстрація переваг коротаційного (що оперують рішеннями в локальній системі координат) підходу в порівнянні з методом стрільби на простому прикладі навантаження канату системою зосереджених сил.

- Створення загальної методології рішення як суми БР та ЗР для аналізу ГН задач, що на відміну від традиційних коротаційних підходів розглядає БР як уже деформовану геометрію, що є основною частиною повного рішення.

- Отримання нового точного ЗР для ділянки канату, базова геометрія якого є дугою кола, що майже точно враховує діюче нормальне навантаження, та довжина якого враховує уже досягнуту осьову силу (видовження).

- Отримання точних аналітичних лінійних ЗР для кругової попередньо стиснутої, розтягнутої чи ненавантаженої балки з врахуванням постійних нормального і дотичного навантаження.

- Апроксимація отриманих аналітичних ЗР для ділянок балки, кут дуги яких прямує до нуля, демонстрація їх неперервності при довільному знаку «вбитої в рішення» осьової сили.

- Для спрощення розрахунків з можливістю врахування краєвих ефектів в зонах закріплень чи контактів, створення ефективної методології розгляду розтягнутої балки як комбінації балкових і канатних елементів.

-Отримання аналітичного БР для трьохвимірної балки як елемента хелікса, що враховує довільну поперечну форму балки, та застосування її для розрахунку просторових ГН балок.

Об'єктом дослідження є система довгих гнучких тіл.

Предметом дослідження є напружений стан і переміщення при ГН деформуванні довгих гнучких тіл.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РІШЕННЯ КАНАТНИХ СИСТЕМ

2.1. Канат під дією зосереджених сил.

Тут розглядається канат під дією значних зосереджених сил, що діють в одній площині, а вагою каната (розподіленими силами) можна знехтувати. Тоді канат прийме форму послідовних прямих ділянок, які в точках дії сил межують один з одним під якимись кутами [3]. Запишемо рівняння рівноваги сил в цих точках в векторній формі:

$$\overrightarrow{T_{e,i}} = \overrightarrow{T_{b,i+1}} + \overrightarrow{F^{i,i+1}} \quad (2.1a)$$

Тут $\overrightarrow{T_{e,i}}$ і $\overrightarrow{T_{b,i+1}}$ це векторні сили, направлені дотичній, що виникають в канаті, а індекс i позначає номер ділянки, а нижні індекси “e” та “b” характеризують кінець та початок ділянки відповідно, прикладена зовнішня сила $\overrightarrow{F^{i,i+1}}$ діє на межі між двома ділянками. Окрім сил рівноваги для канату потрібно розглянути і фізичні рівняння, що пов’язують приріст довжини канату з модулем внутрішньої сили та жорсткістю Другий набір рівнянь – це рівняння стану, які визначають залежність кінцевої довжини канату, ds_i , від величини розтягуючої осьової сили та жорсткості січення канату k_i :

$$ds_i = (1 + |\overrightarrow{T_i}|/k_i)dl_i \quad (2.1б)$$

Тут dl_i є початковою довжиною ділянки канату, i .

Для рішення конкретних задач деформування канатів ці два набори рівнянь треба доповнити граничними умовами. Розглянута постановка є досить простою, для якої існує обмежена можливість вибору методів рішення, які можна звести на дві групи – метод стрільби, як найбільш популярний для таких задач, і методи, що розбивають канат на кінцеві ділянки і вводять відповідні невідомі в кожному вузлі. Розглянемо ці дві групи.

2.1.1 Метод абсолютних координат

Нехай канат має початкову довжину L_0 , і знаходиться під дією n

зосереджених сил. Розіб'ємо всю довжину канату на $n + 2$ точки, які пронумеровані як $i = 0, 1, 2 \dots n + 1$, де 0 та $n + 1$ є крайніми (граничними) точками зліва і справа, відповідно. Відстань цих точок від точки «0» позначимо через $l_1, l_2, \dots l_i, \dots l_{n+1}$ (див. Мал. 2.1). Звідси $l_{n+1} = L_0$. Введемо поняття i -тої ділянки, що лежить між точками $i - 1$ та i , яку позначимо як $s_{0,i} = l_{i+1} - l_i$, яка є початковою недеформованою довжиною.

Напишемо граничні умови для канату. Вважаємо, що ліва границя зафіксована в точці $B(0,0)$, а права – в точці $E(X_e, Y_e)$, (Мал 2.1). Для зручності визначення початкової геометрії з'єднаємо точки B та E прямою лінією, що утворює вектор $\overrightarrow{EB} = \vec{E} - \vec{B}$ довжиною $|\overrightarrow{EB}| = L$, тоді:

$$\overrightarrow{EB} = (\vec{i} \sin \beta_0 + \vec{j} \cos \beta_0) L = \vec{v} L = (\vec{i} X_L + \vec{j} Y_L) \quad (2.2a)$$

тут β_0 характеризує кут нахилу початкової лінії канату до осі x .

Керуючими параметрами для даної задачі є наступні чотири параметри. Ними є: сила натягу T , кут дотичної до канату до горизонтальної осі α , а також вертикальна δ та горизонтальна, t , координати. Для спрощення візьмемо їх відносно вектора початкового положення \overrightarrow{EB} . Таким чином початкові положення векторно визначені як:

$$\vec{g}_1 = \frac{l_1 \vec{v} L}{L_0} = (\vec{i} X_1 + \vec{j} Y_1), \dots \vec{g}_i = \frac{l_i \vec{v} L}{L_0} = (\vec{i} X_i + \vec{j} Y_i), \dots \vec{g}_{n+1} = \vec{v} L \quad (2.2б)$$

Також, значення вертикального v_i і горизонтального u_i переміщень будемо визначати відносно положень заданих в формулах (2.2б). Для кожного (i -го) відрізка також позначимо силу T_i і кут нахилу ділянки α_i .

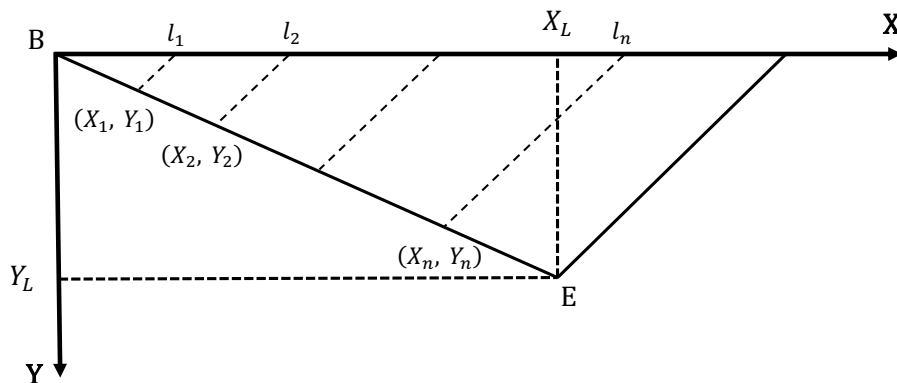


Рис 2.1. Модель каната. Початкова довжина і положення.

Напишемо рівняння рівноваги в горизонтальному та вертикальному напрямках для кожної точки ділянки:

$$T_i \sin \alpha_i - T_{i+1} \sin \alpha_{i+1} = F_i \quad (2.3a)$$

$$T_i \cos \alpha_i - T_{i+1} \cos \alpha_{i+1} = Q_i \quad (2.3б)$$

Перейдемо до лінеаризації постановочних рівнянь. Введем поняття відомого з попередньої ітерації, j , базового рішення. Воно характеризується переміщеннями u^j та v^j , відносно початкового положення (2.2б), а також базовою довжиною ділянки s_i^j . Остання знаходиться так (Мал 2.2):

$$s_i^j = \sqrt{(x_i^j - x_{i-1}^j)^2 + (y_i^j - y_{i-1}^j)^2} \quad (2.3в)$$

Тут горизонтальні, x_i^j та вертикальні, y_i^j , базові положення також відраховуються від початкового положення (2.2б):

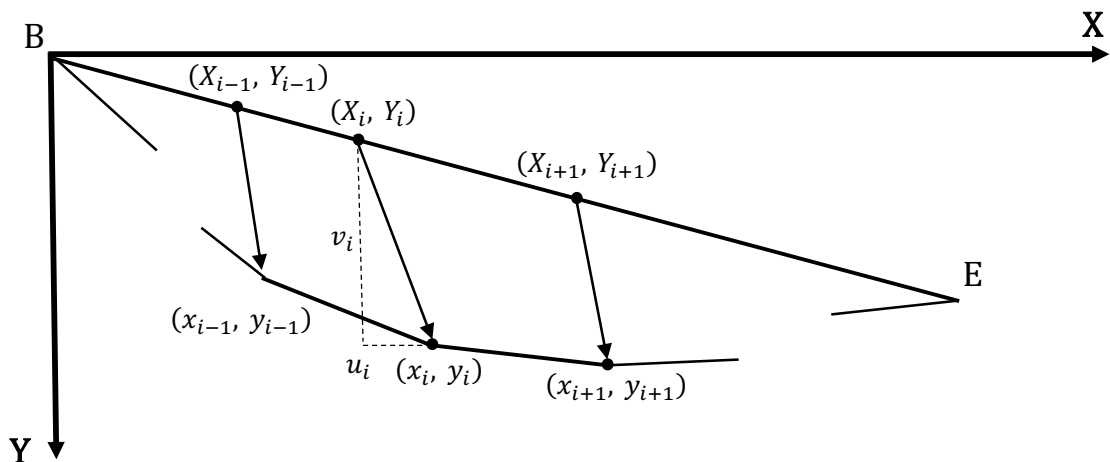
$$x_i^j = X_i + u_i^j; \quad y_i^j = Y_i + v_i^j \quad (2.3г)$$

Де u_i^j та v_i^j базові переміщення. Ідея методу полягає в тому, щоб шукати переміщення точок на наступній ітерації в такому вигляді:

$$v^{j+1} = v^j + \varepsilon^{j+1} \quad (2.4a)$$

$$u^{j+1} = u^j + \gamma^{j+1} \quad (2.4б)$$

Тут ε^{j+1} і γ^{j+1} це поправочні рішення для переміщень в відповідних напрямках. Надалі розуміється, що вони є набагато меншими за базові.



Мал 2.2. Розрахункові положення точок прикладення сили

Даний процес повторюваний, тому верхні індекси утримувати непотрібно. Тому надалі геометричні базові характеристики будемо записувати лише як s_i, x_i, y_i, u_i, v_i . Аналогічно поправочні рішення ε_i^{j+1} та γ_i^{j+1} надалі записуються як ε_i і γ_i . Таким чином, маємо такий вираз для довжини елемента:

$$s_i^U = \sqrt{(x_i - x_{i-1} + \gamma_i - \gamma_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1} + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2} \quad (2.5a)$$

Маючи довжини елементів і їх проекції на глобальні осі, запишемо вирази для кутів нахилу:

$$\sin \alpha_i = \frac{y_i - y_{i-1} + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1} + \gamma_i - \gamma_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1} + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}} = \frac{y_i + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}}{s_i^U} \quad (2.5б)$$

$$\cos \alpha_i = \frac{x_i - x_{i-1} + \gamma_i - \gamma_{i-1}}{s_i^U} \quad (2.5в)$$

Величина поздовжньої сили знаходиться з фізичного рівняння (2.1б):

$$T_i = k_i \frac{s_i^U - l_i}{l_i} \quad (2.5г)$$

Тоді рівняння для рівноваги сил (2.3а) та (2.3б) стають такими:

$$k_i \frac{s_i^U - l_i}{l_i} \frac{y_i - y_{i-1} + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}}{s_i^U} - k_{i+1} \frac{s_{i+1}^U - l_{i+1}}{l_{i+1}} \frac{y_{i+1} - y_i + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{s_{i+1}^U} = F_i \quad (2.5д)$$

$$k_i \frac{s_i^U - l_i}{l_i} \frac{x_i - x_{i-1} + \gamma_i - \gamma_{i-1}}{s_i^U} - k_{i+1} \frac{s_{i+1}^U - l_{i+1}}{l_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x_i + \gamma_{i+1} - \gamma_i}{s_{i+1}^U} = Q_i \quad (2.5е)$$

Ці рівняння є основними рівняннями аналізу. Перейдемо до розв'язку. Для кожної з n точок потрібні два набори невідомих – по одному для ε і γ .

Припустимо, що жорсткість усіх елементів є однаковою, іншими словами $k_i \equiv k$. Для розв'язку задачі проведемо лінеаризацію рівнянь (2.5д) та (2.5е). Оскільки ε і γ вважаються малими, то вони враховуються лише в першій степені. Для результуючої довжини s_i^U із рівняння (2.5а) отримаємо:

$$s_i^U \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + 2(x_i - x_{i-1})(\gamma_i - \gamma_{i-1}) + (y_i - y_{i-1})^2 + 2(y_i - y_{i-1})(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})} \quad (2.6a)$$

Згідно виразу (2.3г) для базової довжини, перепишем його так:

$$s_i^U = s_i + (\gamma_i - \gamma_{i-1}) \frac{(x_i - x_{i-1})}{s_i} + (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \frac{(y_i - y_{i-1})}{s_i} \quad (2.6б)$$

З (2.6б) слідує, що:

$$\frac{1}{s_i^U} = \frac{(s_i)^2 - (\gamma_i - \gamma_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})(y_i - y_{i-1})}{(s_i)^3} \quad (2.6\text{в})$$

Перейдемо до лінеаризації рівняння рівноваги (2.5д) відносно поправочних параметрів. Нехтуючи малими другого порядку і вище:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{i-1}Z_{2,i}^j + \varepsilon_i(Z_{2,i}^j - Z_{3,i}^j) + \varepsilon_{i+1}Z_{3,i}^j - \gamma_{i-1}Z_{4,i}^j + \gamma_i(Z_{4,i}^j - Z_{5,i}^j) + \\ + \gamma_{i+1}Z_{5,i}^j = Z_{1,i}^j \end{aligned} \quad (2.7\text{а})$$

де:

$$Z_{1,i}^j = \left(\frac{1}{l_i} - \frac{1}{s_i}\right)(y_i - y_{i-1}) - \left(\frac{1}{l_{i+1}} - \frac{1}{s_{i+1}}\right)(y_{i+1} - y_i) - F_i/k_i \quad (2.7\text{б})$$

$$Z_{2,i}^j = -\left(\frac{1}{l_i} - \frac{1}{s_i} + \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{(s_i)^3}\right) \quad (2.7\text{в})$$

$$Z_{3,i}^j = \left(\frac{1}{l_{i+1}} - \frac{1}{s_{i+1}} + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{(s_{i+1})^3}\right) = -Z_{2,i+1}^j \quad (2.7\text{г})$$

$$Z_{4,i}^j = -\frac{(y_i - y_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{(s_i)^3} \quad (2.7\text{д})$$

$$Z_{5,i}^j = \frac{(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i)}{(s_{i+1})^3} = -Z_{4,i+1}^j \quad (2.7\text{е})$$

Вираз (2.7а) визначає n рівнянь щодо шуканих поправочних величин ε_i, γ_i .

Розглядаючи рівновагу горизонтальних сил (2.5е), подібно отримуємо набір n рівнянь відносно невідомих ε_i, γ_i вигляду:

$$\begin{aligned} W_{1,i}^j = -\varepsilon_{i-1}W_{4,i}^j + \varepsilon_i(W_{4,i}^j - W_{5,i}^j) + \varepsilon_{i+1}W_{5,i}^j - \gamma_{i-1}W_{2,i}^j + \gamma_i(W_{2,i}^j - W_{3,i}^j) + \\ + \gamma_{i+1}W_{3,i}^j \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тут для компактності запису вводяться наступні позначення:

$$W_{1,i}^j = \left(\frac{1}{l_i} - \frac{1}{s_i}\right)(x_i - x_{i-1}) - \left(\frac{1}{l_{i+1}} - \frac{1}{s_{i+1}}\right)(x_{i+1} - x_i) - Q_i \quad (2.9\text{а})$$

$$W_{2,i}^j = -\left(\left(\frac{1}{l_i} - \frac{1}{s_i}\right) + \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(s_i)^3}\right) \quad (2.9\text{б})$$

$$W_{3,i}^j = \left(\left(\frac{1}{l_{i+1}} - \frac{1}{s_{i+1}}\right) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{(s_{i+1})^3}\right) = -W_{2,i+1}^j \quad (2.9\text{в})$$

$$W_{4,i}^j = -\frac{(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})}{(s_i)^3} \quad (2.9\text{г})$$

$$W_{5,i}^j = \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)}{(s_{i+1})^3} = -W_{4,i+1}^j \quad (2.9\text{д})$$

В рівняннях (2.7а) та (2.8) пронумеруємо невідомі як $X_{2i-1} = \varepsilon_i$ і $X_{2i} = \gamma_i$. Звідси отримуємо X_m невідомих, де $1 \leq m \leq 2n$. Для формування матриці рівнянь почергово для кожного значення i спочатку для (2.7а), а потім для (2.8) отримуємо матричні коефіцієнти і вільні члени. Таким чином вказана система рівнянь зводиться до рішення діагональної матриці. Наприклад, якщо взяти кількість сил $n = 4$, то отримаємо матрицю приведена на Рис 2.3, де знак «+» вказує на ненульові члени

$$\begin{pmatrix} + & + & + & + & & & & \\ + & + & + & + & & & & \\ + & + & + & + & + & + & & \\ + & + & + & + & + & + & & \\ & & + & + & + & + & + & + \\ & & + & + & + & + & + & + \\ & & & & + & + & + & + \\ & & & & + & + & + & + \end{pmatrix}$$

Рис 2.3. Результуюча матриця. Схема при $n = 4$

Відмітимо важливу особливість процедури уточнення базових величин x_i^{j+1} and y_i^{j+1} після проведення $j + 1$ ітерації. Поправочне рішення є наближеним в першому порядку. При уточненні базового рішення необхідно враховувати цю його якісну особливість. Тому воно повинно враховуватися лише частково, тобто:

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \mu \gamma_i \quad (2.10a)$$

$$y_i^{j+1} = y_i^{j+1} + \mu \varepsilon_i \quad (2.10b)$$

Де коефіцієнт $0 < \mu < 1$, його обґрунтування і реалізація будуть обговорюватися в пункті 2.2.3.

2.1.2 Метод стрільби

Фактично метод стрільби був реалізований в класичній роботі Ірвіна [31]. Ми тут будемо використовувати трохи інші позначення, ніж вище. Тут l_i

позначає довжину елемента (відрізка), всього $i + 1$ елементів. В кожній точці елемента розглядається чотири параметра: два параметра положення та два параметра сили, якими характеризується векторна сила (тобто її модуль та кут напрямку). Кожен елемент характеризується 2 точками (початок і кінець), тому елемент описується 8 параметрами.

Оскільки ділянки між точками сил є прямолінійними, у нас є такі 4 рівняння, що пов'язують ці 8 параметрів:

$$X_{i,e} = X_{i,b} + s_i(T_{i,b}) \cdot \cos\alpha_{i,b} \quad (2.11a)$$

$$Y_{i,e} = Y_{i,b} + s_i(T_{i,b}) \cdot \sin\alpha_{i,b} \quad (2.11б)$$

$$\alpha_{i,e} = \alpha_{i,b} \quad (2.11в)$$

$$T_{i,e} = T_{i,b} \quad (2.11г)$$

Де $X_{i,b}$, $Y_{i,b}$ координати точки, кут нахилу $\alpha_{i,b}$ та осьова сила $T_{i,b}$ як параметри початку i ділянки; 4 параметри кінця елемента. Тут $X_{i,e}$, $Y_{i,e}$ координати точки, $s_i(T_{i,b})$ – це zdeформована довжина:

$$s_i = (1 + T_{i,b}/k_i)l_i \quad (2.11д)$$

Рівняння спряження дають залежності між параметрами в точці кінця попереднього і точці початку наступного елемента. Оскільки вони співпадають, то:

$$X_{i+1,b} = X_{i,e} \quad (2.12a)$$

$$Y_{i+1,b} = Y_{i,e} \quad (2.12б)$$

Інші два рівняння спряження записуються як рівняння рівноваги на границі між елементами i та $i + 1$ елементами. Маємо:

$$T_{i,e}\sin\alpha_{i,e} - F_{i,i+1} = T_{i+1,b}\sin\alpha_{i+1,b} \quad (2.12в)$$

$$T_{i,e}\cos\alpha_{i,e} - Q_{i,i+1} = T_{i+1,b}\cos\alpha_{i+1,b} \quad (2.12г)$$

Запишемо суму квадратів виразів (2.12в) та (2.12г):

$$T_{i+1,b} = \sqrt{(T_{i,e})^2 - 2T_{i,e} \cdot F_{i,i+1}\sin\alpha_{i,e} - 2T_{i,e} \cdot Q_{i,i+1}\cos\alpha_{i,e} + (F_{i,i+1})^2 + (Q_{i,i+1})^2} \quad (2.13a)$$

Маємо:

$$\cos\alpha_{i+1,b} = \frac{T_{i,e}\cos\alpha_{i,e} - Q_{i,i+1}}{T_{i+1,b}} \quad \text{та} \quad \sin\alpha_{i+1,b} = \frac{T_{i,e}\sin\alpha_{i,e} - F_{i,i+1}}{T_{i+1,b}} \quad (2.136)$$

Очевидно, що мають задовольнятися умови: $-1 \leq \cos\alpha_{i+1,b}; \sin\alpha_{i+1,b} \leq 1$.

Метод стрільби полягає в тому, щоб послідовно по відомих попереднім значенням знаходити наступні. Так наявність чотирьох параметрів на початку елемента дозволяє по рівнянням зв'язку знайти такі параметри в кінці елемента. В свою чергу, рівняння спряження дозволяють перейти від відомого стану в кінці попередньої ділянки до початку наступної і так далі. Тому правильно визначені 4 параметри на самому початку канату забезпечують правильність визначення параметрів всюди, в тому числі в кінці. Тому проблема полягає в тому, щоб обґрунтовано уточнювати ці 4 перші параметри на кожному кроці ітераційного процесу, в випадку коли граничні умови в кінці останнього елемента не виконуються.

Нехай є якесь наближене базове рішення для всіх параметрів на j ітерації. Вважаємо нульовими горизонтальні та вертикальні переміщення на початку першої точки, тобто такими є граничні умови, які автоматично виконуються на кожному кроці ітерацій. Проте, в загальному, значення положення останньої точки системи $X_{n+1,b}^j, Y_{n+1,e}^j$ відрізняється необхідних величин, що даються граничними умовами, тобто, X_L та Y_L . Тому потрібно уточнювати два інші параметри (сила і кут нахилу) в першій точці.

Для застосування МС необхідно лінеаризувати визначальні рівняння. Розглянемо певний елемент, i , і вважаємо, що в ньому поправочні рішення незначно змінилися на: $\Delta X_{i,e}, \Delta Y_{i,e}, \Delta\theta_{i,e}, \Delta T_{i,e}$. Отримаємо лінеаризовані рівняння зв'язку для зміни цих параметрів в кінці елемента. Спочатку врахуємо зміну довжина елемента, тобто відповідно до (2.11д):

$$\Delta s_i = (\Delta T_{i,e}/k_i)l_i \quad (2.14a)$$

Тоді з рівнянь (2.11а-д) отримаємо лінеаризовані рівняння зв'язку для поправочних значень:

$$\Delta X_{i,e} = \Delta X_{i,b} + (\Delta T_{i,e}/k_i) \cdot \cos\alpha_{i,b} - \Delta\alpha_{i,b} \cdot s_i(T_{i,b}) \cdot \sin\alpha_{i,b} \quad (2.14б)$$

$$\Delta Y_{i,e} = \Delta Y_{i,b} + (\Delta T_{i,e}/k_i) \cdot \sin \alpha_{i,b} + \Delta \alpha_{i,b} \cdot s_i(T_{i,b}) \cdot \cos \alpha_{i,b} \quad (2.14\text{в})$$

$$\Delta \alpha_{i,e} = \Delta \alpha_{i,b} \quad (2.14\text{г})$$

$$\Delta T_{i,e} = \Delta T_{i,b} \quad (2.14\text{д})$$

Тобто в матричній формі запишемо їх так:

$$\overrightarrow{\Delta W_{i,e}} = [A_i] \overrightarrow{\Delta W_{i,b}} \quad (2.14\text{е})$$

де $\overrightarrow{\Delta W_i} = \text{column}(\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta \theta_i, \Delta N_i)$.

Наступним етапом рішення є отримання лінеаризованих рівнянь спряження для поправочних величин положень, вони слідуєть з (2.12):

$$\Delta X_{i+1,b} = \Delta X_{i,e} \quad (2.15\text{а})$$

$$\Delta Y_{i+1,b} = \Delta Y_{i,e} \quad (2.15\text{б})$$

Лінеаризовані рівняння для силових параметрів отримуються з рівнянь (2.13). Оскільки повне рішення – це сума поправочного та базового рішення, то після проведених спрощень та нехтуванням малих величин:

$$\Delta T_{i+1,b} = \Delta T_{i,e} Y_1 + \Delta \alpha_{i,e} Y_2 \quad (2.16\text{а})$$

Де:

$$Y_1 = (T_{i,e} - (F_{i,i+1} \sin \alpha_{i,e} + Q_{i,i+1} \cos \alpha_{i,e})) / T_{i+1,b} \quad (2.16\text{б})$$

$$Y_2 = -T_{i,e} (F_{i,i+1} \cos \alpha_{i,e} - Q_{i,i+1} \sin \alpha_{i,e}) / T_{i+1,b} \quad (2.16\text{в})$$

Рівняння спряження для кута отримується із виразу для тангенса кута, що утворений із (2.13б). Розклавши його в ряд Тейлора та знехтувавши членами другого порядку, маємо:

$$\text{tg}(\alpha_{i+1,b} + \Delta \alpha_{i+1,b}) = \frac{T_{i,e} \sin \alpha_{i,e} - F_{i,i+1} + \Delta T_{i,e} \sin \alpha_{i,e} + \Delta \alpha_{i,e} T_{i,e} \cos \alpha_{i,e}}{T_{i,e} \cos \alpha_{i,e} - Q_{i,i+1} + \Delta T_{i,e} \cos \alpha_{i,e} - \Delta \alpha_{i,e} T_{i,e} \sin \alpha_{i,e}} \quad (2.17\text{а})$$

Звідки має рівняння спряження для кутів:

$$\Delta \alpha_{i+1,b} = \Delta T_{i,e} Y_3 + \Delta \alpha_{i,e} \cdot Y_4 \quad (2.17\text{б})$$

Де:

$$Y_3 = \cos^2 \alpha_{i+1,b} \frac{-\cos \alpha_{i,e} \text{tg} \alpha_{i+1,b} + \sin \alpha_{i,e}}{T_{i,e} \cos \alpha_{i,e} - Q_{i,i+1}} \quad (2.17\text{в})$$

$$Y_4 = \cos^2 \alpha_{i+1,b} \frac{\sin \alpha_{i,e} \text{tg} \alpha_{i+1,b} + \cos \alpha_{i,e}}{\cos \alpha_{i,e} - Q_{i,i+1}/T_{i,e}} \quad (2.17\text{г})$$

Таким чином, чотири рівняння (2.15а), (2.15б) та (2.16а), (2.17б) є рівняннями

спряження для лінійних поправочних значень. В матричній формі їх можна записати так:

$$\overrightarrow{\Delta W_{i+1,b}} = [B_{i+1}]\overrightarrow{\Delta W_{i,e}} + \quad (2.18a)$$

Або

$$\begin{pmatrix} \Delta X_{i+1,b} \\ \Delta Y_{i+1,b} \\ \Delta \alpha_{i+1,b} \\ \Delta T_{i+1,b} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_6 & Y_5 \\ 0 & 0 & Y_3 & Y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X_{i,e} \\ \Delta Y_{i,e} \\ \Delta \alpha_{i,e} \\ \Delta T_{i,e} \end{pmatrix} \quad (2.18б)$$

Таким чином, по отриманих рівняннях зв'язку і спряження можна отримати повне рішення для всієї системи, якщо є відомими 4 параметри на лівій границі системи, тобто початку першого елемента. Послідовно застосовуючи матриці переходу (зв'язку і спряження), можна отримати матрицю зв'язку параметрів першої точки системи з матрицею в останній точці:

$$\overrightarrow{\Delta W_{n+1,e}} = [A_{n+1}][B_{n+1}][A_n][B_n] \dots [A_2][B_2][A_1]\overrightarrow{\Delta W_{1,b}} \quad (2.18в)$$

Оскільки перші два параметри (положення крайньої лівої точки) дорівнюють нулю, то представимо ці рівняння в більш зручному вигляді:

$$\Delta X_{n+1,e} = f_{11}\Delta\theta_{1,e} + f_{12}\Delta N_{1,e} \quad (2.18г)$$

$$\Delta Y_{n+1,e} = f_{21}\Delta\theta_{1,e} + f_{22}\Delta N_{1,e} \quad (2.18д)$$

де коефіцієнти f_{km} визначаються із матриці (2.18в)

Алгоритм рішення базується на отриманих рівняннях (2.18г) та (2.18д). Нехай маємо після $j - 1$ ітерації базові рішення. Вводимо поправочне рішення, що характеризується параметрами $\Delta\theta_{1,e}$ та $\Delta N_{1,e}$ які відносяться до початку першого елемента. Тоді з врахуванням того, що результуюче рішення є сумою рішення на попередній ітерації та поправки, то зокрема, для останньої точки отримаємо два рівняння, які прирівняємо до необхідних г.у.:

$$X_{n+1,b}^{j-1} + f_{11}\Delta\theta_{1,e} + f_{12}\Delta N_{1,e} = X_L \quad (2.19a)$$

$$Y_{n+1,b}^{j-1} + f_{21}\Delta\theta_{1,e} + f_{22}\Delta N_{1,e} = Y_L \quad (2.19б)$$

Звідси знаходимо шукані поправки $\Delta\theta_{1,e}, \Delta N_{1,e}$.

Наступний етап рішення полягає в уточненні базових рішень. Відповідно до вказаної вище методології поступових уточнень, запишемо:

$$\theta_{1,e}^j = \theta_{1,e}^j + \mu \cdot \Delta\theta_{1,e} \quad (2.19\text{в})$$

$$N_{1,e}^j = N_{1,e}^j + \mu \cdot \Delta N_{1,e} \quad (2.19\text{д})$$

Де, як завжди при уточненнях, використовується $\mu \leq 1$. Наявність нових $\theta_{1,e}^j$ та $N_{1,e}^j$ дозволяє шляхом уточнюючої процедури прогонки побудувати нове базове рішення. Більш детально про коефіцієнт уточнень буде йти мова в підрозділі 2.2.

2.1.3 Приклади обчислень

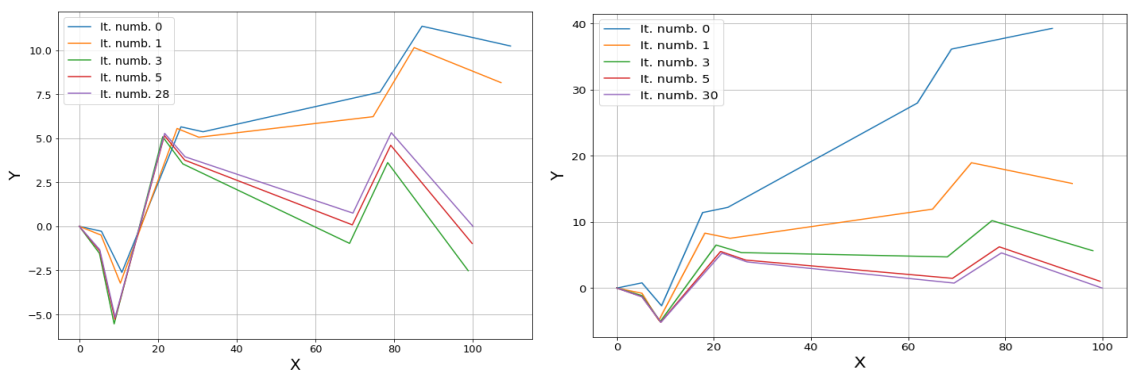
Для порівняння розглянутих методологій рішення будуть розглядатися два випадки канатів. Перший випадок є більш простим, коли кількість сил (ділянок) є незначною, і самі величини сил і їх напрямки не змінюються кардинально. В другому випадку геометрія zdeформованого канату змінюється різко і кількість сил є більшою. Метою є дослідження вибору початкового стану (геометрії) і процедури корекції коефіцієнтів уточнення на збіжність результатів. Для однозначності відтворення результатів всі розміри беруться в метрах, а сили в Ньютонах, жорсткість канату виражається в Ньютонах.

Перший приклад. Нехай довжина канату дорівнює 100. Граничні умови \ такими: точка $B(0,0)$ і точка $E(X_e = 100, Y_b = 0)$. Тобто довжина канату є такою ж як і відстань між точками закріплення. Точки прикладення сили є такими: $l_1 = 5$; $l_2 = 10$; $l_3 = 25$; $l_4 = 30$; $l_5 = 70$; $l_5 = 80$. Значення прикладених вертикально сил: $[-2000, 5000, -3000, 500, 1500, -2000]$. Канат вибирається не жорстким і його коефіцієнт $k = 4 \cdot 10^4 N$.

Розглянемо метод стрільби, МС. На першій ітерації візьмемо силу прикладену до лівого краю на рівні 5000 N, а кут приймемо 0.05 радіан. Забігаючи наперед, повідомимо, що отримані правильні результуючі значення, відповідно, наступні: 2847 та 0.25. Розрахункова зміна геометрії для

різних ітерації показана на Мал 2.3а. Для випадку коли початкові базові значення є близькими до правильних, процес збіжності відбувається дуже швидко (це відноситься і до розглянутого прикладу). Наближення до правильної геометрії досягається уже на 4му. Проте в цілому потрібно близько 28 ітерацій. Таким чином, збіжність МС є порівняно повільною.

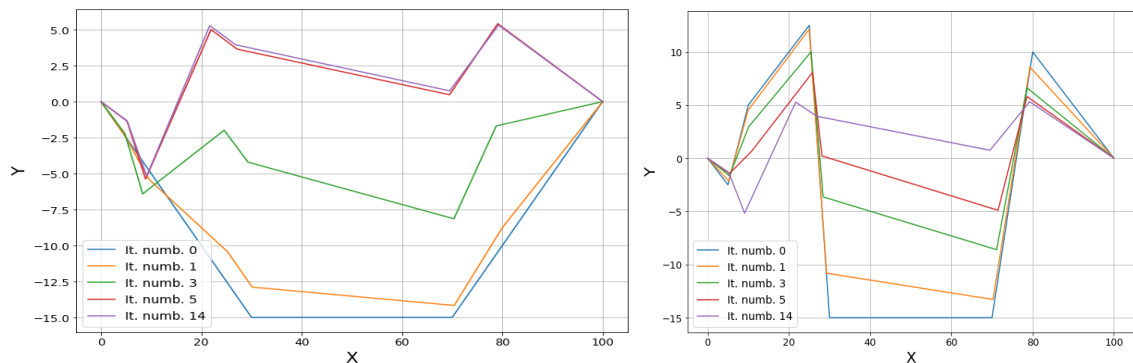
Мал 2.3б показує інший випадок вибору початкової геометрії та сили. Тут сила в першому елементі приймається 2000 N, а кут направлений в іншу сторону і дорівнює мінус 0.15 радіан. В цьому виборі початкова геометрія знову наближена до правильної. Отримані результати нагадують попередні. Геометрія спочатку відносно швидко наближається до правильної, проте процедура уточнення відбувається до 30-ї ітерації..



Мал 2.3. Історія зміни геометрії в МС для двох різних початкових станів: а) сила 5000 N, і кут 0.05 радіан, б) сила 2000 N, і кут -0.15 радіан

Розглянемо власне наш запропонований метод, МАК. На відміну від МС, вхідними даними є положення всіх точок прикладення сил. На першій ітерації ми брали горизонтальні відхилення нульовими, а вертикальні вибирали випадковим чином таким чином, щоб фізична довжина канату була менша за геометричну, в даному випадку це завжди виконується. Візьмемо: $y_1 = 2.5$; $y_2 = 5$; $y_3 = 12$; $y_4 = 15$; $y_5 = 15$; $y_6 = 10$. Ця геометрія майже дзеркально протилежна до правильної. Проте збіжність досягається дуже швидко, і процес уточнень продемонстрований на Мал 2.4а. Близька геометрію досягається уже на п'ятій ітерації, а розрахунок завершується на 14

ітерації.



Мал 2.4. Розвиток геометрії МАК в залежності від ітерації: а) Перша початкова геометрія; б) Інша («далека») початкова геометрія

Змінимо початкове положення. На відміну від першого, третя і шоста точки взяті з протилежними знаками. В цьому випадку геометрія виглядає дещо «дивною». Тим не менше, правильне рішення досягалося уже на 14 ітерації, причому уже після 6-ої ітерації геометрія уже нагадує правильну. Це демонструє що МАК є більш ефективним порівняно з МС.

Вказані вище приклади ілюструють відому думку, що збіжність нелінійних процесів забезпечує правильність рішення.

Як підсумок дослідженого тесту різними методами, в Таблиці 2.1 приведемо остаточні отримані значення всіх параметрів.

Таблиця 2.1. МАК та МС. Співставлення розрахункових результатів

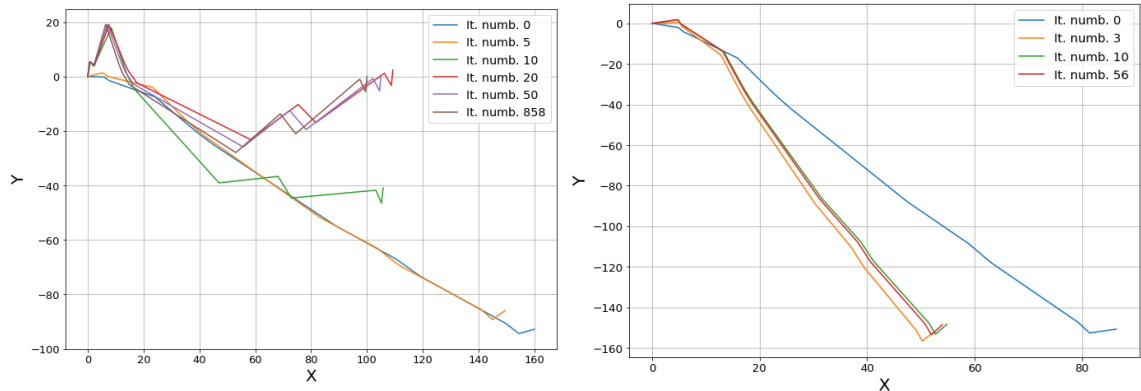
Номер точки, i	Координата позиції, x		Сила	Кут
	x	y		
0	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0.25090683}{0.25090683}$	$\frac{0.25090683}{0.25090683}$
1	$\frac{5.18818235}{5.18818235}$	$\frac{1.32977315}{1.32977315}$	$\frac{0.77605386}{0.77605386}$	$\frac{0.77605386}{0.77605386}$
2	$\frac{9.10134252}{9.10134252}$	$\frac{5.17047676}{5.17047677}$	$\frac{-0.69362907}{-0.69362907}$	$\frac{-0.69362907}{-0.69362907}$
3	$\frac{21.66953811}{21.66953811}$	$\frac{-5.27941951}{-5.27941951}$	$\frac{0.25090683}{0.25090683}$	$\frac{0.25090683}{0.25090683}$
4	$\frac{26.85772046}{26.85772046}$	$\frac{-3.94964636}{-3.94964636}$	$\frac{0.07487392}{0.07487392}$	$\frac{0.07487392}{0.07487392}$
5	$\frac{69.50360276}{69.50360276}$	$\frac{-0.75060166}{-0.75060164}$	$\frac{-0.43843304}{-0.43843304}$	$\frac{-0.43843304}{-0.43843304}$

Номер точки, i	Координата позиції, x		Сила	Кут
	x	y		
6	79.24727059	-5.31909263	0.25090683	0.25090683
	79.24727059	-5.31909262	0.25090683	0.25090683
7	100	-0.00000004		
	100	0		

Другий приклад. Він є складнішим за попередній. Візьмемо канат довжиною 160м (фізична довжина). Граничні точки є такими: ліва точка $B(0,0)$ і права точка $E(100, 0)$, тобто між точками закріплення є відстань 100м, що набагато менше за фізичну довжину канату. Розглядаємо 11 точок дії зовнішніх сил [5, 7, 22, 37, 40, 45, 90, 111, 120, 150, 155], де прикладені вертикальні сили дорівнюють відповідно: [-4000, 2000, -3000, 250, 350, 500, 700, -1000, 990, -1400, 6500]. Жорсткість канату приймається як в попередньому прикладі: $k = 4 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Спочатку дослідимо МС. На першій ітерації вибираємо силу на лівому краї 6000 N, і кут нахилу 0,03 радіан, що значно відрізняється від правильних 3633 N і -1,44 радіан. Історія зміни геометрії показана на Мал 2.5а. Збіжність відбувається повільно. На 50му кроці базова геометрія уже прямує до правильної, але рішення стабілізується лише після 858 ітерацій. Цей приклад є демонстрацією низької ефективності МС.

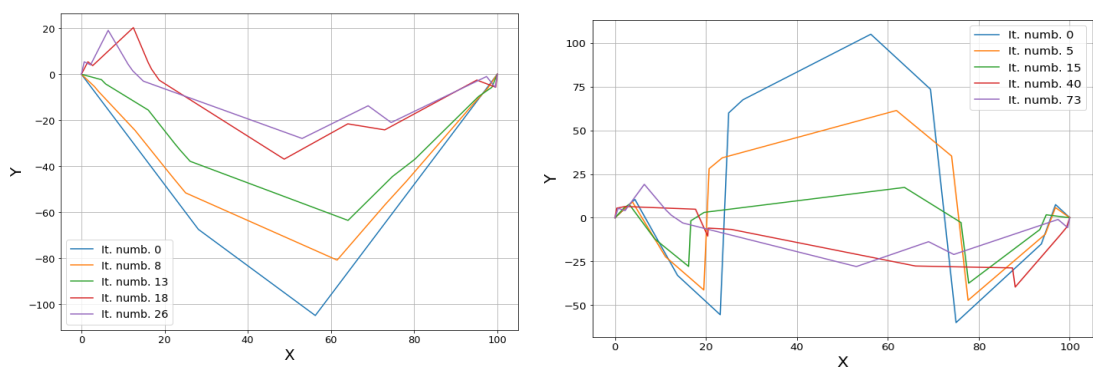
Наступні результати були ще більш песимістичними. В першій ітерації кут нахилу 0,4, а початкова сила вибиралася рівною 2500. В цьому випадку, в процесі уточнень відбувалася дуже повільна зміна базової геометрії. Після 40-ї ітерації процес уточнень значно сповільнився, а після 58-ї фактично зупинився. Це пов'язано з тим, що знак зміни розрахункових параметрів змінювався на кожній наступній ітерації, що зменшувало коефіцієнт уточнення μ в геометричній прогресії, і тому не дозволяло змінюватися новій базовій геометрії.



Мал 2.5. Процес уточнень МС для другого прикладу при початкових значеннях: а) сила 6000 Н, кут 0.03; б) сила а 2500 N, і кут 0.4

Причиною розбіжності полягає в комп'ютерних округленнях і в суті МС, що оперує дуже малою кількістю невідомих .

Перейдемо до розгляду нашого методу МАК. Початкова геометрія вибиралася довільно. Єдина вимога полягала в тому, щоб вибрана геометрична довжина перевищувала фізичну довжину. Першим варіантом вибраних нами положень є такі: $y_1 = 7.5$; $y_2 = 10.5$; $y_3 = 33$; $y_4 = 55.5$; $y_5 = 60$; $y_6 = 67.5$; $y_7 = 105$; $y_8 = 73.5$; $y_9 = 60$; $y_{10} = 15$; $y_{11} = 7.5$. І хоча початкове положення було дуже далеким від очікуваного, отримані на Мал 2.6а результати засвідчили надзвичайну ефективність метода, де збіжність досягається уже на 26-й ітерації!



Мал 2.6. Історія зміни положень отримана МАК для другого прикладу:

а) перша геометрія; б) друга геометрії

Другий варіант початкових положень вибирався «дивним». Тут ми

змінити знаки початкового положення, порівняно з першим варіантом: $y_1 = -7.5$; $y_2 = -10.5$; $y_3 = 33$; $y_4 = 55.5$; $y_5 = -60$; $y_6 = -67.5$; $y_7 = -105$; $y_8 = -73.5$; $y_9 = 60$; $y_{10} = 15$; $y_{11} = -7.5$. В цьому випадку правильні результати, отримані за 73 ітерації. Це звичайно гірший результат, ніж в першому, але враховуючи значну довжину канату порівняно з відстанню між точками закріплень, великі сили, значну видовженість канату, велику кількість точок, «дивність» початкової геометрії – все це свідчить про правильність вибору нами методу аналізу.

Для довідки, і для подальших співставлень, отримані результати підсумовані в Табл. 2.2. де приведені уже «збіжні», які при умові збіжності які є практично однаковими для різних методів і початкових положень.

Таблиця 2.2. Приклад 2. Розраховані результати

Точк а, і	Х,	У,	Кут	Сила	Точк а і	Х,	У,	Кут	Сила
0	0	0	-1.4461	3633.04	7	53.0760	27.9434	-0.7306	606.673
1	0.6783	5.4117	0.71859	600.273	8	68.9540	13.7177	0.92144	747.259
2	2.2064	4.0753	-1.2963	1667.22	9	74.4977	21.019	-0.7182	600.046
3	6.4411	19.115	1.25759	1466.52	10	97.4273	0.9839	1.14834	1102.06
4	11.232	4.3223	1.19498	1231.09	11	99.5338	5.6700	-1.4887	5513.37
5	12.367	1.44584	1.05406	914.585	12	100	0	-	-
6	14.893	-3.0007	0.57866	539.716	-	-	-	-	-

Як підсумок, відмітимо, що МС є значно гіршим. Не дивлячись на свою популярність, він не може гарантувати правильність результатів. Цей підрозділ, ще раз продемонстрував необхідність розгляду проміжних точок і вибору більшого числа степенів свободи при рішенні ГН задач.

2.2 Метод базових та згладжувальних рішень

2.2.1 Ідея методу, поняття базової геометрії

Згідно з процедурою розрахунку, кожен канат в залежності від властивостей, навантаження і деформації поділяється на конкретну кількість елементів, позначених як J . Іншими словами, в межах кожного елементу

властивості повинні залишатися подібними, а навантаження та кривизна слабо змінюватися. Для двовимірних випадків сила може розглядатися як така, що діє в обох напрямках. Для тривимірних випадків розподілена сила вважається такою, що діє тільки лише в одному напрямку, наприклад, сили тяжіння \vec{J} , [2], а зосереджені сили можуть бути направлені довільно, тобто по всіх трьох глобальних осях.

В кожен елемент j входить концепція базового рішення, позначеного як $\vec{B}^j(s)$, та згладжувального рішення, позначеного як $\vec{C}^j(s)$. Повне рішення, позначене як $\vec{U}^j(s)$, знаходиться як сума компонент:

$$\vec{U}_i = \vec{B}_{i-1} + \vec{C}_i \quad (2.20a)$$

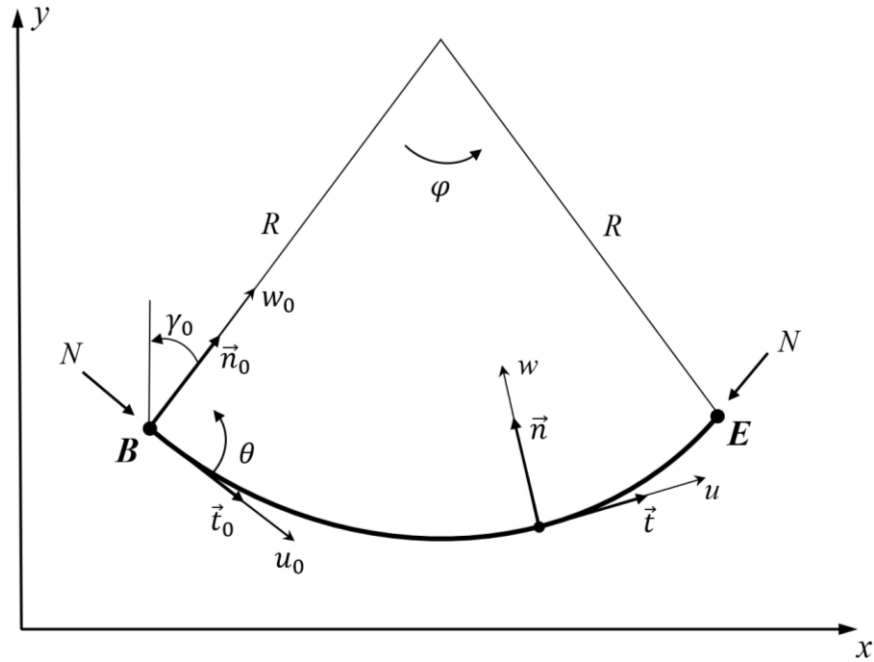
Тут і надалі нижній індекс i використовується як номер ітерації. Як слідує з формального представлення (2.20a) для отримання Повного рішення \vec{U}_i застосовується базове рішення, БР, з попередньої ітерації $i - 1$. Надалі, для простоти, індексами j, i , ми часто будемо нехтувати.

Основна ідея методу полягає в тому, що БР принципово враховує основні особливості навантаження та геометрично нелінійну поведінку, тоді як згладжувальне рішення, ЗР, є лінеаризованою корекцією БР. В свою чергу для застосування на наступній ітерації БР уточнюється по знайденому ЗР відповідно до правила:

$$\vec{B}_i = \vec{B}_{i-1} + m \cdot \vec{C}_i \quad (2.20б)$$

Тут коефіцієнт m , $0 < m \leq 1$, відомий як коефіцієнт сповільнення, виконує дві основні функції: а) обмежує абсолютні зміни параметрів Базового Рішення (БР); б) оцінює і керує, збіжністю процесу розрахунку. Це означає, що знак зміни максимального значення певного параметра повинен співпадати зі знаком відповідного параметра на попередній ітерації (m може незначно збільшитися), або розрахунок розходиться, і отримано інший знак параметра в точці максимальної зміни (де m має значно зменшитися). Важливо відзначити, що в правильному рішенні Згладжувальне Рішення (ЗР) зазвичай значно менше, ніж Базове Рішення.

Ми можемо характеризувати БР виключно базовою поздовжньою силою, відповідною їй довжиною і базовою геометрією. У випадку 3D канату базова геометрія також представляє собою ділянку кола з радіусом R_i^j , хоча для зручності ми скористаємося позначенням R , яке вказано в Мал 2.7.



Мал 2.7. Базова геометрія та напрямки

Ми також використовуватимемо поняття кривизни, позначене як k_i^j чи k , де $k_i^j = 1/R_i^j$. Довжина ділянки буде позначатися l_b , або просто l , щоб вказати, що ми оперуємо лише базовою довжиною. Таким чином, можна охарактеризувати кожну точку канату своєю координатою абсолютної довжини, s , або кутової довжини, ϕ , де:

$$\phi = s/R \quad 0 \leq s \leq l_b \quad (2.21a)$$

Два локальні вектори, якими можна характеризувати БР кожного елемента, - це вектор дотичної \vec{t} і вектор нормалі \vec{n} . Між ними існують такі диференційні залежності:

$$\begin{aligned} d\vec{t}/ds &= d\vec{t}/(Rd\phi) = \vec{n} \\ d\vec{n}/ds &= d\vec{n}/(Rd\phi) = -\vec{t} \end{aligned} \quad (2.21b)$$

Оскільки відома базова геометрія, то також відомі положення точки B та

базові вектори в ній; іншими словами, відомо:

$$\vec{G}_B = G_{B,x}\vec{i} + G_{B,y}\vec{j} + G_{B,z}\vec{k} \quad (2.21\text{г})$$

$$\vec{t}_0 = \vec{i}\alpha_{11} + \vec{j}\alpha_{12} + \vec{k}\alpha_{13} \quad (2.21\text{д})$$

$$\vec{n}_0 = \vec{i}\alpha_{21} + \vec{j}\alpha_{22} + \vec{k}\alpha_{23} \quad (2.21\text{е})$$

Де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - це декартові вектори в просторі. Також, при розв'язанні 3D задач ми використовуємо бінормальний вектор. Елемент системи є плоским (частиною кола), тому бінормальний вектор є константою для цього елемента:

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}_0 = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) = \vec{t}_0 \times \vec{n}_0 = \vec{t} \times \vec{n} \quad (2.21\text{є})$$

Знаючи положення першої точки, ми можемо знайти положення будь-якої іншої точки елемента, позначеної як D , як суму положення точки B і відносного положення точки D , тобто \vec{G}_{DB} :

$$\vec{G}_D = \vec{G}_B + \vec{G}_{DB} \quad (2.21\text{ж})$$

Запишемо останню компоненту в локальних координатах:

$$\vec{s} = \vec{G}_{DA} = \vec{t}_0 \cdot R \sin \phi + R(1 - \cos \phi) \cdot \vec{n}_0 \quad (2.21\text{з})$$

Зауважимо, що для дуже малих кутів кривизни елемента, коли радіус кривизни дуже великий $R \rightarrow \infty$, у зв'язку з особливостями комп'ютерних обчислень рекомендується використовувати вираз (2.21i) замість (2.21з), оскільки він представляє собою аналітичний розклад в ряд Тейлора.

$$\vec{G}_{DA}(s) = \vec{t}_0 \cdot s \left(1 - \frac{\phi^2}{3!} + \frac{\phi^4}{5!} \right) + \vec{n}_0 \cdot s \phi \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi^2}{4!} \right) \quad (2.21\text{и})$$

Ми будемо використовувати його для кутів, які менші за $\phi \leq 0.002$. Це дасть нас відносну похибку для \vec{G}_{DA}/s , яка дорівнює $(0.002)^5/(6!)$.

Поза описаною основною геометрією, до базового рішення також входить осьова сила $N_{b,i}$. Однак осьова сила призводить до розтягування елемента, змінюючи його базову довжину. З іншого боку, для кожного матеріалу відомий закон розтягу, який пов'язує довжину елемента з прикладеною силою. У випадку простого закону розтягу ми можемо записати його так:

$$l_{b,i} = (1 - N_{b,i}/k_i)l_0 \quad (2.22\text{а})$$

Тут використано знак "—" тому, що розтягуючу силу в цьому випадку вважають від'ємною за умовно прийнятою нами системою напрямків і знаків.

Натомість, необхідно встановити взаємозв'язок між зміною довжини та поправочною силою N після кожної ітерації. Для цього переформулюємо рівняння (2.22а) наступним чином:

$$l_{b,i} + \Delta l = (1 - (N_{b,i} + N)/k_i)l_0 \quad (2.22б)$$

Після врахуванні залежності (2.22а) ми отримаємо фізичний закон розтягу канату з врахуванням попереднього (базового) видовження:

$$\Delta l = \frac{Nl_0}{k_i} \Rightarrow \varepsilon = \frac{l_0}{l_b} \frac{N}{EF_0} \quad (2.22в)$$

Тут поздовжня деформація ε , звісно, виміряна відносно базової довжини, оскільки саме її ми взяли за основу при формулюванні задачі.

Базове рішення має розриви. В ньому немає вимоги, щоб початки наступних ділянок збігався (з точки зору геометричного положення або рівноваги сил) з кінцями попередніх. Окрім того, не встановлено вимоги, щоб в межах елемента базова сила урівноважувала діючі навантаження; базове рішення не обов'язково задовольняє граничні умови. Усе це досягається за допомогою згладжувального рішення.

2.2.2 Згладжувальне рішення та спряження елементів

Згладжувальне рішення (ЗР) вирівнює всі неточності Базового Рішення (БР), і сформовано таким чином, що воно буде невеликим у порівнянні з БР. БР не містить всі параметри, що характеризують положення і сили в канаті, а в ЗР ті компоненти, які описують БР, наприклад, осьова сила та кривизна повинні бути малими. ЗР має дві складові - в площині самого канату, тобто в площині, що визначається векторами \vec{t}, \vec{n} , та у поперечній площині (складова із площини канату). У цьому розділі по суті сформульовано нове рішення для ЗР, яке є альтернативою класичному рішенню ланцюгової лінії.

Чотири ключові параметри – дотичне u та нормальне w переміщення, осьова сила N та кут θ характеризують рішення в площині. Ці параметри

можуть бути виражені у векторній формі наступним чином:

$$\vec{P}_{in}(s) = u \cdot \vec{t} + w \cdot \vec{n} \quad \vec{N} = N\vec{t} \quad \vec{\theta} = \theta\vec{\beta} \quad (2.23)$$

Тут вектор $\vec{P}_{in}(s)$ представляє переміщення будь-якої точки в площині канату. Ми також розглядаємо два параметри, які визначають зміщення точок із площини: перпендикулярне до площини переміщення v , тобто у напрямку вектора $\vec{\beta}$, та кут $\vec{\psi}$ який вказує напрямок діючої сили вектора \vec{j} .

Деформація із площини. Для цього напрямку немає жодних прикладених сил, тому канат змінює своє положення, подібно жорсткому тілу. Таким чином, припустимо, що точка B зрушилася на відстань v_0 у напрямку вектора $\vec{\beta}$, а всю площину канату повернуло на кут ψ_0 навколо глобальної осі \vec{j} .

Визначимо векторний вигляд кута повороту для кожної точки:

$$\vec{\psi}(s) = \psi(s) \cdot \vec{j} = \psi_0 \cdot \vec{j} \quad (2.24a)$$

Тут вектор \vec{j} визначено через локальні вектори початку елемента \vec{t}_0 та \vec{n}_0

$$\vec{j} = -\sin\gamma_0 \cdot \vec{t}_0 + \cos\gamma_0 \cdot \vec{n}_0 \quad (2.24b)$$

Враховуючи, що кут γ_0 направлено проти годинникової стрілки відносно вектора \vec{n}_0 і має значення Мал 2.3, лінеаризоване рішення для деформації із площини визначається наступними формулами:

$$\vec{P}_{out}(s) = v_0\vec{\beta} + \vec{\psi} \times \vec{s} = v_0\vec{\beta} + \psi_0 \cdot \vec{j} \times (\vec{t}_0 \cdot R \sin \phi + R(1 - \cos \phi) \cdot \vec{n}_0) \quad (2.25a)$$

де врахувавши (2.24б) отримаємо:

$$\vec{P}_{out}(s) = v_0\vec{\beta} - \psi_0\vec{\beta}R(1 - \cos \phi)\sin\gamma_0 - \psi_0\vec{\beta}R\cos\gamma_0 \sin \phi \quad (2.25b)$$

Як і раніше, розглянемо граничний випадок для формули (6б), коли кут кривизни елемента є дуже малим:

$$\vec{P}_{out}(s) = v_0\vec{\beta} - \psi_0\vec{\beta}s \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\phi^3}{24} \right) \sin\gamma_0 - \psi_0\vec{\beta}s \cdot \cos\gamma_0 \left(1 - \frac{\phi^2}{6} \right) \quad (2.25b)$$

Ще одним важливим результатом деформації із площини є зміна напрямків основних векторів після повороту на кут $\vec{\psi}$. Із визначення операції повороту маємо:

$$\Delta\vec{n} = \psi_0 \cdot \vec{j} \times \vec{n} = \sin(\phi(s) - \gamma_0)\vec{\beta} \quad (2.25г)$$

$$\Delta\vec{t} = \vec{\psi} \times \vec{t} = -\psi_0\cos(\phi(s) - \gamma_0)\vec{\beta} \quad (2.25д)$$

Деформація у площині є більш складним випадком, і отримання рішень для нього включає нову наукову складову в теорії канатів. Розглянемо параметри u, w, N, θ .

На відміну від традиційного підходу, тут можна розглянути більш складні закони деформації. У даному випадку аналізуються однорідні та лінійні компоненти вздовж канату, а також однорідні та лінійні компоненти, що перпендикулярні до осі канату. Іншими словами, навантаження представлене наступним чином:

$$\vec{P}(s) = (P_{n0} + P_{n1}s/l_{b,i})\vec{n}(s) + (P_{t0} + P_{t1}s/l_{b,i})\vec{t}(s) \quad (2.26a)$$

Константи $P_{n0}, P_{n1}, P_{t0}, P_{t1}$ визначаються через розподілені сили і їх проекцію у двох точках: $s_1 = 1l_b/4$ та $s_2 = 3l_b/4$. Для цього застосовується лінійна інтерполяція.

Сформулюємо диференційні залежності для канату. Оскільки повна осьова сила представляє собою суму двох компонент, запишемо:

Складемо канатні диференційні залежності. Згідно методології повна осьова сила є сумою двох компонент, тому запишемо:

$$N_u = N_b + N \quad (2.26б)$$

Тут згладжувальну компоненту сили, N , пишемо без індексу.

Аналогічно, повна кривизна, k_u , є сумою базової кривизни, k_b , та згладжувальної, k_s . Тобто:

$$k_u = \frac{1}{R_u} = k_b + k_s = \frac{1}{R} + k_s \quad (2.26в)$$

Згідно з визначенням кривизни, її компонента згладжування визначається як похідна за довжиною від кута повороту θ .

$$k_s = \frac{1}{R_s(s)} = \frac{d\theta}{ds} \quad (2.26г)$$

Отже, повна кривизна виражається наступним чином:

$$k_u = \frac{1}{R_u(s)} = \frac{1}{R} + \frac{d\theta}{ds} \quad (2.26д)$$

Тепер сформулюємо диференціальні рівняння рівноваги та деформації:

$$\frac{dN_u}{Rd\phi} = \frac{dN_u}{ds} = P_{t,0} + P_{t,1}s; \quad \frac{N_u}{R_u(s)} = P_{n,0} + P_{n,1}s; \quad (2.27a-б)$$

$$\frac{du}{Rd\phi} - \frac{w}{R} = -\frac{N}{EF} \frac{l_0}{l_b}; \quad \frac{dw}{Rd\phi} + \frac{u}{R} = \theta \quad (2.27\text{в-г})$$

Розглянемо їх детальніше. Рівняння рівноваги (2.27а) та (2.27б) формулюються для повної сили, оскільки саме вона забезпечує рівновагу зовнішніх навантажень. Рівняння для переміщень виражаються як для згладжувальних переміщень, так і для сил і кутів, оскільки базові сили і кривизна вже враховані в БР елемента.

Розглянемо рівняння (2.27а). Оскільки базова сила у (2.26б) є константою, тоді $\frac{dN_u}{ds} = \frac{dN}{ds}$. Таким чином, рівняння (2.27а) проінтегруємо і виразимо у формі, зручній для застосування методу МПП:

$$N(s) = N_0 + P_{t,0}s + P_{t,1} \frac{s^2}{2} \quad (2.28\text{а})$$

Для другого рівняння потрібне спрощення (лінеаризація):

$$(N_b + N(s)) \left(\frac{1}{R} + \frac{d\theta}{ds} \right) = P_{n,0} + P_{n,1}s \quad (2.28\text{б})$$

Відкинемо член другого порядку малості, а саме $N \frac{d\theta}{ds}$, і підставимо (9а) в це рівняння:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{N_0}{N_b R} + \left(P_{n,0} - \frac{N_b}{R} \right) \frac{1}{N_b} + \frac{P_{n,1}s}{N_b} - \frac{P_{t,0}s}{RN_b} - \frac{P_{t,1}s^2}{2RN_b} \quad (2.28\text{в})$$

Проінтегруємо його та виразимо у формі, яка є зручною для МПП:

$$\theta(s) = \theta_0 - \frac{N_0}{N_b R} s + \frac{\bar{P}_{n,0}}{N_b} s + \frac{P_{n,1}}{N_b} \frac{s^2}{2} - \frac{P_{t,0}}{RN_b} \frac{s^2}{2} - \frac{P_{t,1}s^3}{6RN_b} \quad (2.28\text{г})$$

де для зручності позначимо:

$$\bar{P}_{n,0} = \left(P_{n,0} - \frac{N_b}{R} \right) \quad (2.28\text{д})$$

Розглянемо тепер вирази для переміщень (2.27в) та (2.27г). Підставимо вже визначені розв'язки (2.28а) та (2.28г) у їхні праві частини. Проведемо інтегрування цих виразів як системи двох рівнянь і представимо їх у формі, зручній для МПП. Отримаємо компоненти переміщень для нормальної компоненти:

$$w = w_0 \cos \frac{s}{R} - u_0 \sin \frac{s}{R} - \frac{N_0}{N_b} R \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right) + \frac{N_0}{EF} \frac{l_0}{l_b} R \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right) + \theta_0 R \sin \frac{s}{R} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{P_{t,0} l_0}{EF l_b} R \left(s - R \sin \frac{s}{R} \right) - \frac{P_{t,0}}{N_b} R \left(s - R \sin \frac{s}{R} \right) + \frac{P_{t,1} l_0}{2EF l_b} R \left(s^2 - 2R^2 + 2R^2 \cos \frac{s}{R} \right) - \\
& - \frac{P_{t,1}}{2N_b} R \left(s^2 - 2R^2 + 2R^2 \cos \frac{s}{R} \right) + \frac{\bar{P}_{n,0}}{N_b} R^2 (1 - \cos \frac{s}{R}) + \frac{P_{n,1}}{N_b} R^2 \left(s - R \sin \frac{s}{R} \right)
\end{aligned} \quad (2.29a)$$

Подібним чином, отримаємо вираз для тангенціальної компоненти переміщень:

$$\begin{aligned}
u = & u_0 \cos \frac{s}{R} + w_0 \sin \frac{s}{R} - \frac{N_0 l_0}{EF l_b} R \sin \frac{s}{R} - \frac{N_0}{N_b} \left(s - R \sin \frac{s}{R} \right) + \theta_0 R \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right) - \\
& - \frac{P_{t,0} R^2 l_0}{EF l_b} (1 - \cos \frac{s}{R}) - \frac{P_{t,1} R^2 l_0}{EF l_b} \left(s - R \sin \frac{s}{R} \right) + \frac{\bar{P}_{n,0} R}{N_b} \left(s - R \sin \frac{s}{R} \right) + \frac{P_{n,1} R}{2N_b} \left(s^2 - 2R^2 + \right. \\
& \left. + 2R^2 \cos \frac{s}{R} \right) - \frac{P_{t,0}}{2N_b} \left(s^2 - 2R^2 + 2R^2 \cos \frac{s}{R} \right) - \frac{P_{t,1}}{6N_b} \left(s^3 - 6R^2 s + 6R^3 \sin \frac{s}{R} \right) \quad (2.29б)
\end{aligned}$$

Перевірити точність цих формул можна підставивши їх в диференціальні рівняння чи початкові умови: $u(0) = u_0$ та $w(0) = w_0$.

Зазначимо, що при дуже великих значеннях R розглянуті формули через особливості комп'ютерної реалізації обчислень можуть призводити до значних похибок. Тому, при малих значеннях кута $\phi = s/R$, ми використовуємо наступні поліноміальні наближення:

$$R(1 - \cos \frac{s}{R}) = s \left(\frac{s}{R} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \left(\frac{s}{R} \right)^2 + \frac{1}{6!} \left(\frac{s}{R} \right)^4 \right) \quad (2.30a)$$

$$R^2 \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right) = s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \left(\frac{s}{R} \right)^2 + \frac{1}{6!} \left(\frac{s}{R} \right)^4 \right) \quad (2.30б)$$

$$R \sin \frac{s}{R} = s \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{s}{R} \right)^2 + \frac{1}{5!} \left(\frac{s}{R} \right)^4 \right) \quad (2.30в)$$

$$R \left(s - R \sin \frac{s}{R} \right) = s^2 \left(\frac{s}{R} \right) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5!} \left(\frac{s}{R} \right)^2 \right) \quad (2.30г)$$

$$R \left(s^2 - 2R^2 + 2R^2 \cos \frac{s}{R} \right) = s^3 \left(\frac{s}{R} \right) \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{6!} \left(\frac{s}{R} \right)^2 \right) \quad (2.30д)$$

$$\left(s - R \sin \frac{s}{R} \right) = s \left(\frac{s}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5!} \left(\frac{s}{R} \right)^2 \right) \quad (2.30е)$$

$$\left(s^2 - 2R^2 + 2R^2 \cos \frac{s}{R} \right) = s^2 \left(\frac{s}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{6!} \left(\frac{s}{R} \right)^2 \right) \quad (2.30є)$$

$$\left(s^3 - 6R^2 s + 6R^3 \sin \frac{s}{R} \right) = \frac{s^3}{20} \left(\frac{s}{R} \right)^2 \quad (2.30ж)$$

Підсумуємо деякі результати аналізу деформації в площині. Зміна положення точок $\vec{P}_{in}(s)$ виглядає наступним чином:

$$\vec{P}_{in}(s) = u \cdot \vec{t} + w \cdot \vec{n} \quad (2.31a)$$

Формули для зміни одиничних базисних векторів виглядають наступним чином:

$$\Delta \vec{t}_\theta(s) \approx \theta \vec{\beta} \times \vec{t} = \theta \vec{\beta}_0 \times \vec{t} = \theta \vec{n} \quad (2.31b)$$

$$\Delta \vec{n}_\theta(s) \approx \theta \vec{\beta} \times \vec{n} = \theta \vec{\beta}_0 \times \vec{n} = -\theta \vec{t} \quad (2.31b)$$

Наступним кроком є аналіз рівнянь спряження для переміщень, що записуються для вузових чи граничних точок. Позначимо початкові базові положення всіх точок спряження як \vec{G} . Для зручності серед усіх кінців, що входять в даний вузол виберемо головний. Також відповідно до вибраної системи обходу введемо нижній якісний індекс m , що вказує, чи є дана точка початком елемента $m = b = 0$ чи його кінцем, $m = e = 1$. Кожен кінець будемо характеризувати величиною розриву (GAP), \vec{G}_m^J , яке є різницею між базовими положеннями даної точки і головної точки. Відмітимо, що для головної точки вузла GAP дорівнює нулю.

ЗР для переміщень є сумою відповідних рішень в двох площинах:

$$\vec{P}(s) = \vec{P}_{in}(s) + \vec{P}_{out}(s) = u(s) \cdot \vec{t}(s) + w(s) \cdot \vec{n}(s) + v(s) \cdot \vec{\beta}(s) \quad (2.32a)$$

Рівняння спряження для переміщень формулюються як вимога, щоб положення всіх точок вузла були однаковими. Іншими словами, сума GAP і ЗР для кожного вузла мають бути ідентичними:

$$\vec{G}_m^1 + \vec{P}_m^1(s_m) = \vec{G}_m^2 + \vec{P}_m^2(s_m) = \dots \vec{G}_m^K + \vec{P}_m^K(s_m) \quad (2.32b)$$

де K це кількість точок в кожному вузлі. Векторне рівняння (2.32b) дає $3 \cdot (N - 1)$ та $2 \cdot (N - 1)$ скалярних рівнянь в 3D та 2D випадках, відповідно.

Тут K - це кількість точок у кожному вузлі. Векторне рівняння (2.32b) формує $3 \cdot (N - 1)$ та $2 \cdot (N - 1)$ скалярних рівнянь у випадку тривимірного та двовимірного випадку відповідно.

Розглянемо тепер рівняння спряження сил, які також описуються для

результуючого рішення. Векторна сила в кожному вузлі визначається за допомогою наступної формули:

$$\overrightarrow{N_{u,m}^j}(s_m) = (N_{b,m}^j(s_m) + N_m^j) \cdot \vec{t}_{u,m}^j(s_m)(-1)^m \quad (2.33a)$$

Тут ЗР міняє напрям дотичного вектора наступним чином:

$$\vec{t}_{u,m}^j(s_m) = \vec{t}_{b,m}^j(s_m) + \Delta \vec{t}(s_m) \quad (2.34б)$$

Рівняння рівноваги вузла, яке враховує всі сили, що діють в ньому, записуються наступним чином:

$$\overrightarrow{N_{u,m}^1}(s_m) + \overrightarrow{N_{u,m}^2}(s_m) + \dots \overrightarrow{N_{u,m}^K}(s_m) + \vec{F} = 0 \quad (2.34в)$$

Розглянемо вектор \vec{F} як зовнішню зосереджену силу в вузлі. Рівняння (2.34в) надає три скалярні рівняння для тривимірного випадку та два для двовимірного. Тепер давайте уточнимо вираз для дотичних векторів у (2.34б). Використовуючи отримані результати з (2.25д) та (2.31б), ми можемо записати:

$$\vec{t}_m(s_m) \approx \vec{t}(s_m) - \psi_0 \cos(-\gamma_0 + \phi_m) \vec{\beta}(s_m) + \theta(s_m) \vec{n}(s_m) \quad (2.34г)$$

Отже, необхідно переписати кожен компоненту рівняння (2.34в) у такому вигляді:

$$\vec{N}_m + \vec{N}_{b,m} \approx \left((N_{b,m} + N_m) \vec{t}_m + N_{b,m} \begin{pmatrix} -\psi_0 \cos(-\gamma_0 + \phi_m) \vec{\beta}_m \\ + \theta(s_m) \vec{n}_m \end{pmatrix} \right) \quad (2.34д)$$

Тут для зручності опущено верхні індекси.

Граничні умови. Тут ми розглядаємо лише прості граничні умови по переміщенням. Їх реалізація подібна до умов спряження між елементами. Позначимо необхідне граничне положення як \overrightarrow{AG}^n , де верхній індекс вказує на номер границі. Таким чином, \overrightarrow{G}_m^n вказує на базове положення відповідної точки каната, а $\overrightarrow{\Pi}_m^n(s_m)$ визначає переміщення ЗР. В цьому випадку гранична умова записується наступним чином:

$$\overrightarrow{G}_m^n(s_m) + \overrightarrow{\Pi}_m^n(s_m) = \overrightarrow{AG}^n \quad \text{або} \quad \overrightarrow{\Pi}_m^n(s_m) = \overrightarrow{AG}^n - \overrightarrow{G}_m^n \quad (2.34е)$$

Що дає 3 рівняння в 3D та 2 рівняння в 2D випадках.

Створення системи рівнянь в даному випадку полягає в визначенні потужності задачі, яка становить 6 для 3D випадку. На кожній ітерації ми створюємо два набори по 6 невідомих для кожного елемента. Іншими словами, ми формуємо вектори невідомих як вектор \vec{W}_0^j :

$$\vec{W}_0^j = column(w_0^j, u_0^j, \theta_0^j, N_0^j, v_0^j, \psi_0^j) \quad (2.35a)$$

Та для кінця \vec{W}_e^j :

$$\vec{W}_e^j = column(w_e^j, u_e^j, \theta_e^j, N_e^j, v_e^j, \psi_e^j) \quad (2.35b)$$

Отже, у нас є $6 \cdot 2 = 12$ невідомих для кожного елемента, і загалом ми маємо $12 \cdot J$ невідомих.

2.2.3 Організація ітераційного процесу

Згладжувальне рішення отримується в результаті розв'язку матриці. Воно слугує для уточнення БР. З цією процедурою пов'язані дві важливі проблеми. Визначення суті коефіцієнта сповільнення m , який застосовується до всього ЗР, його складових і техніки визначення є першою проблемою. Другою проблемою є власне застосування цього коефіцієнту уточнення для кожного конкретного параметру БР.

Визначення коефіцієнта руху m . Розглянемо його як добуток коефіцієнтів: $m_a \leq 1$, та $m_s \leq 1$:

$$m = m_a \cdot m_s \quad (2.36a)$$

Основна мета m_s - подавити розбіжність рішення. Його корекція пов'язана зі збіжністю ЗР (знак екстремальних величин параметрів, що розглядаються, на двох послідовних ітераціях є однаковим) чи розбіжністю (знак є різним) результатів послідовних обчислень.

Мета коефіцієнта m_a полягає в тому, щоб обмежити екстремальні значення переміщень, кутів та сил на кожній ітерації, порівнюючи їх із заздалегідь вибраними допустимими величинами. Так для переміщення

приймається обмеження, що воно не може перевищувати $0.3L$, де L - умовна довжина канату. Тоді, якщо в деякому елементі екстремальне значення переміщень дорівнює γL , то частковий коефіцієнт $m_{a,w}$ обчислюємо наступним чином:

$$m_{a,w} = \min \begin{cases} \frac{0.3L}{\gamma L} = \frac{0.3}{\gamma} \\ 1 \end{cases} \quad (2.36б)$$

Подібним чином, накладається обмеження на величину абсолютного кута деформування всього канату чи системи канатів, та відносного кута одного елементу:

Таким же чином, формуємо обмеження для абсолютного кута деформації всього канату чи системи канатів, а також для відносного кута деформації окремого елементу.

$$|\theta_{max}| \leq \pi/4 \quad (2.36в)$$

$$|\theta_e - \theta_0| \leq \pi/12 \quad (2.36г)$$

Інші обмеження включають обмеження для додатної (стискуючої відповідно до прийнятої системи знаків) осьової сили в ЗР, яка не може перевищувати половину базової сили, оскільки канат може допускати лише розтягуючі сили. Серед знайдених часткових коефіцієнтів вибирається найменший, який приймається як m_a .

Процес визначення m_s також описано в [1]. Екстремальна величина геометричного параметру (переміщення, кут) знаходиться на попередній ітерації, і фіксується точка, де знаходиться ця величина. Якщо на наступній ітерації знак цієї величини змінюється, процес вважається розбіжним, і обирається коефіцієнт збіжності $m_- = 0.5$. У протилежному випадку процес уточнення прискорюється, і обирається коефіцієнт збіжності $m_+ = 1.27$. Таким чином, на кожній ітерації коефіцієнт $m_{i,s}$ постійно уточнюється за вказаним правилом.

$$m_{i,s} = m_{i-1,s} \cdot \begin{cases} m_+ = 1.27 & \text{if sign is the same} \\ m_- = 0.5 & \text{if sign is different} \end{cases} \leq 1 \quad (2.36д)$$

Уточнення компонентів БР. Коефіцієнт сповільнення, який задовольняє

умові $m \leq 1$, є однаковим для всіх елементів системи і застосовується до всіх параметрів БР. Базові положення початкових точок всіх елементів розраховуються по формулах:

$$\vec{P}_{B,i} = \vec{P}_{B,i-1} + m(u_{0,i}\vec{t}_{0,i} + w_{0,i}\vec{n}_{0,i} + v_0\vec{\beta}_{0,i}) \quad (2.37a)$$

де $u_{0,i}$, $w_{0,i}$, v_0 отримуємо з розрахунків ЗР.

Уточняємо базову кривизну по наступній формулі:

$$k_{s,i} = k_{s,i-1} + m \frac{\theta_{e,i}(s=l_b) - \theta_{0,i}(s=0)}{l_{b,i-1}} \quad (2.37б)$$

У випадку 3D геометрії, коли у правій частині (2.37б) другий доданок є великим за модулем та від'ємним, може трапитися гіпотетична ситуація, при якій базова величина $k_{s,i}$ стає від'ємною. Це протирічить обраному вище напрямку нормального вектору. Тому ми завжди підтримуємо цю величину у від'ємному значенні, але у даному випадку розглядаємо її як:

$$k_{s,i} = 0.5 \cdot k_{s,i-1} \quad (2.37в)$$

Базова осьова сила залишається постійною по всій довжині елементу, тоді як поправочна сила змінюється вздовж неї. Таким чином, для уточнення ми використовуємо умовне середнє значення ЗР, як, наприклад, половину суми величин на початку та в кінці елементу:

$$N_{b,i+1} = N_{b,i} + m(N_{i,0} + N_{i,e})/2 \quad (2.37г)$$

Необхідно також ще одне додаткове обмеження для зміни осьової сили. У випадку канату вона повинна завжди бути розтягуючою (негативною). Це можна врахувати шляхом введення наступного обмеження:

$$\text{Якщо } N_{b,i+1} \geq 0.5N_{b,i} \quad \text{тоді} \quad N_{b,i+1} = 0.5N_{b,i} \quad (2.37д)$$

Знайдене $N_{b,i+1}$ дає змогу перерахувати основну довжину відповідно до фізичного принципу (2.22а).

Вибір початкових векторів $\vec{\beta}_0$ та \vec{n}_0 , включаючи вибір вектора \vec{t}_0 здійснюється за визначеною процедурою вибору початкової геометрії, яка в нашому методі може практично бути будь-якою. Щодо уточнення цих значень після отримання ЗР, то відповідно до формул (2.25д) та (2.31б), а також

описаної вище процедури уточнення, ми можемо записати наступний вираз:

$$\vec{t}_{0,i+1} = \frac{(\vec{t}_{0,i} + \vec{n}_{0,i} m \theta_{0,i} - \vec{\beta}_{0,i} m \psi_{0,i} \cos(\gamma_0))}{\sqrt{1 + (m \theta_{0,i})^2 + (m \psi_{0,i} \cos(\phi_0))^2}} \quad (2.38a)$$

Щодо вибору вектора \vec{n}_0 в просторовому випадку, ми припускаємо, що напрямок зовнішньої сили відомий і збігається з глобальним напрямком, тобто діє паралельно $(-\vec{j})$. У цьому випадку кривизна, тобто зміна кута деформації θ , повинна відбуватися навколо \vec{j} . Додатній напрям θ обираємо від вектора \vec{t} до \vec{n} , тому \vec{n}_0 повинен містити складову вектора \vec{j} . Отже, вектор \vec{n}_0 формується наступним чином:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{j} - (\vec{j} \cdot \vec{t}_0) \vec{t}_0}{\sqrt{1 - (\vec{j} \cdot \vec{t}_0)^2}} = \frac{\vec{j} - (\vec{j} \cdot \vec{t}_0) \vec{t}_0}{\sqrt{1 - (\vec{j} \cdot \vec{t}_0)^2}} \quad (2.38б)$$

Звідси бінормальний вектор $\vec{\beta}_0$ визначається так:

$$\vec{\beta}_0 = \vec{\beta} = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) = \vec{t}_0 \times \vec{n}_0 = \frac{\vec{t}_0 \times \vec{j}}{\sqrt{1 - (\vec{j} \cdot \vec{t}_0)^2}} \quad (2.38в)$$

Розглянемо умови припинення процедури уточнення геометрії. Формально, процедура повинна завершитися, коли результати змінюються мінімально і не впливають на БР. Звісно, можна вручну контролювати процес, відстежуючи зміни в основній геометрії. Тим не менше, введемо можливість автоматичного припинення процесу за визначеними принципами.

1. Моніторинг збіжності базується на рівняннях (2.36б) та (2.36д). Зважаючи на те, що осьова сила єдиний внутрішній силовий параметр, логічно проводити контроль саме за цим параметром. Таким чином, якщо поправка до базової сили, що дорівнює $m(N_{i,0} + N_{i,e})/2$, тричі поспіль стає меншою, скажімо, 10^{-8} , це вважається одним з обов'язкових критеріїв зупинки. Ще одним можливим критерієм є зміна кривизни протягом трьох послідовних ітераційних кроків. Наприклад, якщо зміна кривизни $m \frac{\theta_{e,i}(s=l_b) - \theta_0(s=0)}{l_{b,i-1}}$ не перевищує $10^{-5}/L$, де L - характеристична довжина, це також слугує критерієм зупинки.

2. Встановлюється мінімальна кількість ітерацій, наприклад, I_{min} , яка дорівнює $50 \cdot \sqrt{J}$, якщо процес не може бути припинений.

3. Визначається максимальна кількість ітерацій, наприклад, I_{max} , яка дорівнює $500 \cdot \sqrt{J}$, коли настане зупинка.

Стосовно початкової геометрії та натягу (осьової сили): Основна мета алгоритму полягає в забезпеченні збіжності незалежно від початкової геометрії. Таким чином, в усіх розглянутих прикладах початкова геометрія віддалена від правильної. Зазвичай всі компоненти канатної конструкції розташовані в одній і тій же позиції, зазвичай біля границі системи. Іноді, з метою наочності, всі елементи розташовані у випадковому порядку в конкретній області.

Щодо вибору початкового натягу та кривизни. Для прийняття рішення враховуються дві вхідні величини - розподілена сила P_n та довжина розглядуваного елемента l_0 . Для ініціалізації геометрії ми припускаємо, що кривизна елемента дорівнює $\pi/(30l_0)$ (іншими словами, кут елемента рівний $\pi/30$). Потім використовуючи рівняння геометрії та фізичне рівняння рівноваги, ми визначаємо значення початкового натягу і кривизни.

$$k_{b0} = \frac{\Delta\theta}{l_0} = \frac{P_n}{N} \quad (2.39a)$$

Також початкову силу натягу каната берем наступним чином:

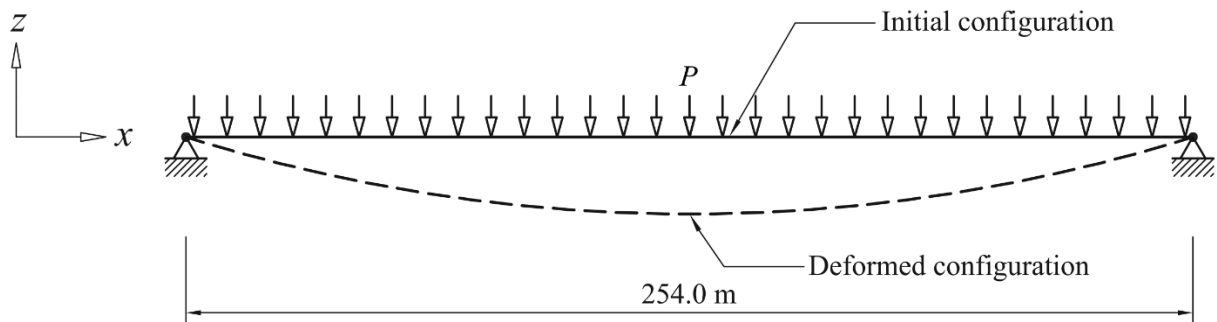
$$N_{b,0} = 30 \frac{P_n}{\pi} l_0 \quad (2.39b)$$

Отже, ми завжди використовуємо початкове базове значення осьової сили $N_{b,0}$ відповідно до рівняння (2.39б). Щодо початкової кривизни елемента, то вона не завжди обирається, як описано вище. Можна розглядати елемент як відрізок прямої лінії, тобто $k_{b0} = 0$. Важливо відзначити, що у всіх розглянутих нами прикладах ці початкові вибори не суттєво впливали на збіжність отриманих результатів.

2.3 Приклади обчислень

2.3.1 Ізольований канат

Розглянемо типовий приклад попередньо натягнутого канату - Мал 2.8, який широко аналізується у великій кількості робіт, включаючи [40, 46, 49, 182]. Основні характеристики цього канату такі: площа поперечного перерізу $A = 41.935 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, модуль пружності $E = 138 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ і фізична довжина $L_0 = 253.746 \text{ м}$. Канат розташований горизонтально, а відстань між його кінцями складає $L=254$ м. Отже, довжина канату менша за відстань між закріпленими точками, вказуючи на його попередній розтяг. На канат також впливає його вага, позначена як p .



Мал 2.8. Канат під дією власної ваги.

У Таблиці 2.3 подані відомості щодо результатів отриманих різними дослідниками по обчисленню максимального зміщення в центральній точці канату. Щодо точності визначення, то порівнюючи конкретні значення з результатами для $J = 100$ елементів, виявлено, що похибка для аналізу з використанням лише одного елемента становить 0.047%, з двома елементами - 0.02%, з 6 елементами - 0.002%, і з 10 елементами - 0.0006%.

Зазначимо, що для цієї відносно простої задачі можна отримати аналітичні рішення. Можемо представити наближене рівняння прогину каната у формі параболічного рівняння:

$$Z(x) = -\frac{m}{N \cdot 2} Lx + \frac{m}{N \cdot 2} x^2 \quad (2.40a)$$

Геометричну (деформовану) довжину, L_d , лінії (2.40a) порахуємо як:

$$L_d = \int_0^L \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} \right) dx \approx \int_0^L \left(1 + 0.5 \left(-\frac{m}{N^2} L + \frac{m}{N} x \right)^2 \right) dx = L + \frac{L}{6} \left(\frac{mL}{N^2} \right)^2 \quad (2.40б)$$

Розглянемо фізичну довжина канату в деформованому стані. Нехай δ позначає відносну різницю між початковою довжиною каната та відстанню між опорами. Відповідно до закону Гука довжина L_d , залежить від початкової довжини, L_0 , та ступеня її деформації ε :

$$L_d = L_0(1 + \varepsilon) = L(1 - \delta)(1 + \frac{N}{EA}) \quad (2.40в)$$

Порівнюючи геометричну і фізичну довжини, ми отримаємо:

$$\frac{1}{6} \left(\frac{mL}{2N} \right)^2 = -\delta + \frac{N}{EA} \quad (2.40г)$$

Визначена згідно з наближеним рівнянням (2.40г) сила N підставляється в формулу (2.39а). Це дозволяє знайти переміщення в центральній точці при $x = L/2$. Результати аналітичного обчислення за допомогою формули (2.39а) представлені в Таблиці 2.3 у останньому рядку. Важливо відзначити високу точність цього наближеного підходу для розглянутої задачі.

Таблиця 2.3. Задача ізольованого канату (Мал. 2.8). Порівняння результатів обчислень

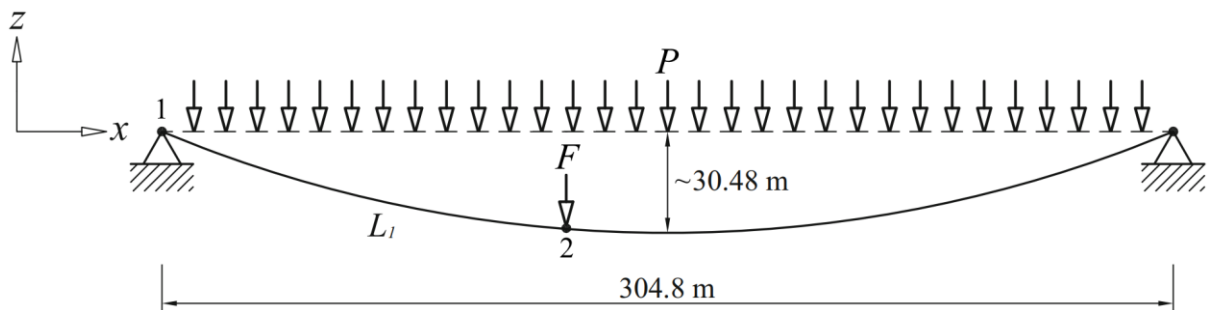
Вага, p (Н/м)	Робота [182]	Робота [49]	Робота [40]	Робота [46]	Наші ре-ти	Формула (2.39а)
3.50254	3.34112	3.343402	3.34264	3.3413	3.33836	3.33498
10.5076	5.94436	5.948426	5.8674	5.9473	5.94675	5.93877
17.5127	7.43179	7.436866	7.3152	7.4316	7.43442	7.42213
24.5178	8.52754	8.535162	8.4074	8.5263	8.53288	8.51638
31.5228	9.41934	9.426702	9.3472	9.4135	9.42411	9.40343

Малюнок 2.9 відображає інший простий канат, з механічними та геометричними параметрами, які наведені в роботі [49]: площа поперечного січення $A = 548.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, модуль пружності $E = 131 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, початкова довжина канату $L_0 = 312.73 \text{ м}$ та відстань між опорами $L = 304.8 \text{ м}$. На момент початкового навантаження власною вагою $p = 46.1167 \text{ Н/м}$ канат має

провисання у формі наближеної параболи з максимальним провисом в центральній точці, рівним 30.48 м (згідно з обчисленнями).

Після цього до канату прикладається зосереджена сила $F = 35.586$ кН у точці 2, яка розташована на відстані $L_1 = 125.847$ м від точки 1 - лівого краю канату. Задача полягає у визначенні вертикального та горизонтального положення точки 2.

Дослідження даної задачі також виконано у наукових працях [36, 48, 49, 183], вказані і наші результати розрахунків подані у Таблиці 2.4. Всі отримані дані мають хорошу відповідність. Щодо точності обчислень, то виявлено, що розділення на два елементи майже рівноцінне використанню $J = 100$ елементів. Це пояснюється тим, що головний внесок у зміну геометрії вносить зосереджена сила. Таким чином, належна реалізація умов взаємодії між двома сусідніми елементами, між якими прикладена сила, гарантує високу точність обчислень.



Мал. 2.9 Дія концентрованої сили та розподіленої маси на суцільний канат.

Таблиця 2.4. Переміщення точки 2 у вертикальному та горизонтальному напрямках для задачі Мал 2.9.

Переміщення точки 2, м	Робота [49]	Робота [183]	Робота [48]	Робота [36]	Наші резу-ти
вертикальне	-5.62508	-5.62661	-5.47207	-5.6239	-5.62554
горизонтальне	-0.66504	-0.85954	-0.84521	-0.8592	-0.85954

2.3.2. Гнучкий райзер як ланцюгова лінія.

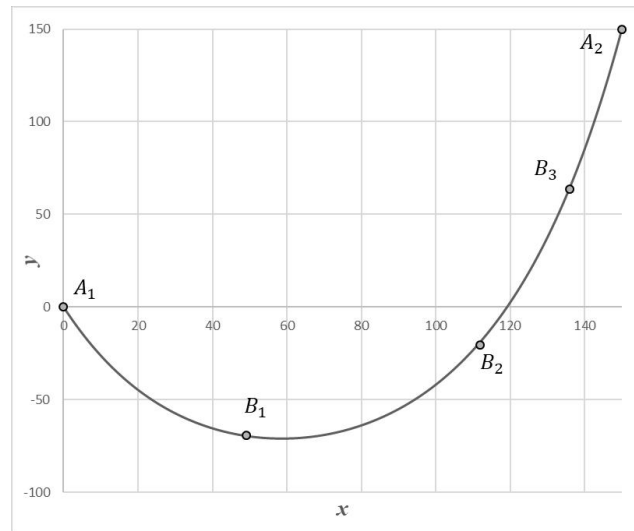
Це відомий в літературі приклад, що стосується моделювання форми трубопроводу, що з'єднує підводну нафтову вишку та танкер (див. Малюнок 2.10). Трубопровід має довжину 350 метрів, вишка розташована на глибині 150 метрів нижче рівня моря, а танкер розміщений на відстані 150 метрів по горизонталі. Цей конкретний випадок ми розглядали у роботах [1,2]. Тут ми акцентуємо увагу на розгляді додаткових лінійних членів у представленні навантаження і їх впливу на точність отриманих результатів.

1. *Типовий канат.* Тут канатна система розглядається як достатньо жорстка, тобто вона не видовжується. Основні характеристики включають осьову жорсткість $EF = 1.538 \times 10^9 \text{Н}$, вагу $Wgt = 897 \text{Н/м}$ та початкову довжину $l=350 \text{м}$. Для вивчення впливу кількості елементів розбивки та вибору типу ЗР на точність результатів обираємо три характерні точки канату, які рівномірно розташовані по його довжині на відстанях від початку: $s_1 = 87.5 \text{м}$, $s_2 = 175 \text{м}$ та $s_3 = 262.5 \text{м}$. Ми позначаємо їх як B_1, B_2, B_3 відповідно, як показано на Малюнку 2.10.

Представляє інтерес вплив кількості елементів розбивки J на точність. Для цього порівнюємо положення точок B_n , де $n = 1, 2, 3$, з їхніми положеннями у референсному випадку, обраним як рішення при $J = 200$. У Таблиці 2.5 наведені декартові координати цих точок та їх відносна різниця відносно референсного випадку, виражена у відсотках. Різниця обчислюється як відхилення точок від референсного положення, поділене на значення 200 м (максимальне відхилення ланцюгової лінії від прямої лінії, що з'єднує закріплені точки). Це значення представлене як максимальне серед відхилень по горизонталі (Δx) та вертикалі (Δy). Досліджувалися різні варіанти початкового положення елементів, але варто відзначити, що остаточні результати завжди були збіжними і швидко досягалися.

Важливо відзначити, що дуже точний результат було отримано за допомогою лише чотирьох елементів. Щодо моделювання навантаження, то

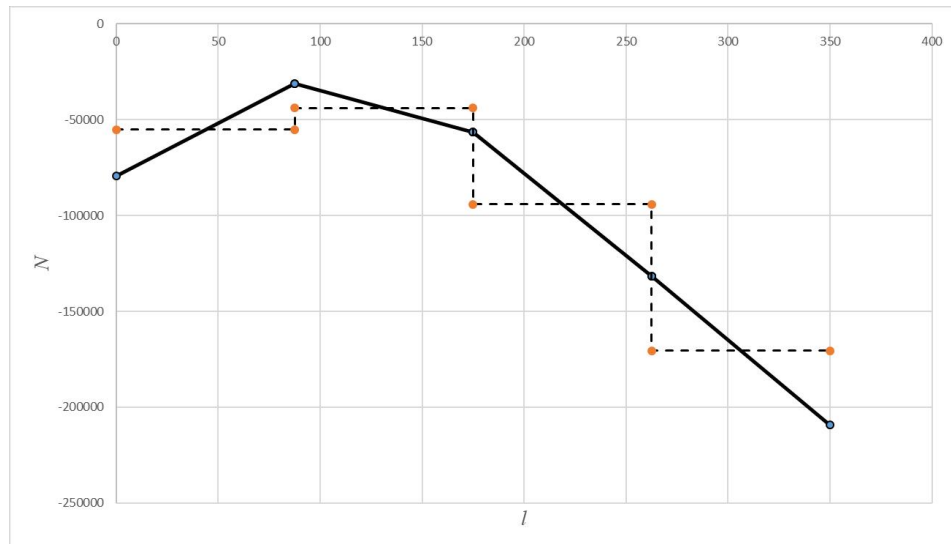
додаткове врахування лінійних компонент навантаження разом із однорідними дозволяє досягти трохи кращих результатів (на 25-30%). Використання 12 елементів забезпечує точність приблизно 0.25%, тоді як 20 елементів дають точність на рівні приблизно 0.1%, як показано в Таблиці 2.5.



Мал 2.10. Модель геометричного положення жорсткого райзера

Таблиця 2.5. Розрахункові положення точок B_n при врахуванні лінійної компоненти навантаження

Кількість елементів	Точка	Координата		Похибка (лінійне навантаження) %	Похибка (однорідне навантаження) %
		x	y		
4	B1	52.5425	-66.44	2.169683	2.901860
	B2	118.655	-21.9225	3.412727	4.218641
	B3	139.066	63.095	1.520365	1.863914
8	B1	49.706	-68.3916	0.459771	0.642786
	B2	113.205	-20.7757	0.628070	0.82153
	B3	136.649	63.4334	0.300109	0.390682
12	B1	49.3013	-68.7961	0.175560	0.253172
	B2	112.481	-20.6163	0.257401	0.352166
	B3	136.305	63.4868	0.126049	0.170093
20	B1	49.1684	-68.9806	0.061968	0.088193
	B2	112.159	-20.5461	0.092619	0.127989
	B3	136.146	63.5119	0.045564	0.061774
200	B1	49.1032	-69.086	-	0.000224
	B2	111.978	-20.5067	-	0.0001
	B3	136.056	63.5262	-	0.00005

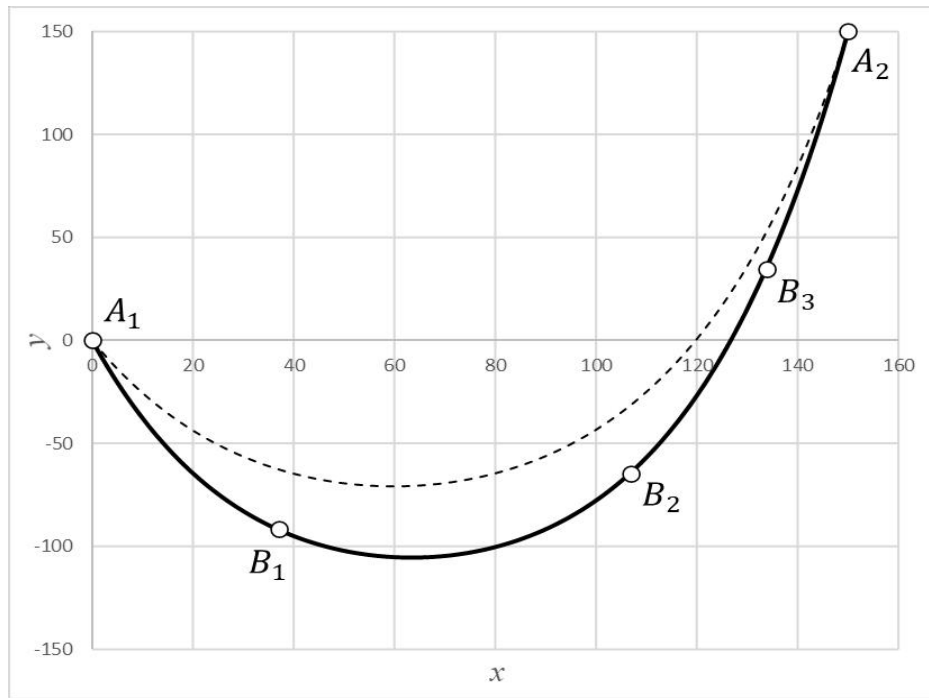


Мал 2.11. Розподіл осьової сили для чотирьох елементної розбивки райзера: повні значення (суцільна лінія) і базові значення (штрихова лінія)

Малюнок 2.11 показує на розподіл базової осьової сили (позначене штриховою лінією) та повної осьової сили (позначене суцільною лінією) при розбивці канату на 4 елементи для остаточного рішення. Навіть при тому, що відношення різниці значень $(N_{i,0} - N_{i,e})$, що представляє відхилення осьової сили в межах одного елемента, до значення базової сили може сягати 100% (наприклад, для першого елемента), точність розрахунку залишається задовільною (див. Таблицю 3). Це відношення може служити критерієм вибору необхідної кількості елементів; чим менше це відношення, тим більша точність результатів може бути очікувана.

2. *Дуже податливий канат* У цьому випадку ми розглядаємо збільшення розподіленого навантаження (ваги) каната в 300 разів, тобто приймаємо $Wgt = 269100 \text{ Н/м}$ (еквівалент зменшення жорсткості каната у 300 разів), і порівнюємо ці результати із тими, де враховувалася лише однорідна навантаження.

Співставлення положення "реального" каната і "податливого" каната показано на Мал 2.12. Положення характерних точок B_n , представлені в Таблиці 2.6. Очевидно, що при невеликій кількості елементів врахування розв'язків для лінійних членів навантаження може збільшувати на 25-30%.



Мал 2.12. Положення точок райзера зі збільшеною в 300 разів податливістю

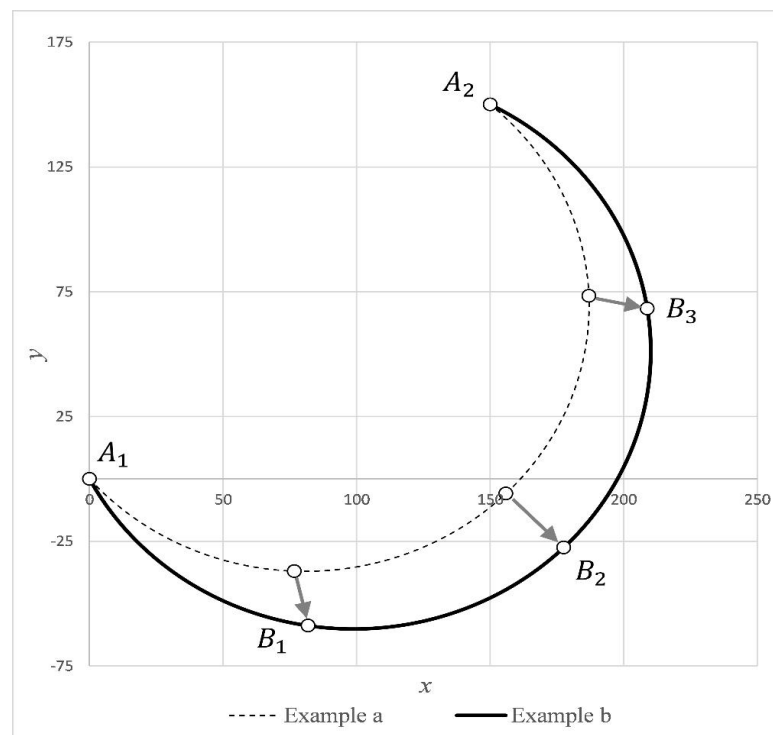
Таблиця 2.6. Положення точок B_n для збільшеної в 300 раз податливості

Кількість елементів	Точка	Координата		Різниця (лінійне навантаження) %	Різниця (однорідне навантаження) %
		x	y		
4	B1	40.754	-88.7694	2.517296	2.877017
	B2	115.106	-63.8979	4.421256	5.150786
	B3	137.714	35.445	2.094657	2.471132
8	B1	36.12	-91.1365	0.315274	0.331463
	B2	107.594	-64.6793	0.684429	0.986040
	B3	134.328	34.7477	0.376026	0.529700
12	B1	36.5365	-91.2698	0.153562	0.164405
	B2	107.192	-64.9999	0.435412	0.563032
	B3	134.07	34.5872	0.225369	0.288774
400	B1	36.5734	-91.5747	-	0.00005
	B2	106.376	-65.304	-	0
	B3	133.653	34.4161	-	0

3. Податливий канат при нормальному навантаженні. У цьому випадку демонструються переваги розробленого нами аналітичного канатного елемента - ми можемо розглядати різні закони навантаження, які не обмежені напрямком вздовж однієї глобальної осі, як це робиться при розрахунках для

ланцюгової лінії. Розглядаються дві різні величини прикладеного по нормалі до лінії прогину навантаження. Перша величина становить $P_{n,0} = 897\text{Н/м}$, а друга величина більша в 300 разів. Повна (остаточна) геометрія показана на Мал. 2.13.

Результати розрахунку положення точок інтересу B_1, B_2, B_3 наведені в Таблиці 2.7 і Таблиці 2.8 відповідно. Очевидно, що навіть за умови використання лише одного елемента отримується висока точність значень. Цей приклад вказує на те, що основним джерелом похибок у даному методі є представлення зовнішніх сил, які не завжди можуть бути точно апроксимовані за допомогою однорідної і лінійно змінної компонент розподілу. Тим не менше, перевагою нашого підходу є можливість його покращення шляхом врахування інших членів розкладу навантаження, таких як квадратний, кубічний, тригонометричний і т.д.



Мал 2.13. Розрахункові положення характерних точок при нормальному навантаженні, що дорівнює: а) звичайній вазі, б) вазі збільшеній в 300 раз

Таблиця 2.7. Положення точок B_n для навантаження по нормалі

Кількість елементів	Точка	Координата		Різниця %
		x	y	
1; чи 200	B1	76.6576	-36.9622	0
	B2	155.883	-5.88322	0
	B3	186.962	73.3424	0

Таблиця 2.8. Положення точок B_n для збільшеного в 300 разів нормального навантаження

Кількість елементів	Точка	Координата		Різниця %
		x	y	
1; чи 200	B1	81.1289	-55.6749	0
	B2	174.432	-24.432	0
	B3	205.675	68.8711	0

2.3.3 Складні плоскі системи

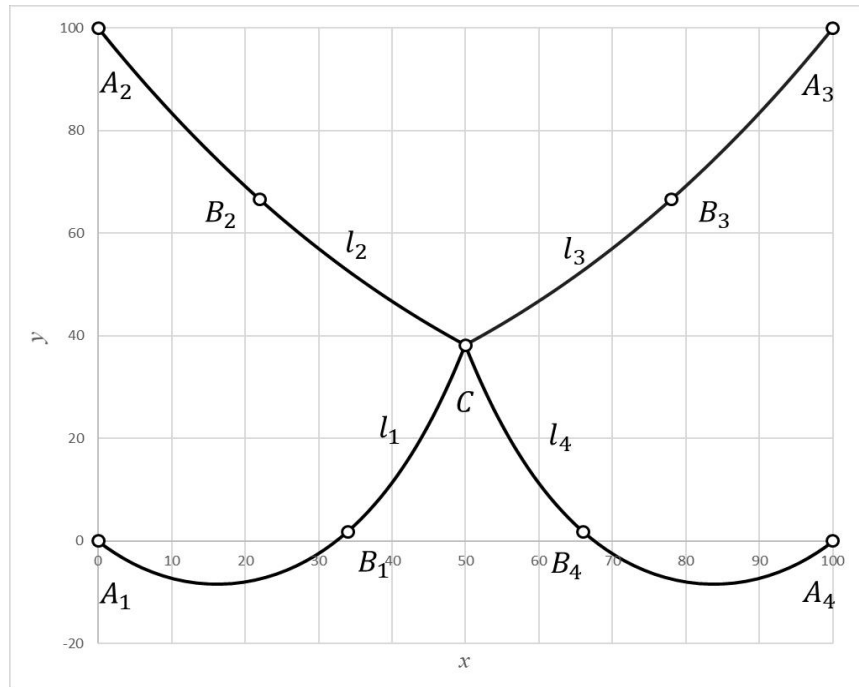
Для перевірки ефективності алгоритму обчислення розглянемо складну систему з чотирьох канатів. Граничні точки цих канатів фіксуються в вершинах прямокутника, і всі чотири кінці збігаються в одній точці, положення якої зазвичай є невідомим. Чотири канати зафіксовані в точках $A_1(0; 0)$; $A_2(0; 100)$; $A_3(100; 100)$; $A_4(100; 0)$, тоді як інші чотири кінці канатів збігаються в вузлі C , згідно з Мал. 2.14. Осьова жорсткість для всіх канатів приймається $EF = 4.3111 \times 10^4 \text{ Н}$, вага становить $Wgt = 6724 \text{ Н/м}$.

Розглядаються різні початкові довжини l_1, l_2, l_3, l_4 чотирьох окремих канатів, Мал. 2.14. Розрахунки представлені для середньої точки кожного канату (B_1, B_2, B_3, B_4) та для точки вузла C . Для визначення поняття точності, ми спочатку визначаємо відносну різницю у максимальному положенні (по напрямку x або y) для заданої кількості розбивок кожного канату та для дуже великої кількості розбивок (зазвичай це сто елементів). Потім ця різниця ділиться на характерну довжину цієї системи канатів, яку ми вважаємо рівною $L = 100 \text{ м}$, так і визначається відносна точність.

1. *Всі елементи однієї довжини, Мал 2.14.* Прийmemo довжини канатів: $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 80\text{м}$. Дана система має симетричну конфігурацію, де два верхні канати є досить натягнутими, а два нижні канати є досить провисаючими. Результуюча геометрія відображена на Малюнку 2.14. Координати точок B_1, B_2, B_3, B_4, C та розбивка для кожного канату, показані у Таблиці 2.9.

2. *Система з єдиним канатом що провисає, Мал 2.15.* Система із одним провислим канатом, позначена як на Мал. 2.15. Канати характеризується початковими довжинами: $l_1 = 20; l_2 = 40; l_3 = 120; l_4 = 60\text{м}$. У даному випадку лише один канат стає провислим, а решта канатів є дуже натягнутими, де деформація видовження може становити до 80%, врахування такої великої деформації є досить проблематичним для інших методів. Проте в нашому методі результати дуже швидко збігаються, і вони подаються для точок B_1, B_2, B_3, B_4 і вузлової точки C , у Таблиці 2.10.

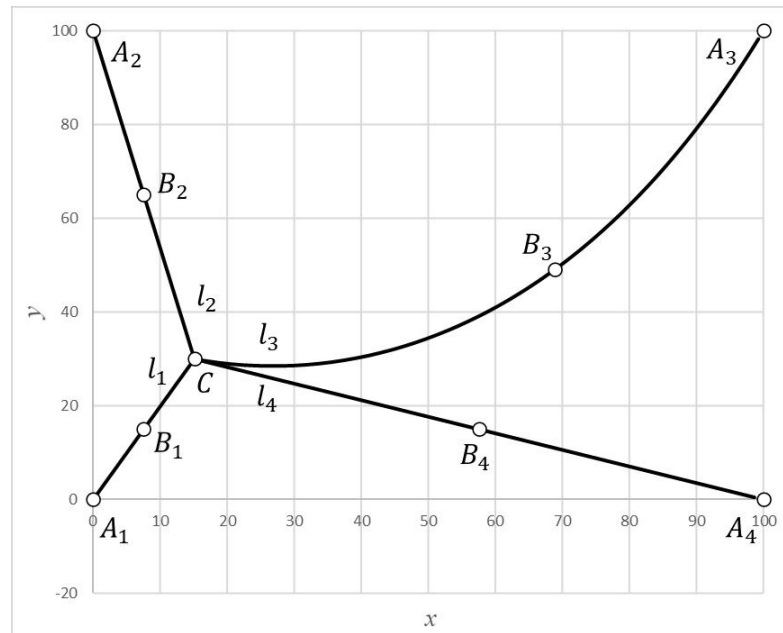
3. *Несиметрична система з парою провислих і парою натягнутих канатів, Мал 2.16.* Вибираючи такі початкові довжини як $l_1 = 80; l_2 = 40; l_3 = 120; l_4 = 80\text{м}$ метрів, і проводячи розрахунки, отримаємо остаточне положення для цієї системи, як зображено на Мал. 2.16. Відповідні розрахункові координати характерних точок та відносна похибка обчислень представлені в Таблиці 2.11. Навіть у випадку розбивки натягнутих канатів тільки на два елементи для них уже досягається точне рішення. Для провислих канатів при такій же двохелементній розбивці похибка є більшою і становить 1%. Використання чотирьох елементної розбивки для провислих канатів зменшує похибку вдвічі.



Мал 2.14. Симетрична система канатів де $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 80\text{м}$

Таблиця 2.9. Положення характерних точок для симетричної системи із 4-х канатів довжини 80 метрів.

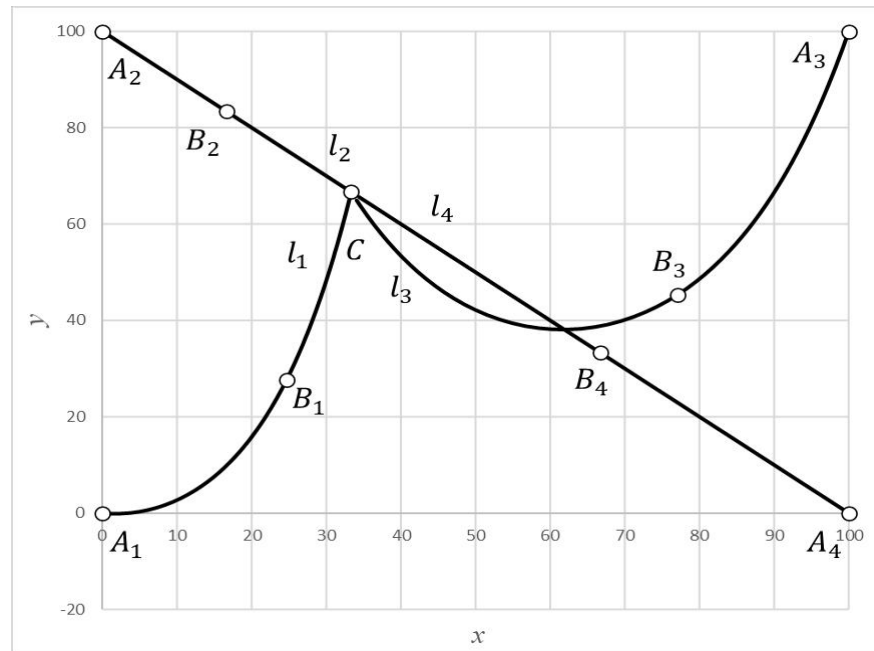
Число еле-тів для кожного канату	Точки	Координати		похибки %
		x	y	
2	B1	34.6325	1.60379	0.710376
	B2	21.8599	66.5474	0.0524
	B3	78.1401	66.5474	0.138844
	B4	65.3675	1.60379	0.710376
	C	50	38.2729	0.138844
4	B1	34.2749	1.74134	0.327381
	B2	21.9376	66.5971	0.0185
	B3	78.0624	66.5971	0.046609
	B4	65.7251	1.74134	0.327381
	C	50	38.239	0.046609
50	B1	33.9648	1.8463	-
	B2	21.977	66.622	-
	B3	78.023	66.622	-
	B4	66.0352	1.8463	-
	C	50	38.2205	-



Мал 2.15. Система з одним канатом, що провисає, і трьома натягнутими.

Таблиця 2.10. Положення точок для системи з одним канатом що провисає і трьома натягнутими.

Кількість елементів для кожного канату	Точки	Координати		похибки %
		x	y	
2	B1	7.55184	14.9922	0
	B2	7.5518	64.9922	1E-05
	B3	69.1764	48.8838	0.351093
	B4	57.5517	14.9918	0
	C	15.1036	29.9845	1E-04
4	B1	7.55184	14.9922	0
	B2	7.55181	64.9922	0
	B3	68.9548	49.0272	0.087441
	B4	57.5517	14.9918	0
	C	15.1037	29.9845	0
50	B1	7.55184	14.9922	-
	B2	7.55181	64.9922	-
	B3	68.8772	49.0675	-
	B4	57.5517	14.9918	-
	C	15.1037	29.9845	-

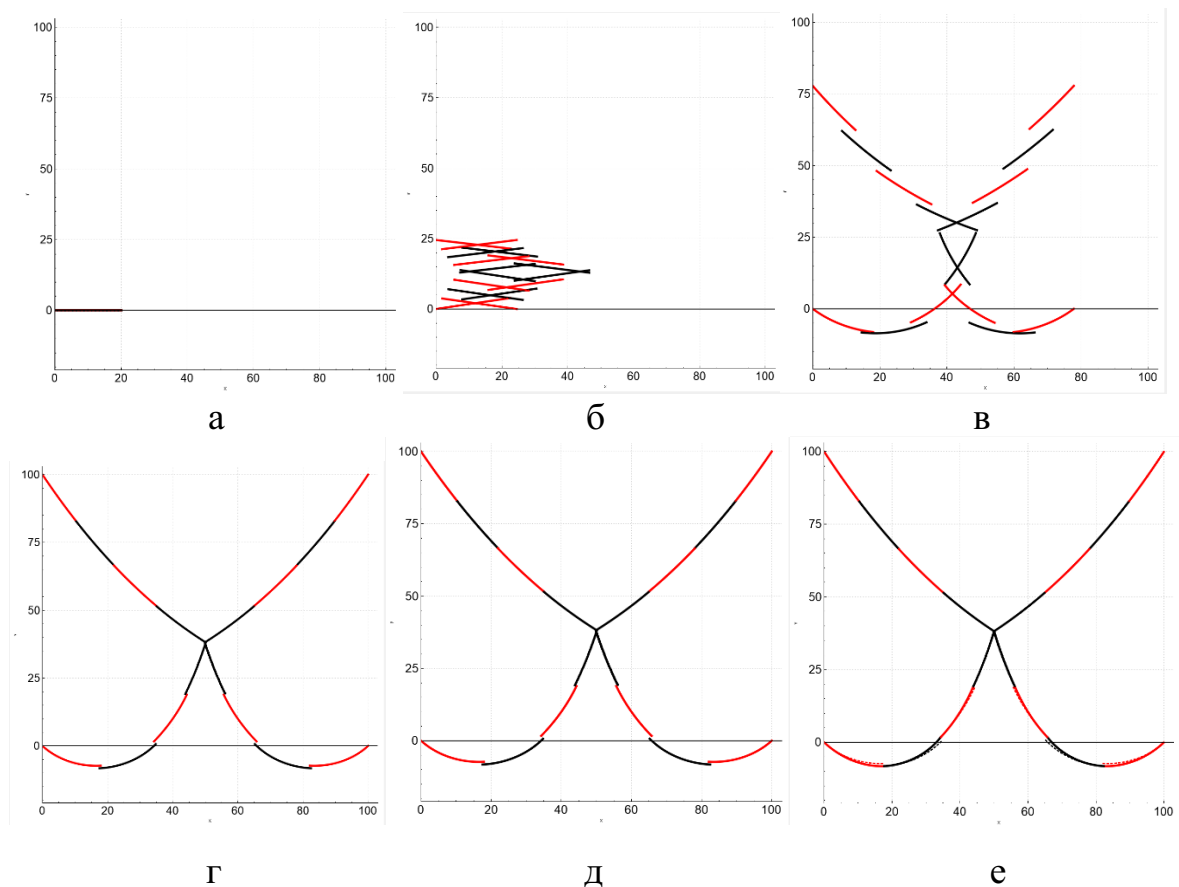


Мал. 2.16. Несиметрична система з парою провислих і парою натягнутих канатів

Таблиця 2.11. Розрахункові положення для несиметричної системи з парою провислих і парою натягнутих канатів

Число елементів для кожного канату	Точки	Координати		похибки %
		x	y	
2	B1	25.891	27.3873	1.254312
	B2	16.664	83.3297	0.0001
	B3	77.1815	45.2394	0.147149
	B4	66.6633	33.3288	0.0001
	C	33.3284	66.66	0.0002
4	B1	24.88	27.6002	0.221149
	B2	16.664	83.3296	0
	B3	77.5668	45.1413	0.543706
	B4	66.6633	33.3288	0.0001
	C	33.3284	66.6599	1E-04
50	B1	24.6641	27.6481	-
	B2	16.664	83.3296	-
	B3	77.0453	45.2951	-
	B4	66.6633	33.3287	-
	C	33.3284	66.6598	-

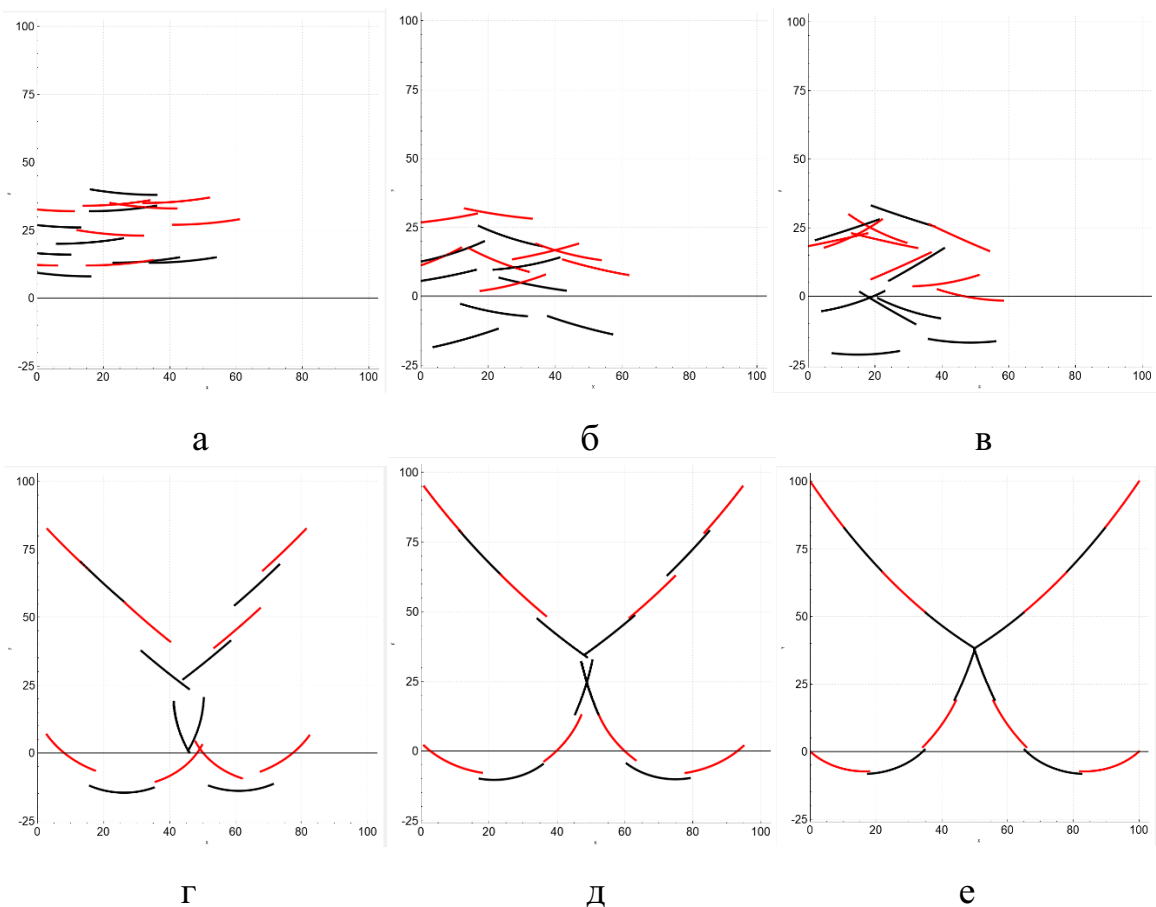
4. Еволюція зміни геометрії системи при тотожному початковому розташуванні її елементів. У всіх розглянутих прикладах всі елементи були направлені горизонтально зліва направо і початково розміщувалися біля лівої точки. Мал 2.17 показує еволюцію зміни геометрії для першого прикладу, де розглядалася симетрична система з канатами довжиною $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 80\text{м}$. В свою чергу, кожен канат утворювався чотирма елементами, де для наочності парні елементи позначені чорним, а непарні - червоним кольорами. Повне остаточне рішення показано суцільною лінією, а БР позначено штриховою лінією.



Мал 2.17. Еволюція зміни базової геометрії під час ітераційної процедури розрахунку: а) початкове положення; б) 1-ша ітерація; в) 5-та ітерація; г) 10-та ітерація; д) 15-та ітерація; е) остаточне рішення.

Як можна помітити, геометрія швидко змінюється з кожною ітерацією, спрямовуючись до правильної конфігурації. Вже на п'ятій ітерації досягається загальна конфігурація, яка подібна на правильний розв'язок, на десятій ітерації – дуже близька до правильної конфігурації. Правильне рішення, надалі вже незмінне, досягається на 20-ій ітерації. Усе це свідчить про високу ефективність запропонованого методу розрахунку та уточнення.

5. Демонстрація збіжності при випадковому початковому розміщенні елементів. Знову розглянемо систему з попереднього прикладу. Єдина відмінність – береться випадкове початкове положення кожного з елементів. Всі елементи для спрощення оцінки динаміки збіжності розміщені в межах квадрату 50×50 м з лівим нижнім кутом що прилягає до початку координат.



Мал 2.18. Динаміка зміни базової геометрії під час ітераційної процедури розрахунку: а) початкове розміщення; б) 1-ша ітерація; в) 5-та; г) 10-та; д) 12-та; е) повне рішення, 20-та ітерація.

2.3.4 Просторові системи.

Три канати закріплені у точках P_1, P_2, P_3 та з'єднані в одній спільній точці M , як показано в Малюнку 2.19. Цей випадок часто аналізується в літературі, проте для нього часто використовують різні параметри жорсткості та навантаження. Причина полягає в тому, що канати обираються достатньо жорсткими, і в певних межах рівень жорсткості елемента, навантаження вже не впливає на кінцеву геометрію. Детальніше це буде розглянуто нижче.

Для однозначності порівнянь ми використовуємо такі ж вхідні дані як і в дисертації Джірона [184], Таблиця 2.12. Хоча в цьому прикладі співвідношення осьової жорсткості і маси є фізично нереальним, він дозволяє розглянути випадок коли відстань між точками закріплення перевищує фізичну довжину канатів. В якості навантаження, окрім взаємного натягу між канатами, розглядається вертикальна зосереджена сила $F=100\text{ Н}$ в точці з'єднання канатів M .

Таблиця 2.12. Геометричні та фізичні характеристики просторової канатної системи [184]

Параметр, положення	Величина
Точка закріплення P_1 (x,y,z)	(260,786,201) м
Точка закріплення P_2 (x,y,z)	(320, 790, 685) м
Точка закріплення P_3 (x,y,z)	(15, 771, 680) м
Довжина канату C_1	418 м
Довжина канату C_2	193.7 м
Довжина канату C_3	149.23 м
Власна погонна вага канату, WGT	0.1 Н/м
Пружна жорсткість канату, EF	100 ГН

У Таблиці 2.13 наведено порівняння наших даних з результатами двох підходів наведених в роботі Джірона [184], з використанням різної кількості елементів (позначено як n1 чи n128). Перший підхід моделював неперервне представлення осьової сили на межі між сусідніми елементами, а другий – розривне. Результати гарно узгоджуються між собою, особливо це стосується координат положення точки M . Проте значення осьових сил в кожному з трьох

канатів (позначені як N1 у першому, N2 у другому та N3 у третьому канатах) мають певні відмінності. Це частково пояснюється з тим, що в дисертації [184] не вказано, в якій саме точці визначається сила. В нашому методі сила є неперервною, визначається як сума БР та ЗР і однозначно визначається для кожної точки. Наші дані в Таблиці 2.13 отримані при застосуванні 1, 2 або 10 елементів в кожному канаті.

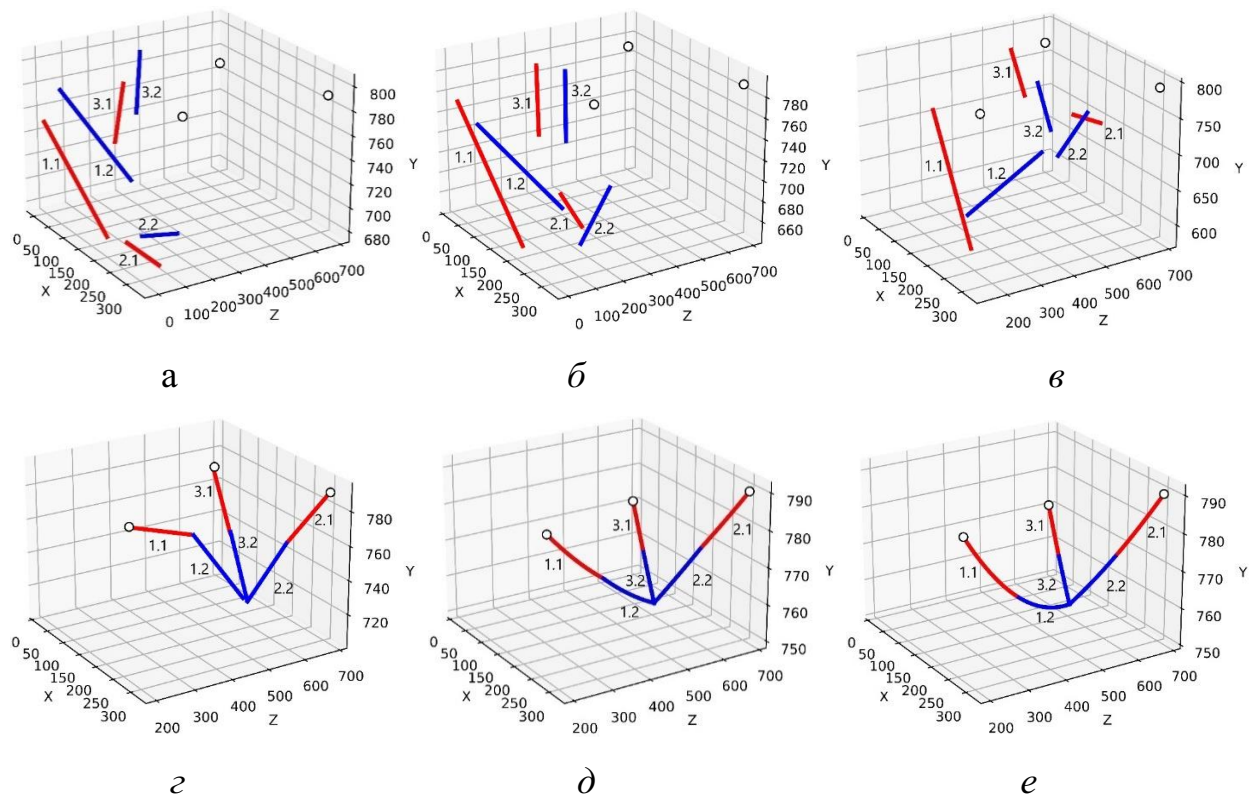
Таблиця 2.13. Порівняння наших результатів з даними Джірона [184]

Метод, розбивки	x	y	z	N1	N2	N3
Джірона неперервний (n1)	145.49	751.72	610.24	318	296.9	407.1
Джірона неперервний (n128)	145.49	751.72	610.24	318.4	297	407.1
Джірона розривний (n1)	145.49	751.72	610.24	318	296.9	407.1
Джірона розривний (n128)	145.49	751.72	610.24	318.4	297	407.1
Наші результати, j=1	145.494	751.725	610.236	316.983	297.239	407.396
Наші результати, j=2	145.494	751.726	610.236	317.071	297.315	407.501
Наші результати, j=10	145.494	751.726	610.236	317.101	297.34	407.536

Предметом дослідження була також зміна геометрії системи, яка відбувається в процесі ітераційного уточнення. Послідовні зміни базової геометрії відображені на Малюнку 2.19, де використовувалися всього два елементи для кожного канату. Початкові положення всіх шести елементів були вибрані дуже віддаленими від правильної геометрії. Однак навіть в такому випадку з кожною наступною ітерацією базова геометрія швидко «переміщується» до правильного рішення і фактично досягає його за 20 ітераційних кроків. Це додатково підтверджує високу ефективність аналітичних рішень і процедур уточнення.

Незважаючи на успішне вирішення цього прикладу, важливо відзначити наступне. Фактично, цей вже добре відомий у літературі приклад, є достатньо стандартним. Він не може належним чином продемонструвати переваги

конкретного методу та процедур уточнення під час проведення ітерацій. Крім того, велика жорсткість канатів не гарантує однакових результатів для інших параметрів навантаження. Остаточне положення точки M , наприклад, залежить від відношення розподіленої ваги кожного канату та сили, яка діє в точці M . Однак у деяких статтях, присвячених аналізу цієї проблеми, зовсім не згадується величина зосередженої сили, що ускладнює порівняння результатів.



Мал 2.19. Розвиток базової геометрії 3D системи: а) початкове положення; б) 1-ша ітерація; в) 2-га; г) 10-та; д) 15-та; е) 20-та ітерація, повне рішення.

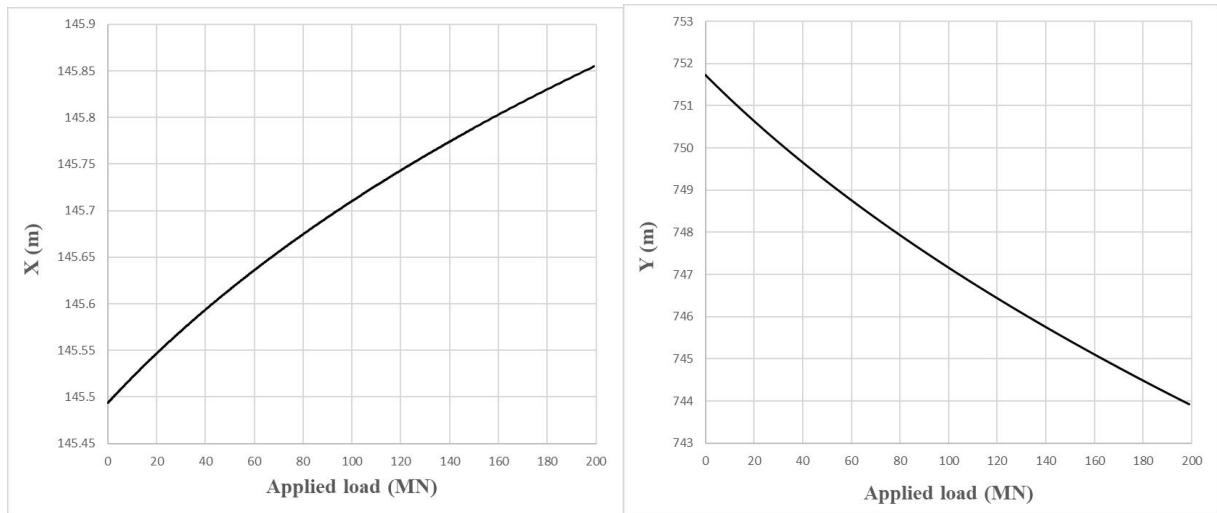
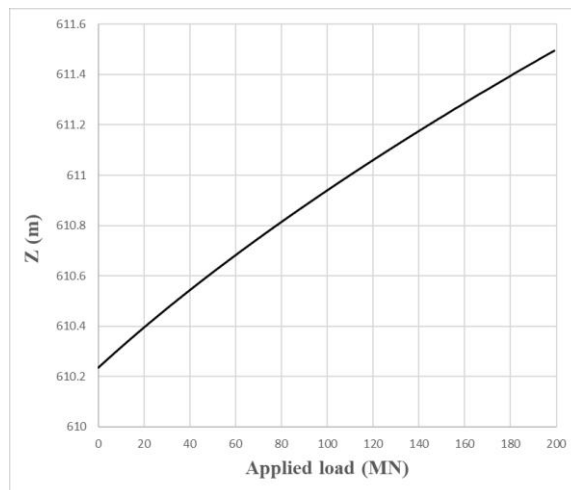
Дослідимо як впливає на положення точки з'єднання канатів, M , різне співвідношення між величиною вертикальної сили, F , та вагою, WGT . Результати такого дослідження наведено в Таблиці 2.14. Хоча значення наведених силових факторів є дуже малими, що не викликають помітного видовження канатів (деформації), все рівно отримані значення положення

точки M відрізняються між собою. Це може пояснити розбіжні значення положення точки M , які подаються в літературі.

Таблиця 2.14. Розташування центральної точки в залежності від різних співвідношень між розподіленим та зосередженим навантаженням.

WGT	F	x	y	z
0.1	100	145.494	751.726	610.236
0.2	50	145.409	754.094	609.521
1	10	145.282	757.469	608.628

Для ускладнення завдання та перевірки можливостей методу, а також створення реального тесту для інших методів, ми проведемо аналіз впливу інтенсивності зовнішньої сили на положення центральної точки M . Введемо параметр співвідношення між зосередженою силою і розподіленою вагою, що має розмірність в метрах, і зафіксуємо його рівним 1000 метрів. Очевидно, що це значення корелює з довжиною канатів, тобто інтенсивність зосередженої сили корелює з сумарною інтенсивністю розподілених навантажень. Потім ми будемо поступово збільшувати навантаження для створення значних деформації канатів і, відповідно, зміни положення центральної точки. Важливо відзначити, що подібна задача вже розглядалася в роботі [185], де розглядалася можливість виникнення пластичних деформацій. На жаль, у цій роботі не надано достатньо вхідних даних для перевірки та порівняння результатів. Таким чином, дотримуючись загальної логіки постановки проблеми, як в роботі [185], наводимо нижче детальні вхідні та вихідні дані. Зокрема, на рис. 2.20 подається положення точки M в залежності від величини сили.

*a**б**в*

Мал 2.20. Положення точки прикладення сили від інтенсивності сили: а) x положення; б) вертикальне положення y ; в) z положення

Висновки за розділом 2

1. Розглянутий відносно простий приклад канату з зосередженими силами, що не вимагає розробки аналітичного поправочного рішення, оскільки всі зміни геометрії концентруються в точках прикладення сил. Показано, що популярний метод стрільби не забезпечує збіжності результатів і не може бути основою побудови розрахункових алгоритмів. Разом з тим, метод базових рішень (абсолютних координат) є стійким при довільних значеннях сил, початкових довжин і характеристик видовження канату.

2. Запропоновано нові ГН рішення для плоских канатів, яка фактично є

альтернативою широко використовуваному рішення ланцюгової лінії. Ці рішення враховують рівномірне та лінійно розподілене навантаження як для нормального, так і для тангенціального напрямків. Наприклад, вони може забезпечити абсолютно правильний результат для розтяжного канату при рівномірному нормальному навантаженні навіть для одноелементної сітки.

3. Система рівнянь спряження сформульована для тривимірних вузлів, де кілька канатів зустрічаються разом. Ці рівняння пристосовані до загальної методики представлення кінцевого розв'язку у вигляді суми базових і згладжувальних розв'язків. Порівняно з 2D випадком, введено два додаткові ступені свободи щодо повороту та переносу з площини. Вони стосуються лише згладжувального рішення. Основна геометрія залишається плоскою.

4. Усі розглянуті плоскі та просторові приклади демонструють ідеальну збіжність процедури незалежно від обраної початкової позиції. Навіть коли положення всіх елементів розміщені випадковим чином у просторі та незалежно від їх порядку в системі, процедура є стабільною та точною. Усі вхідні та вихідні дані вичерпно представлені для подальшого порівняння та перевірки.

РОЗДІЛ 3. МЕТОД БАЗОВИХ І ЗГЛАДЖУВАЛЬНИХ РІШЕНЬ ДЛЯ ПЛОСКИХ БАЛОК

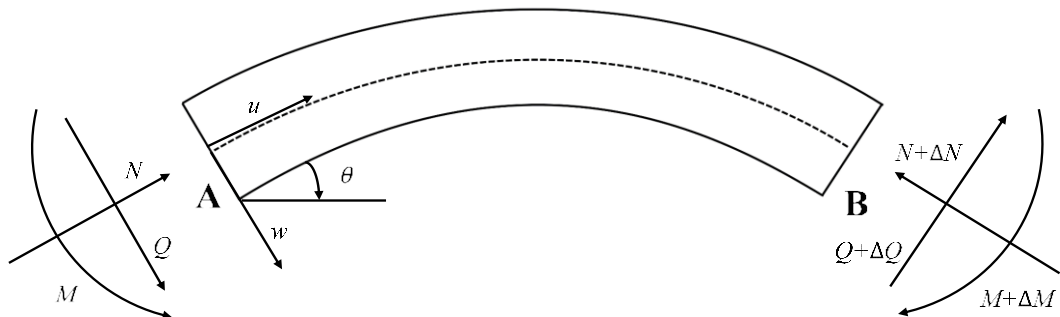
3.1 Ідея методу, поняття базової геометрії.

Базовий елемент ГН балки являє собою частину кола радіусом R (чи кривизною $k = 1/R$) з поточною довжиною, Δs , (початкова довжина, Δs_0), Мал. 3.1, де початок координат, а також координата довжини або φ як кутова координата, пов'язані з лівою частиною елемента [1]. Два локальні вектори описують конфігурацію елемента: дотичний вектор \vec{t} (\vec{t}_0 на початку елемента), і вектор нормалі \vec{n} (\vec{n}_0 на початку елемента), спрямований до центру кола, при цьому зберігаються такі співвідношення:

$$d\vec{t}/ds = d\vec{t}/(Rd\varphi) = \vec{n} \quad (3.1a)$$

$$d\vec{n}/ds = d\vec{n}/(Rd\varphi) = -\vec{t} \quad (3.1b)$$

Поправочне рішення розраховується для заданої базової геометрії. Поправочне рішення для балки на заданій ітерації i описується шістьма незалежними змінними, це: осьові та нормальні переміщення u та w , спрямовані вздовж \vec{t} та \vec{n} відповідно; осьові та нормальні сили N і Q , напрямлені вздовж \vec{t} і \vec{n} ; кут повороту θ , спрямований від \vec{t} до \vec{n} ; згинальний момент M , тут (на лівому кінці) направлений протилежно θ . Звертаємо увагу, що в аналізі канату ми не оперуємо поняттями Q і M .



Мал. 3.1. Напрямки та позначення криволінійного елемента

Базова геометрія характеризується поточною довжиною та кривизною. Для 2D випадку лише дві компоненти сили відносяться до БР на i ітерації. Це

– осьова сила $N_{b,i}$ і згинальний момент $M_{b,i}$ – обидва постійні в усьому елементі. Щоб відрізнити їх від тих самих параметрів ЗР, використовуємо для них нижній індекс « b ». Ці два силові фактори однозначно визначають основну довжину, Δs_i , і кривизну, k_i , елемента. У загальному випадку ми повинні записати таку матричну залежність між ними [186]:

$$\begin{pmatrix} \Delta s_i \\ k_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{b,i} \\ M_{b,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta s_0 \\ k_0 \end{pmatrix} \quad (3.2a)$$

де α є деякими константами, визначеними спеціальними процедурами, наприклад, наведеними в [187], для будь-якого поперечного перерізу. У найпростішому випадку довгої і спочатку прямолінійної балки при малих пружних деформаціях ця залежність набуває вигляду:

$$\Delta s_i = \Delta s_0 \left(1 - \frac{N_{b,i}}{EF} \right) \quad (3.2б)$$

$$k_i = k_0 + \frac{M_{b,i}}{EI} = \frac{M_{b,i}}{EI} \quad (3.2в)$$

де E – модуль пружності, F – площа поперечного перерізу, I – момент інерції, $k_0 = 0$ – початкова кривизна елемента, прийнята за нуль у всіх наведених нижче прикладах.

Базова геометрія елемента характеризується положенням його початкової точки в глобальних координатах $\vec{P}_A(X_0, Y_0)$ і базовими векторами \vec{t}_0 та \vec{n}_0 (Мал. 3.1). Тоді положення будь-якої іншої точки, включно з кінцем елемента, $B(X_e, Y_e)$ можна легко визначити за рівнянням:

$$\vec{P}_B = \vec{P}_A + \Delta \vec{P}_{BA} \quad (3.3a)$$

де:

$$\Delta \vec{P}_{BA} = \vec{t}_0 \cdot R \sin \varphi + R(1 - \cos \varphi) \cdot \vec{n}_0 \quad (3.3б)$$

Коли радіус кривизни дуже великий $R \rightarrow \infty$ (відповідно, кутова координата дуже мала), обчислення по формулі (3.3б) можуть дати чисельно неправильний результат. У цьому випадку нам потрібно використовувати розширення в ряд Тейлора:

$$\Delta \vec{P}_{BA} = \vec{t}_0 \cdot s \left(1 - \frac{\varphi^2}{3!} + \frac{\varphi^4}{5!} \right) + \vec{n}_0 \cdot s \varphi \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi^2}{4!} \right) \quad (3.3в)$$

Де $s = R\varphi$ ($0 < s < \Delta s_i$) — координата довжини елемента. Розширення (3.3в) застосовується, коли кутова довжина елемента $\Delta\varphi = \Delta s_i/R$ дуже мала, скажімо, вона менша, ніж $\Delta\varphi \leq 0.002$. Тоді, з одного боку, значення $\varphi > 0.002$ забезпечує чисельну точність розрахунку (на комп'ютері) по формулі (3.3б), з іншого боку, розрахунок згідно з (3.3в) при $\Delta\varphi = 0.002$ може дати відносну максимальну похибку $\Delta\vec{\Pi}_{BA}/s$ яка дорівнює $(0.002)^5/(6!)$. Зауважимо, що подібне (3.3в) розширення, буде використовуватися всюди нижче у випадках малих $\Delta\varphi$, щоб уникнути машинних помилок комп'ютерних розрахунків.

Основні одиничні вектори в будь-якій точці обчислюються за звичайними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \vec{t}_0 \cos\varphi + \vec{n}_0 \sin\varphi \\ \vec{n} &= -\vec{t}_0 \sin\varphi + \vec{n}_0 \cos\varphi\end{aligned}\quad (3.3г)$$

Звертаємо увагу, що для канатів ми також оперували поняттям базової кривизни, яка там не мала відношення до згинального моменту.

3.2 Згладжувальне рішення

Розглянемо рівняння (3.2б). Це фізично правильне рівняння, яке відповідає визначенню пружних деформацій. Кінцеве значення $N_{u,i}$ є сумою БР, $N_{b,i}$ і ЗР, N_i , де ЗР, як зазвичай, буде записуватися нижче без будь-яких індексів. Вставимо його в (3.2б), щоб мати вираз для приросту довжини:

$$\Delta s_{u,i} = \Delta s_0 \left(1 - \frac{N_{b,i} + N_i}{EF}\right) = \Delta s_0 \left(1 - \frac{N_{b,i}}{EF}\right) \left(1 - \frac{N_i/EF}{(1 - N_{b,i}/(EF))}\right) = \Delta s_i \left(1 - \frac{\Delta s_0}{\Delta s_i} \frac{N_i}{EF}\right) \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) показує фактичне співвідношення між поправочною осьюовою силою та поправочною осьюовою деформацією та буде використовуватися в керуючих рівняннях. Запишемо ці рівняння для балки. Вони були приведені в попередніх роботах [126,127]:

$$\frac{dQ}{Rd\varphi} + \frac{N_u}{R_u} = P_n \quad \frac{dN}{Rd\varphi} - \frac{Q}{R} = P_t \quad \frac{dM_u}{Rd\varphi} = Q \quad (3.5а-в)$$

$$\frac{d\theta}{Rd\varphi} = \frac{M}{EI}, \quad \frac{du}{Rd\varphi} - \frac{w}{R} = -\frac{N}{EF} \frac{s_0}{s} \quad \frac{dw}{Rd\varphi} + \frac{u}{R} = \theta \quad (3.5г-е)$$

Перше рівняння (3.5а) можна переписати у двох формулюваннях. Перше є так званим лінійним, де ми приймаємо в (3.5а), що кривизна на кожній ітерації, $1/R_u$, є постійною для елемента, тобто $1/R_u = 1/R$. Друге це лінеаризована постановка першого порядку, коли $1/R_u = 1/R + k$, тобто кривизна має дві складові – основну (базову) та додаткову, спричинену поточним згинальним моментом $3P$, тобто $k = M/(EI)$. У першому випадку маємо:

$$\frac{dQ}{Rd\varphi} + \frac{N}{R} = P_n - \frac{N_b}{R} = \widehat{P}_n \quad (3.6a)$$

де для зручності введено поняття приведеної нормальної розподіленої сили, \widehat{P}_n . У другому випадку це рівняння виглядає так:

$$\frac{dQ}{Rd\varphi} + (N_b + N)\left(\frac{1}{R} + k\right) = P_n \quad \text{або} \quad \frac{dQ}{Rd\varphi} + \frac{N}{R} + N^b \frac{M}{EI} = \widehat{P}_n \quad (3.6b)$$

В свою чергу (як буде показано нижче) рівняння (3.6б) поділяється на два випадки в залежності від величини базової сили: а) велика розтягуюча (від'ємна) сила та б) стискуюча чи невелика розтягуюча сила. Таким чином, в залежності від величини (чи способу врахування) базової сили N_b розрізняємо три розрахункових випадки отримання згладжувальних рішень як рівнянь зв'язку початку та кінця для балки з постановочних рівнянь (3.5а-е). Остаточні формули (без опису їх виведення) приведені в додатку, проте тут покажемо більш детально процедуру їх отримання на прикладі рішення перших трьох рівнянь (рівнянь рівноваги) (3.5а-в).

А) Лінійний випадок, кривизна лише базова.

З системи рівнянь (3.5б-в) та (3.6а) маємо спочатку диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2Q}{Rd\varphi^2} + \frac{Q}{R} = \frac{d\widehat{P}_n}{Rd\varphi} - P_t \quad (3.7a)$$

А потім, можна отримати рішення цих трьох рівнянь в вигляді зручному для застосування МПП:

$$Q(s) = \cos \phi Q_0 + (-\sin \phi) N_0 + 0M_0 + \widehat{P}_n R \sin \phi + P_t R (\cos \phi - 1) \quad (3.7б)$$

$$N(s) = \sin \phi Q_0 + \cos \phi N_0 + 0M_0 + \widehat{P}_n R (1 - \cos \phi) + P_t R \sin \phi \quad (3.7в)$$

$$M(s) = R \sin \phi Q_0 + R(\cos \phi - 1)N_0 + M_0 + \hat{P}_n R^2(1 - \cos \phi) + P_t R^2(\sin \phi - \phi) \quad (3.7\Gamma)$$

Повні розв'язки рівнянь для лінійного випадку представлені в Додатку А.

Тепер розглянемо нелінійний випадок.

Візьмемо похідну по ϕ від рівняння (3.6а) та підставимо в нього (3.5б-в), отримаємо:

$$\frac{d^2 Q}{R d\phi^2} + \frac{Q}{R} \left(1 + \frac{N^b R^2}{EI}\right) = \frac{d\hat{P}_n}{R d\phi} - P_t \quad (3.8)$$

Рівняння (3.8а) в залежності від знаку виразу в дужках ділиться на два випадки. Коли вираз в дужках є додатнім рішення однорідного диференційного рівняння записується через тригонометричні функції, і коли від'ємним – то через експоненціальні функції. Тому розділимо:

Б) Експоненціальні рішення.

Введемо для зручності позначення:

$$\left(1 + \frac{R^2 N^b}{EI}\right) = -\mu^2 \quad (3.9a)$$

де величина $-\mu^2$ є завжди від'ємна. Власне вираз (3.9а) є умовою застосування експоненціального рішення, тобто звідси отримується необхідна вимога до величини базової сили. В даному випадку вона повинна бути не лише від'ємною (розтягуючою), але і бути меншою за число $-EI/R^2$. Для розуміння різниці між лінійним і лінеаризованим рішенням приведемо лінеаризоване ГН експоненціальне ЗР для силових компонент:

$$Q(\phi) = Q_0 \operatorname{ch} \mu \phi - N_0 \frac{\operatorname{sh} \mu \phi}{\mu} + M_0 \frac{\mu^2 + 1}{R \mu} \operatorname{sh} \mu \phi + \hat{P}_n R \frac{\operatorname{sh} \mu \phi}{\mu} + R P_t \frac{(1 - \operatorname{ch} \mu \phi)}{\mu^2} \quad (3.9б)$$

$$\begin{aligned} N(\phi) = & Q_0 \frac{\operatorname{sh} \mu \phi}{\mu} + N_0 \frac{\mu^2 - (\operatorname{ch} \mu \phi - 1)}{\mu^2} + M_0 \frac{(\mu^2 + 1)(\operatorname{ch} \mu \phi - 1)}{\mu^2 R} + \\ & + \hat{P}_n R \frac{(\operatorname{ch} \mu \phi - 1)}{\mu^2} - R P_t \left(\frac{\operatorname{sh} \mu \phi - (\mu^2 + 1)\mu \phi}{\mu^3} \right) \end{aligned} \quad (3.9в)$$

$$M(\phi) = Q_0 \frac{R \operatorname{sh} \mu \phi}{\mu} + N_0 \frac{R(1 - \operatorname{ch} \mu \phi)}{\mu^2} + M_0 \left(\frac{\mu^2 \operatorname{ch} \mu \phi + (\operatorname{ch} \mu \phi - 1)}{\mu^2} \right) + \hat{P}_n R \frac{R(\operatorname{ch} \mu \phi - 1)}{\mu^2} + R P_t \left(\frac{R \mu \phi - R \operatorname{sh} \mu \phi}{\mu^3} \right) \quad (3.9\Gamma)$$

Повні розв'язки рівнянь для експоненціального випадку представлені в Додатку Б.

В) Тригонометричні рішення.

Введемо для зручності позначення:

$$\left(1 + \frac{R^2 N^b}{EI} \right) = \mu^2 \quad (3.10a)$$

де величина μ^2 є завжди додатня. Вираз (3.10a) є умовою застосування тригонометричного рішення. В даному випадку базова сила повинна бути не меншою за величину $-EI/R^2$, тобто стискаючою, або незначно розтягуючою. Для розуміння різниці між всіма трьома наборами рішень, приведемо тут ГН тригонометричне ЗР для силових компонент:

$$Q(\phi) = Q_0 \cos \mu \phi - N_0 \frac{\sin \mu \phi}{\mu} - M_0 \frac{(\mu^2 - 1) \sin \mu \phi}{\mu R} + \hat{P}_n R \frac{\sin \mu \phi}{\mu} + \frac{R P_t}{\mu^2} (\cos \mu \phi - 1) \quad (3.10б)$$

$$N = Q_0 \frac{\sin \mu \phi}{\mu} + N_0 \left(\frac{\mu^2 + (\cos \mu \phi - 1)}{\mu^2} \right) + M_0 \frac{(\mu^2 - 1)(\cos \mu \phi - 1)}{\mu^2 R} + \hat{P}_n R \frac{(1 - \cos \mu \phi)}{\mu^2} + R P_t \left(\frac{\sin \mu \phi + (\mu^2 - 1) \mu \phi}{\mu^3} \right) \quad (3.10в)$$

$$M(\phi) = Q_0 \frac{R \sin \mu \phi}{\mu} + N_0 \frac{R(\cos \mu \phi - 1)}{\mu^2} + M_0 \left(\frac{\mu^2 \cos \mu \phi - (\cos \mu \phi - 1)}{\mu^2} \right) + \hat{P}_n R \frac{R(1 - \cos \mu \phi)}{\mu^2} + R P_t \frac{R(\sin \mu \phi - \mu \phi)}{\mu^3} \quad (3.10г)$$

Повні розв'язки рівнянь для тригонометричного випадку представлені в Додатку В.

Таким чином, на прикладі цих компонент рішення видно принципові відмінності між трьома різними випадками. Проте структурно, для врахування

в комп'ютерній програмі, всі вони представляються однотипно, у матричній формі, зручній для застосування МПП:

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ w(s) \\ \theta(s) \\ Q(s) \\ N(s) \\ M(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}, \beta_{15}, \beta_{16} \\ \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \beta_{24}, \beta_{25}, \beta_{26} \\ \beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}, \beta_{34}, \beta_{35}, \beta_{36} \\ \beta_{41}, \beta_{42}, \beta_{43}, \beta_{44}, \beta_{45}, \beta_{46} \\ \beta_{51}, \beta_{52}, \beta_{53}, \beta_{54}, \beta_{55}, \beta_{56} \\ \beta_{61}, \beta_{62}, \beta_{63}, \beta_{64}, \beta_{65}, \beta_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta_0 \\ Q_0 \\ N_0 \\ M_0 \end{pmatrix} + \hat{P}_n \begin{pmatrix} \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{2n} \\ \varepsilon_{3n} \\ \varepsilon_{4n} \\ \varepsilon_{5n} \\ \varepsilon_{6n} \end{pmatrix} + P_t \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \varepsilon_{4t} \\ \varepsilon_{5t} \\ \varepsilon_{6t} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Значення коефіцієнтів матриці та стовпців вільних членів як функції координати довжини для всіх трьох випадків врахування впливу базової сили на змінену кривизну даються в Додатках А-В. Відмітимо, що при малих значеннях аргументу всіх функцій (це максимальні значення на ділянці для величини ϕ – для лінійного випадку, та величини $\mu\phi$ – для нелінійного випадку), ці формули можуть давати значні штучні неточності, що спричинені наближеністю округлень в комп'ютері. Власне тому, наводяться також і наближені розклади отриманих виразів в ряд Тейлора при малих значеннях $\mu\phi$. Як приклад необхідності таких розкладів, проаналізуємо один з аналітичних складових виразів лінійного рішення:

$$E = R^4 \left(1 - \cos\phi - \frac{\phi \sin\phi}{2} \right) \quad (3.12a)$$

Розкладемо його в ряд Тейлора:

$$E = R^4 \left(1 - \left(1 - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^4}{24} - \frac{\phi^6}{6!} + \frac{\phi^8}{8!} \dots \right) - \left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{3! \cdot 2} + \frac{\phi^6}{5! \cdot 2} - \frac{\phi^8}{7! \cdot 2} \dots \right) \right) \approx$$

$$R^4 \left(\frac{\phi^4}{24} - \frac{\phi^6}{5! \cdot 2} \right) \approx \frac{s^4}{24} \left(1 - \frac{\phi^2}{15} + \phi^4 \frac{3 \cdot 4!}{8!} - \dots \right) \quad (3.12b)$$

Зафіксуємо абсолютну довжину елемента, тобто покладемо:

$$s = R\phi \equiv 1 \quad (3.12b)$$

і співставимо результати обчислень по «точним» і наближеним формулам, Табл. 3.1, з визначенням 15 значущих цифр. При $\phi = 1$ (що є досить великим значенням кута, тобто 57°), неочікувано отримуємо малу різницю, що є свідчення практичної можливості застосування таких розкладів. Якщо покласти $\phi = 0.1$, відносна похибка дорівнює лише $4 \cdot 10^{-11}$.

Очікується, що точне і наближене рішення зі зменшенням ϕ будуть практично співпадати. Проте приведені в Табл. 1 результати протирічать вказаному очікуванню. Так для значення $\phi = 0.01$ відносна похибка, хоча і мала, проте уже стає більшою; при $\phi = 0.001$ вона знову зростає і уже становить дві сотих процента. Зі зменшенням величини кута на наступний порядок похибка росте і результати уже відрізняються в рази і стають вкрай суперечливими, а з подальшим зменшенням кута уже ні про яку логіку «точної» формули говорити не приходиться.

Таблиця 3.1. Різниця розрахунків по формулах (3.12а) та (3.12б)

ϕ	$R^4(1 - \cos\phi - \frac{\phi \sin\phi}{2})$ “Точне” рішення	$\frac{s^4}{24} \left(1 - \frac{\phi^2}{15} + \phi^4 \frac{3 \cdot 4!}{8!} \right)$ Наближене рішення	$\% = \frac{(2)-(1)}{(2)}\%$ Похибка
1	0.038962	0.038963	0.002802
0.1	0.041639	0.041639	3.96E-09
0.01	0.041666	0.041666	-3.5E-06
0.001	0.041659	0.041667	0.018795
0.0001	-0.22054	0.041667	629.2965
0.00001	413.7852	0.041667	-992984
0.000001	44450291	0.041667	-1.1E+11

Очевидно, що уже при значеннях кута менше $0.05 \text{ рад} = \frac{180 \cdot 0.05}{\pi} = 2.85 \text{ град}$ – доцільно, а при значеннях кута менше 0.005 рад – необхідно – застосовувати наближений розклад в ряд Тейлора. Ми в подальшому в програмі автоматично приймаємо цю межу як рівну 0.02 рад .

Тому в додатку Б приведені і вирази, отримані розкладом в ряд Тейлора.

Виникає питання доцільності (меж) застосування кожного із наведених трьох наборів рішень: лінійних, експоненціальних та тригонометричних.

Перш за все відмітимо, що: а) тригонометричне і експоненціальні рішення «межують» одне з одним при $\mu \rightarrow 0$; б) лінійне рішення є частинним випадком ГН тригонометричного рішення при $\mu = 1$.

Розглянемо випадок а). Очевидно, що потрібно в будь-якому випадку застосовувати розклад в ряд Тейлора. Детальне співставлення розкладів для

тригонометричного і експоненціального ГН рішень при $\mu \rightarrow 0$ показує, що вони є ідентичними, якщо враховувати позначення (3.9а) та (3.10а). Тобто скажімо при $-0.0004 \leq \mu^2 \phi^2 \leq 0.0004$ можна брати «тригонометричні» рішення, проте коли пораховане по (3.10а) стає від'ємним, то і використовувати його як від'ємне. Це можливо, оскільки всі розклади містять лише парні степені μ^2, μ^4, μ^6 .

Розглянемо тепер випадок б), коли $\mu \rightarrow 1$. При малих ϕ^2 доцільно використовувати розклад лінійного рішення в ряд Тейлора. Тепер розглянемо, коли $\phi \neq 0$. Основна проблема полягає в тому, що вирази типу $\frac{\phi \sin \phi}{2}$ в лінійному випадку переходять в вирази $\frac{(\cos \phi - \cos \mu \phi)}{\mu^2 - 1}$ в нелінійному випадку.

Покажемо це:

$$Z = \frac{\cos \phi - \cos \mu \phi}{\mu^2 - 1} = \frac{\cos \phi - \cos ((1 + (\mu - 1))\phi)}{\mu^2 - 1} = \frac{\cos \phi - \cos \phi \cos(\mu - 1)\phi + \sin \phi \sin(\mu - 1)\phi}{\mu^2 - 1} \approx$$

$$\frac{\cos \phi - \cos \phi + \sin \phi \cdot (\mu - 1)\phi}{\mu^2 - 1} \approx \frac{\phi \cdot \sin \phi}{2} \quad (3.13a)$$

Як бачимо, при отриманні наближення (3.13) ми ділили нуль на нуль. Для аналітики – це можливо, проте це може призводити до машинних похибок округлення. Оцінімо похибку при довільному ϕ . Перепишемо середній вираз (3.13а) наступним чином:

$$Z \approx \frac{\cos \phi - \cos \phi \cdot \left(1 - \frac{(\mu - 1)^2 \phi^2}{2}\right) + \sin \phi \cdot \left((\mu - 1)\phi - \frac{(\mu - 1)^3 \phi^3}{6}\right)}{\mu^2 - 1} \approx \frac{\frac{(\mu - 1)\phi^2}{2} \cos \phi + \phi \sin \phi}{2 + (\mu - 1)} \quad (3.13b)$$

Як бачимо, заміна тригонометричного рішення на лінійне завжди приводить до похибок величини $\frac{(\mu - 1)}{2}$, тобто якщо $\mu - 1$ є нулем k – го порядку, то втрачається k значущих цифр. З іншої сторони, при діленні на нуль k – го порядку також втрачається k значущих цифр. Тому, якщо вважати, що комп'ютер оперує $2N$ розрядами, то якщо $\mu - 1$ є нулем N і менше порядку, то краще використовувати тригонометричні рішення. Якщо воно є нулем N і більше порядку, то краще використовувати лінійне рішення.

3.3 Організація ітераційного процесу

3.3.1 Загальний алгоритм процесу розрахунку

Ітераційний процес для розрахунків балки та уточнення її положення в цілому відповідає такому для канату. Ще раз опишемо послідовність основних кроків уточнення на кожній ітерації [1]:

1. При першому підготовчому обході фіксується базова геометрія системи, вона розбивається на базові елементи (базові положення і сили), і формується перелік елементів, напрямки дотичних і нормалей та початки і кінці кожного елемента. Для базових геометрій визначаються розриви (гепи), як різниці положень і базових сил між елементами і граничними умовами. Уточнюються коефіцієнти в поліноміальних законах зовнішнього навантаження, що спроектоване на одиничні вектори базової геометрії.

2. Розглядаються 6 параметрів (два переміщення, кут, момент та дві сили) ЗР в кожній точці елемента. Для кожного елемента вводяться 6 таких невідомих на початку і шість в кінці, тобто всього вводиться 12 невідомих.

3. По формулам виду (3.11) для кожного елемента формуються рівняння зв'язку, що пов'язують початок елемента та його кінь. Це дає 6 із необхідних 12 визначальних рівнянь.

4. Рівняння спряження і граничні умови дозволяють отримати другу половину необхідних рівнянь. Рівняння спряження записуються на границях між елементами, а також на границях тіла. Для сил і переміщень вони записуються як векторні рівняння неперервності з врахуванням розривів від базової геометрії. Для моментів та кутів (це тільки в плоскому випадку) скалярні рівняння неперервності враховують початкові гепи.

5. Для створеної системи рівнянь знаходиться розрахункове ЗР. Воно детально аналізується для кожного елемента, знаходиться абсолютна максимальна величина всіх параметрів. Встановлюється також характер зміни ЗР порівняно з попереднім ЗР, що дає змогу аналізувати чи є ЗР збіжним чи розбіжним. Це досягається шляхом порівнянням знаків екстремальних величин на двох послідовних. По найбільших відхиленнях від апріорі

встановлених величин встановлюється коефіцієнт сповільнення для усієї системи. Нове базове рішення розраховується як сума попереднього БР та ЗР зменшеного на коефіцієнт сповільнення.

6. Проводиться уточнення базового рішення, тобто «вбитих» сил та моментів і базового положення, напрямків першої точки, довжини і кривизни. Отримується силові і кінематичні гепи між елементами.

7. Розрахунки проводяться аж доки всі відповідні компоненти ЗР не стають знехтувально малими порівняно зі БР.

Після кожної ітерації нове базове положення початкової точки, $\vec{P}_{A,,}$, задається наступним рівнянням:

$$\vec{P}_{A,i+1} = \vec{P}_{A,i} + m(u_{0,i}\vec{t}_{0,i} + w_{0,i}\vec{n}_{0,i}) \quad (3.14a)$$

де $u_{0,i}, w_{0,i}$ результати розрахунку ЗР.

Базисні вектори в початковій точці визначаються з розрахованого кута повороту згідно ЗР, за формулою:

$$\vec{t}_{0,i+1} = (\vec{t}_{0,i} + \vec{n}_0 m \theta_{0,i}) / \sqrt{1 + (m \theta_{0,i})^2} \quad (3.14b)$$

де $\theta_{0,i}$ – кут повороту в початковій точці, що відноситься до ЗР. Вектор $\vec{n}_{0,i+1}$ знайдено як вектор, перпендикулярний $\vec{t}_{0,i+1}$, напрямком якого збігається з позитивною струмовою кривизною елемента згідно (6с).

Базовий момент і базова сила постійні. Таким чином, щоб скорегувати їх через ЗР, яке є змінним по довжині елемента, нам потрібно ввести деякі усереднені значення ЗР. Наприклад, взяти їх як півсуму значень на початку та в кінці елемента. Отже, маємо:

$$M_{b,i+1} = M_{b,i} + m(M_i(A) + M_i(B))/2 \quad (3.14b)$$

$$N_{b,i+1} = N_{b,i} + m(N_i(A) + N_i(B))/2 \quad (3.14г)$$

Нагадаємо, що точка A відноситься до початку, а B - до кінця елемента (Мал. 3.1). Наявність $M_{b,i+1}$ і $N_{b,i+1}$ дозволяє перерахувати базову довжину і кривизну відповідно до (6b) і (6с).

3.3.2 Граничні умови та умови спряження.

Оскільки базова геометрія в методі є розривною, то для того щоб отримати неперервне повне рішення потрібно компенсувати ці розриви. Це можна зробити врахувавши ці розриви в рівняннях спряження між елементами а також в граничних умовах.

Для кожного краю ми вводимо поняття розриву, GAP , $\overrightarrow{G^{j,j+1}}$, що є різницею базових параметрів, де j і $j + 1$ номери сусідніх елементів. Очевидно поняття розриву відноситься лише до базової геометрії, що є розривною, тому ми маємо наступні 6 розривів (4 були для канату) між кінцем j елемента та початком $j + 1$ елемента. Це:

- скалярна різниця основних моментів:

$$GM^{j,j+1} = M_b^{j+1} - M_b^j \quad (3.15a);$$

- векторна різниця основних осьових сил:.

$$G\vec{N}^{j,j+1} = N_b^{j+1}\vec{t}_0^{j+1} - N_b^j\vec{t}_e^j \quad (3.15б);$$

- скалярна різниця між кутами напрямків базових дотичних векторів в абсолютних координатах, ψ :

$$G\theta^{j,j+1} = \psi_0^{j+1} - \psi_e^j \quad (3.15в);$$

- векторна різниця базового положення точок:

$$G\vec{\Pi}^{j,j+1} = \vec{\Pi}_0^{j+1} - \vec{\Pi}_e^j \quad (3.15г)$$

Записується шість граничних рівнянь – два для переміщень у векторній формі, два для сил у векторній формі, одне скалярне для моментів і одне для кутів.

$$U_e^j\vec{t}_e^j + W_e^j\vec{n}_e^j - G\vec{\Pi}^{j,j+1} = U_0^{j+1}\vec{t}_0^{j+1} + W_0^{j+1}\vec{n}_0^{j+1} \quad (3.16a)$$

$$N_e^j\vec{t}_e^j + Q_e^j\vec{n}_e^j - G\vec{N}^{j,j+1} = N_0^{j+1}\vec{t}_0^{j+1} + Q_0^{j+1}\vec{n}_0^{j+1} \quad (3.16б)$$

$$M_0^{j+1} - M_e^j = GM^{j,j+1} \quad (3.16в)$$

$$\theta_0^{j+1} - \theta_e^j = G\theta^{j,j+1} \quad (3.16г)$$

Всі рівняння, окрім рівнянь для сил, застосовуються як написано. Що стосується рівнянь для сил, то важливо розуміти, що базова сила може на

порядки перевищувати нормальну (поправочну) поправочну силу. Поворот дотичного вектору на маленький кут спричиняє виникненню великої проекції базової сили на нормаль. Тому рівняння рівності сил в вузлі бажано записувати по деформованій схемі (аналогічно як ми отримували ГН рішення для рівнянь зв'язку). Прийнемо до уваги, що в деформованому стані вектор дотичної дається формулою (2.31б). Тому, відкинувши всі малі другого порядку, перепишемо (3.16б) в такому вигляді

$$N_e^j \vec{t}_e^j + Q_e^j \vec{n}_e^j - G \vec{N}^{jj+1} - N_b^{j+1} \theta_0^{j+1} \vec{n}_0^{j+1} + N_b^j \theta_0^j \vec{n}_e^j = N_0^{j+1} \vec{t}_0^{j+1} + Q_0^{j+1} \vec{n}_0^{j+1} \quad (3.16д)$$

Це на відміну від (3.16б) дає ГН рівняння спряження.

Граничні умови записуються так само умови спряження. Єдина відмінність у тому, що поняття розриву визначається як різниця між основним рішенням і необхідною граничною умовою.

3.3.3 Коефіцієнт руху для корекції Базового рішення.

Тут застосована та ж методологія, що й для канатів. Коефіцієнт руху, m_i , є специфічним для кожної ітерації. Він обмежує максимальну зміну базової геометрії для забезпечення стабільності процесу ітерації. Знаходиться як мінімум з чотирьох конкретних коефіцієнтів m_i^n для $n = 1, 2, 3, 4$, де m_1^i пов'язане з максимально допустимою зміною осьового зміщення для всієї балки або каната, m_i^2 - для нормального переміщення, m_i^3 - до кута повороту, m_i^4 - до максимального відносного кута повороту будь-якої частини. Кожен m_i^n є добутком двох конкретних коефіцієнтів:

$$m_i^n = m_{i,a}^n \cdot m_{i,s}^n \quad (3.17)$$

Призначення коефіцієнту $m_{i,a}^n \leq 1$ полягає в обмеженні максимальних значень даного геометричного параметра, тоді як $m_{i,s}^n \leq 1$ полягає в придушенні можливих коливань ЗР для забезпечення стабільності рішення. Покажемо, як це працює на прикладі осьового переміщення. Введемо поняття допустимого максимального осьового переміщення, U_a^0 . У цій роботі ми беремо це як відносно велике значення:

$$U_a^0 = L/4 \quad (3.18a)$$

Щоб отримати $m_{i,a}^1$ нам потрібно проаналізувати ЗР і знайти екстремальне значення серед усіх осьових переміщень, $\max|u_i(s)| = U_i^{\max}$, його знак (“+” or “-”), і координату точки s , при якому вона досягається, назовемо її як s_i^{\max} . Маємо:

$$m_{i,a}^1 = \frac{U_a^0}{U_i^{\max}} \quad (3.18б)$$

Якщо $m_{i,a}^1 > 1$, то ми поставимо його як 1.

Щоб отримати $m_{i,s}^1$ нам потрібно порівняти знаки $u_{i-1}(s)$ і $u_i(s)$ в тій самій точці s_{i-1}^{\max} . Якщо знаки однакові, то вважаємо, що процес є стійкий, і навпаки. Отже, беремо:

$$m_{i,s}^1 = m_{i-1,s}^1 \cdot \begin{cases} m_+ = 1.3 \text{ знак той самий} \\ m_- = 0.5 \text{ знак змінився} \end{cases} \leq 1 \quad (3.18в)$$

Де початкове значення $m_0^1 = 1$. Таким чином, коефіцієнт $m_{i,s}^1$ постійно змінюється в залежності від поведінки системи в цілому.

Наведена вище методологія застосована до трьох інших параметрів. Максимально допустимі зміни для них:

$$W_a^0 = L/2 \quad (3.19a)$$

- для нормального переміщення.

$$\Theta_a^0 = \pi/4 \quad (3.19б)$$

- для кута повороту

$$\Delta\Theta_a^0 = \pi/30 \quad (3.19в)$$

- для відносного кута повороту окремого е.

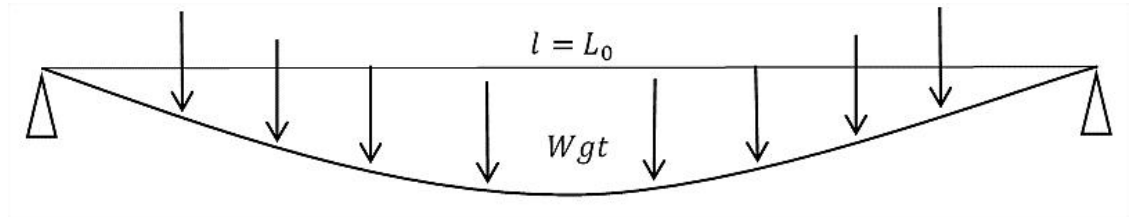
Звертаємо увагу, що пробні розрахунки показали, що збіжності не залежать від вибору чисел у правилі (3.18в). Суттєвим є те, що швидкість придушення повинна бути більшою, ніж швидкість росту, тобто.

$$m_+ \cdot m_- < 1 \quad (3.20)$$

3.4 Приклади обчислень

3.4.1 Пряма шарнірно оперта балка

Розглянемо балку, Мал 3.2, під дією власної ваги. Осьова жорсткість балки $EF = 1.75929 \times 10^{10} \text{ Н}$, жорсткість на згин $EI = 4.31114 \times 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$, та її вага $Wgt = 6724 \text{ Н/м}$, що направлена вздовж вертикального напрямку \vec{j} .



Мал 3.2. Навантажена прямолінійна балка

Такі характеристики отримуються для круглої для труби радіуса $r = 0.72 \text{ м}$, товщини стінки $t = 0.02 \text{ м}$, модуля пружності $E = 2 \times 10^{11} \text{ Па}$ та густини $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Прийmemo, що геометрична відстань між опорами, l , співпадає з фізичною довжиною балки, L_0 , Мал 3.2.

Геометрична нелінійність розтягнутої балки часто являє собою проміжний стан деформування між канатом та лінійної балки. Наша задача полягає в отриманні зручних якісно-кількісних оцінок очікуваного виду деформування ГН балки. Спочатку розглянемо просте аналітичне рішення для лінійної балки. Для геометрії показаної на Мал 3.3 з курсу Опору матеріалів відомо, що максимальне переміщення досягається в центральній точці, W_{mid} :

$$W_{mid}^{beam} = 5P_n L_0^4 / (384EI). \quad (3.21a)$$

В свою чергу провис канату дається наближеною формулою:

$$W(s) = \frac{P_n L_0 s}{2N} - \frac{P_n s^2}{2N} \quad (3.21б)$$

де N осьова сила, а s є координатою довжини. Знайдемо звідси переміщення центральної точки $s = L_0/2$ канату:

$$W_{mid}^{cable} = P_n L_0^2 / (8N) \quad (3.21в)$$

Для визначення невідомої сили N в моделі каната запишемо фізичне рівняння:

$$N = \varepsilon EF \quad (3.22a)$$

За визначенням деформація ε як геометрична величина:

$$\varepsilon = (L - L_0)/L_0, \quad (3.22б)$$

Де L є повна довжина каната в деформованому стані. Вона знаходиться із рівняння провису канату:

$$L = \int_0^{L_0} \sqrt{1 + \dot{W}^2} dx \approx L_0 + \int_0^{L_0} \frac{\dot{W}^2}{2} dx \quad (3.22в)$$

Підставляючи закон провисання канату (3.21б) в рівняння для довжини (3.22в), а також враховуючи вираз для деформації (3.22б) та деформовану довжину (3.22б), визначимо величину сили:

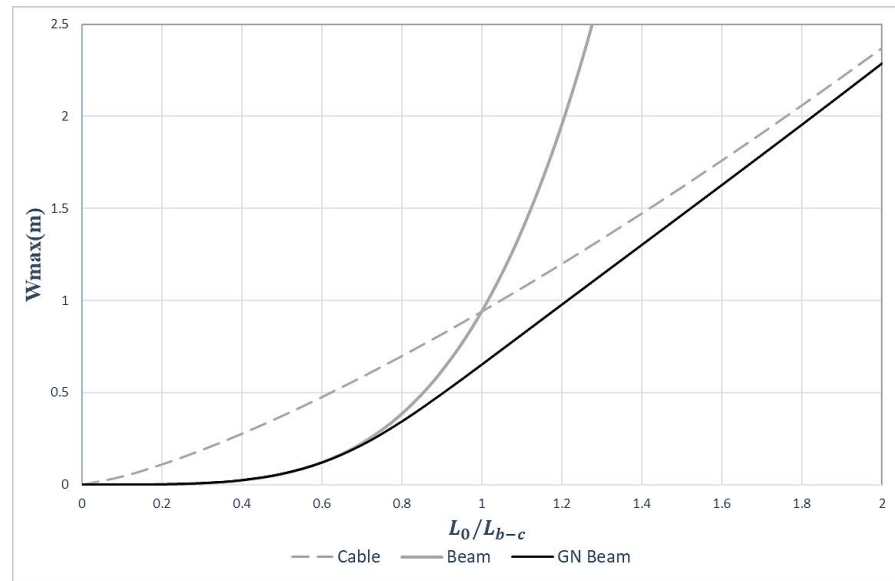
$$N = \sqrt[3]{P_n^2 L_0^2 EF / 24} \quad (3.22г)$$

Підставивши значення сили (3.22г) в вираз для провису канату (3.21в), отримаємо значення максимального провису канату. Тепер прирівняємо його з провисом лінійної балки. Так отримаємо значення характерної довжини L_{b-c} , Мал 3.2, при якій деформаційні властивості балки і канату проявляються однаково:

$$L_{b-c} = \sqrt[8]{3^4 \cdot 2^{15} (EI)^3 / (5^3 P_n^2 EF)} = 82.56 \text{ м} \quad (3.22д)$$

Таким чином, для вибраного трубопроводу, як конструкції з вказаними вище розмірами, фізичними властивостями, умовами закріплення, характерною довжиною є 82.56м, що інтуїтивно здається достатньо малою довжиною як для такої потужної конструкції,

Наявність характерної довжини дає можливість обґрунтовано підходити до формулювання характерних задач, де реальна довжина вибирається як відношення до теоретичної довжини L_0/L_{b-c} . На Мал 3.3 зображена залежність максимального прогину в центральній точці для трьох розрахункових моделей: штрихова лінія для моделі каната, W_{cable} ; модель балки W_{beam} , дається тонкою лінією; ГН балка, W_{GNb} , зображена жирною лінією. Відмітимо, що при довжині меншій за характерну, трубопровід веде себе як балка, а при довжині, що перевищує характерну довжину в 4 рази - веде себе як канат.



Мал 3.3. Величина максимального прогину в залежності від довжини труби розрахована для трьох фізичних моделей – канат, балка, ГН балка

Деякі розрахункові дані, що використані для побудови Мал 3.3 наведені в Табл. 3.2. Ці дані підтверджують обґрунтованість знайденої величини L_{b-c} як характерної довжини. Очевидно, що звичайна модель балки працює при $L_0/L_{b-c} < 0.4$. При $L_0/L_{b-c} > 4$ трубопровід веде себе як канат, а при проміжних значеннях відносної довжини від 0.4 до 4 має властивості як канату так і балки. Власне, нижче це і буде предметом дослідження.

Таблиця 3.2. Значення максимального прогибу в залежності від характерної довжини

L_0	L_0/L_{b-c}	W_{GNb}	W_{GNb}/W_{beam}	W_{GNb}/W_{cable}
33.024	0.4	0.02414	0.999405	0.087116
49.536	0.6	0.120481	0.985288	0.25301
66.048	0.8	0.344358	0.891042	0.492707
82.56	1	0.654016	0.693164	0.694957
99.072	1.2	0.979376	0.500577	0.816106
123.84	1.5	1.466298	0.306975	0.907295
165.12	2	2.28883	0.151614	0.965021
412.8	5	8.03803	0.01363	0.998437
825.6	10	20.2778	0.002149	0.999161

Всі вище приведені рівняння для ЗР використовують лише постійні

проекції компонент навантаження. Векторна інтенсивність навантаження визначається як для центральної точки. Потім вона розкладається на два напрямки (по векторам базової геометрії). Оскільки нормальний та дотичний вектори трохи змінюються по довжині елемента, то це може призводити до незначних похибок.

Дослідимо основну характеристику кожного методу, тобто точність і ефективність нашого підходу. Розглянемо спочатку лінійну модель ЗР. В Табл. 3.3 дається залежність максимального прогину в центральній точці від кількості елементів, J , причому розглядаються різні відносні довжини трубопроводу L_0/L_{b-c} . Для зручності точність виражається як відносна різниця переміщень при деякому числі J елементів і переміщень при $J = 200$, $W_{GNb,200}$, тобто $(W_{GNb,J} - W_{GNb,200})/W_{GNb,200}$.

Розгляд результатів, наведених в Табл. 3.3, дозволяє відмітити таке. Якщо балка є короткою, тобто $L_0/L_{b-c} < 0.5$, то вона може розраховуватися з допомогою Л ЗР, і при цьому достатньо застосовувати 1-3 елементи. Якщо балка є трохи довшою за характерну довжину ($L_0/L_{b-c} > 1.5$), то при застосуванні Л ЗР потрібно 10-15 елементів. Основною причиною необхідності вибору більшого числа елементів є неточність представлення навантаження як однорідного, яке вираховується для попередньої базової геометрії для центральної точки елемента.

Таблиця 3.3. Відносна точність визначення максимальних переміщень в залежності від кількості елементів в Л ЗР

L_0	L_0/L_{b-c}	Кількість елементів, J					
		3	4	5	10	20	100
16.512	0.2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
24.768	0.3	0.0007	0.0004	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000
41.28	0.5	0.0400	0.0211	0.0125	0.0029	0.0007	0.0000
57.792	0.7	0.4832	0.2513	0.1512	0.0352	0.0085	0.0002
82.56	1	2.2755	1.1577	0.6925	0.1594	0.0388	0.0012
99.072	1.2	3.0281	1.5270	0.9086	0.2080	0.0503	0.0016
123.84	1.5	3.5446	1.7604	1.0379	0.2349	0.0567	0.0016
165.12	2	3.8473	1.8145	1.0474	0.2302	0.0554	0.0013

Відмінність результатів при застосуванні різних кількості елементів та різних ЗР може бути продемонстрована для довгого трубопроводу, скажімо, $L_0 = 1000t \approx 12L_{b-c}$, який уже деформується як канат. Нами застосовано три різні опції розрахунку. Перша використовує Л ЗР, друга – ГН ЗР, а третя – це результати отримані за допомогою відомого програми ABAQUS [188], з використанням двох вузлового балкового елементу

В ГН аналізі за допомогою комерційного пакету ABAQUS для отримання збіжних результатів вибирається стандартна схема стабілізації, де постійний коефіцієнт демпфування визначається методом проб і помилок.

Референсне (відносно точне) рішення береться для кількості $J = 1000$ в двох наших методів, і в кожному з них ми отримали переміщення для центральної точки рівне 26.1847м. Щодо ABAQUS, то цей пакет дає значення 26.1924м. В Табл. 3.4 даються відповідні результати співставлення. В останній колонці для ГН ЗР дається довжина елемента виражена в термінах $\mu\psi$, де ψ – це його кутова довжина. Зі збільшенням цієї величини збільшується також і різниця між результатами отриманими за допомогою лінійного ЗР (Л ЗР) та ГН ЗР. Проте ГН ЗР побудоване за допомогою експоненціальних функцій, застосування яких при $\mu\psi > 12 - 15$ звичайно дає значні машинні похибки. Тому ми вимагаємо обмеження довжини кожного елемента, тобто $\mu\psi < 12$ при застосуванні експоненціального ГН ЗР.

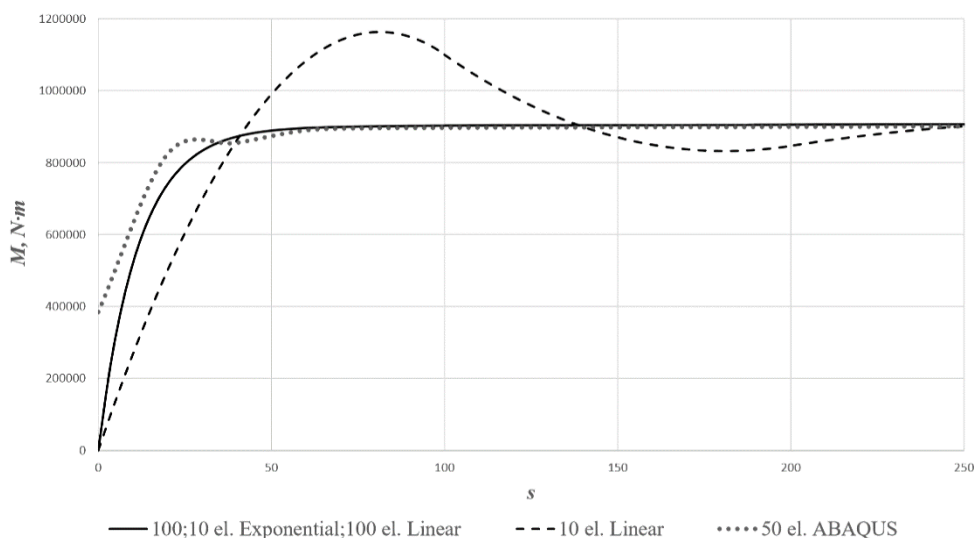
Таблиця 3.4. Максимальні прогини для трубопроводу $L_0 = 1000m$

Кіль- сть еле-тів	Кількість ітерацій			Відносна різниця (%)			$\mu\psi$
	ABAQUS	ГН ЗР	Л ЗР	ABAQUS	ГН ЗР	Л ЗР	
10	-	13	497	-	0.6886	0.0833	10.8
15	-	11	422	-	0.0435	0.0256	7.2
25	-	12	414	-	0.0031	0.0065	4.32
30	28266	11	445	0.0365	0.0011	0.0042	3.6
50	9734	10	378	0.0131	0	0.0011	2.16
100	1647	11	378	0.0022	0	0.0004	1.08
200	384	11	399	0.0007	0	0	0.54
300	405	11	395	0.0003	0	0	0.36

Очевидно, що ГН ЗР є досить ефективним. Іншою його перевагою є кількість необхідних ітерацій. Як слідує з Табл. 3.4 вона на порядки менша. Що стосується точності, то застосування Л ЗР та ГН ЗР на перший погляд, дають подібну точність. Причому достатньою здається кількість елементів $J = 10$. Але те, що при $J = 10$ точність Л ЗР перевищує таку для ГН ЗР, є скоріше свідченням комп'ютерної неточності визначення експоненціальних функцій типу $ch10$. Але в цілому, наш метод є надзвичайно ефективним при використанні обох типів ЗР.

Для демонстрації переваг використання різних аналітичних рішень в ЗР розглянемо локальні розподіли сил і моментів в околі точок закріплення, а також порівняємо їх з результатами отриманими за допомогою відомого комерційного комплексу Abaqus.

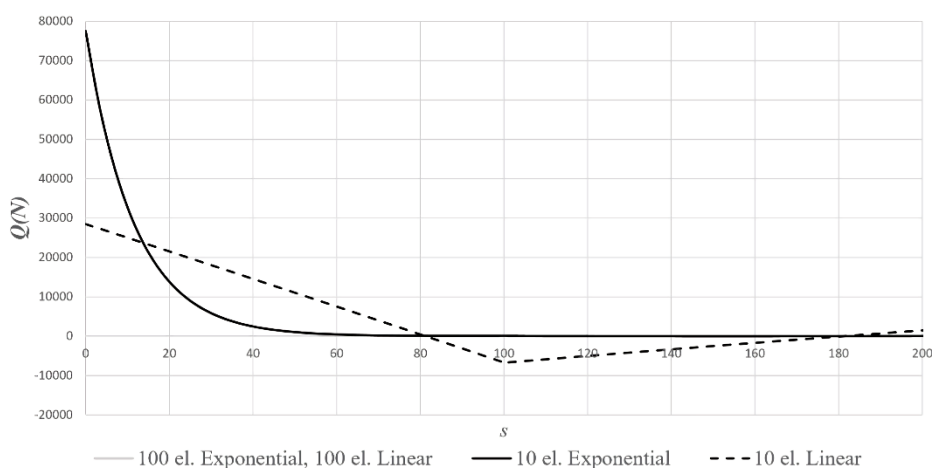
Мал. 3.4 показує величини згинальних моментів на відстані до 250 метрів від лівого краю. Відмітимо, що застосування лише $J = 10$ елементів в ГН ЗР дає практично правильний розподіл згинальних моментів, що співпадає з результатами отриманими при використанні $J = 100$ елементів в ГН ЗР.



Мал. 3.4. Залежність розподілу моментів на перших 250м

Для звичайного Л ЗР різниця між результатами при застосуванні 10 і 100 елементів є досить значною. Власне, це підкреслює ефективність застосування

більш точних математичних моделей, адже ЛЗР дає хороші результати, коли довжина елемента є меншою $\mu\psi < 0.6$. Результати отримані за допомогою програми ABAQUS, уже при $J \leq 50$ не зовсім точно описують розподіл моментів, коли не тільки значення в проміжних точках не є точними, а навіть не задовольняється гранична умова для момент в точці $s = 0$, де момент повинен дорівнювати нулю.



Мал. 3.5. Залежність розподілу сил на перших 200м

Можна зробити подібні висновки, якщо розглядати розподіл поперечних сил в околі перших 200 метрів. Цікаво відмітити, що перші 200м це лише 2 елементи при використанні розбивки на 10 елементів. Проте ГНЗР дають достатньо точний розподіл поперечних сил. Щодо ЛЗР, то очевидно, воно вимагає значно більшого числа елементів розбивки.

3.4.2 Розрахунок гнучкого райзеру

Знову повернемося до задачі пункту 2.3.2. На відміну від неї тут ми розглядаємо райзер як балку. Для цього необхідно ввести жорсткість балки на згин $EI = 2.096 \times 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$. Інші характеристики: осьова жорсткість (на розтяг), та вага райзера, залишаються такими ж, тобто $EF = 1.538 \times 10^9 \text{ Н}$, вага $Wgt = 897 \text{ Н/м}$, і довжина $L_0 = 350 \text{ м}$. Умови закріплення та положення граничних точок приймаються такими ж. Замітимо, що в літературі в різних роботах приймаються дещо відмінні фізичні характеристики. Але оскільки

райзер є дуже гнучким, то це майже не впливає на результати. Зокрема, як буде показано нижче, збільшення його жорсткості на декілька порядків майже не впливає на отриману конфігурацію, тобто на розподіл згинальних моментів. Подібне відноситься до осьової жорсткості - райзер достатньо жорсткий, тому зменшення його жорсткості на порядок майже не змінює форму і деформовану довжину. Тому в літературі і використовуються різні фізичні характеристики. Очевидно, що це неправильно, адже це не дозволяє прямо порівнювати результати і відчувати переваги методів. Власне тому тут і будуть досліджуватися впливи цих характеристик на форму провису райзера.

Для проведення кількісної оцінки особливостей реалізації методу виберемо на райзері три рівномірно розміщені по довжині точки, та саме: $s_1 = 87.5\text{м}$, $s_2 = 175\text{м}$ та $s_3 = 262.5\text{м}$. Позначимо їх як B_1, B_2, B_3 відповідно. В якості початкової геометрії вибирається пряма лінія. Вона починається в точці A_1 , Мал 2.10. Точність методів і варіантів реалізації визначається співставленням положень точок B_n з розрахованими положеннями для референсного випадку.

Спочатку дослідимо ефективність лінійного ЗР при застосуванні різної кількості елементів J . Табл 4 дає декартові координати положення вказаних точок і їх відносні відхилення від референсного випадку, що поділені на фіксоване значення 200м, як певна умовна величина переміщення (довжини чи провису). Це відносне відхилення визначається як корінь квадратний з суми квадратів відхилень по кожній із двох координат окремо. На перший погляд схема, що використовує Л ЗР є ефективною, стабільною, і досить пристойні результати отримуються уже для 48 елементів. Проте зі збільшенням кількості елементів точність покращується дуже повільно. Навіть 200 елементів є недостатньо для Л ЗР, адже все ще спостерігається певне відхилення від референсного випадку (1000 елементів). Схема Л ЗР має і інший недолік – необхідно використовувати велику кількість необхідних ітерацій уточнення.

Таблиця. 3.5. Вплив кількості елементів на розраховані положення для Л ЗР

Число елементів	Точка	Положення		Різниця, %	Число ітерацій
		x	y		
12	B1	46.9876	-73.4327	2.389196	44243
	B2	95.9091	-15.7491	8.344376	
	B3	127.697	65.3452	4.262125	
48	B1	47.632	-69.8184	1.431158	40733
	B2	110.352	-20.1221	0.886676	
	B3	135.32	63.6494	1.50107	
100	B1	48.4153	-69.4215	0.695373	40532
	B2	111.242	-20.3345	0.715579	
	B3	135.725	63.5808	0.443338	
200	B1	48.7641	-69.2504	0.750535	40720
	B2	111.618	-20.423	0.347686	
	B3	135.894	63.5527	0.357789	
1000	B1	49.0372	-69.1162	-	40242
	B2	111.91	-20.491	-	
	B3	136.026	63.5312	-	

Розглянемо схему, що використовує ГН ЗР. Табл. 3.6 дає положення точок B_n в залежності від кількості елементів і їх співставлення з референсним випадком для $J = 1000$. Надзвичайно велика гнучкість райзера приводить до того, що розрахунки змогли «запуститися» лише при 60 елементів, коли значення $\mu\psi = 12.26$. Це звичайна проблема машинної неточності при великих значеннях експоненціальної функції. Як і раніше, бачимо, що використання більш точних (але трудомістких) формул приводить до значного покращання ефективності. Збіжність результатів також досягається значно швидше – тут нам потрібно лише 30 ітерацій, що на два порядки менше, ніж при застосуванні Л ЗР. Точність методу також є на декілька порядків кращою, ніж в схемі, що базується на Л ЗР.

Тепер співставимо результати моделі балки з результатами отриманими на основі моделі канату, п.2.3.2. В моделі канату є можливість більш точного представлення розподілу навантажень – як сума однорідного і лінійного законів. Для коректності порівняння результатів в обох моделях (балка і канат)

будемо розглядати лише однорідне навантаження. Відповідні результати співставлення приведені в Табл. 3.7.

Таблиця 3.6. Вплив кількості елементів на координати точок для ГН ЗР

Число елементів	Точка	Положення		Відносна різниця %	$\mu\psi$	число ітерацій
		x	y			
60	B1	49.1301	-69.0803	0.0127	12.2615	34
	B2	112.015	-20.5334	0.0209		
	B3	136.071	63.4967	0.0160		
100	B1	49.1106	-69.0758	0.0045	7.3569	24
	B2	111.994	-20.5086	0.0060		
	B3	136.063	63.5259	0.0025		
200	B1	49.1064	-69.081	0.0012	3.6784	24
	B2	111.985	-20.5076	0.0015		
	B3	136.059	63.5261	0.0005		
1000	B1	49.1048	-69.0828	-	0.7356	24
	B2	111.982	-20.5076	-		
	B3	136.058	63.526	-		

Співставимо результати Таблиць 3.6 та 3.7. Перевагою канатної моделі, як більш простої, є порівняно невелика кількість необхідних ітерацій. Проте вона не сильно відрізняється від кількості ітерацій при застосуванні ГН ЗР в балковій моделі. Вплив кількості елементів на збіжність результатів в балковій моделі також не є гіршим, ніж в моделі каната, якщо не враховувати машинні неточності пов'язані з великими $\mu\psi$ при меншій кількості елементів в ГН ЗР. Що стосується відносно повільного наближення до точних результатів пояснюється помилками представлення навантаження як однорідного закону в обох моделях тіла.

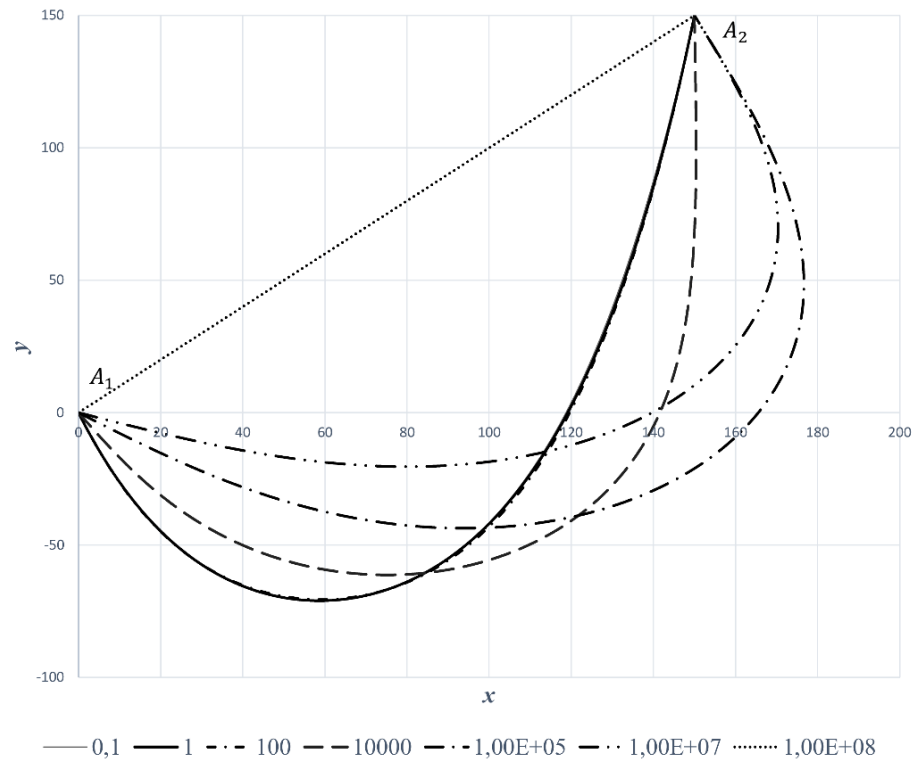
Як було сказано раніше, вибрані параметри райзера є такими, що його довжина фактично не змінюється, тобто його можна описати за допомогою аналітичного рішення ланцюгової лінії, що і дається в літературі [190]. Очевидно, що подібні тести є обмеженими і не в змозі демонструвати переваги тих чи інших розрахункових методів. Ось чому нижче ми дослідимо вплив зміни фізичних характеристик на точність і збіжність розрахунків.

Таблиця 3.7. Координати точок при різній кількості елементів канату

Число елементів	Точка	Положення		Різниця %	Число ітерацій
		x	y		
4	B1	48.885	-66.0611	1.51606	24
	B2	119.239	-22.0716	3.713445	
	B3	139.504	63.0593	1.739761	
8	B1	49.1695	-68.0831	0.502169	22
	B2	113.479	-20.8268	0.76696	
	B3	136.802	63.4202	0.376775	
20	B1	49.1512	-68.9288	0.081731	22
	B2	112.222	-20.5524	0.123695	
	B3	136.177	63.5113	0.060982	
48	B1	49.1174	-69.0592	0.014669	22
	B2	112.021	-20.5126	0.021258	
	B3	136.077	63.5247	0.010543	
200	B1	49.104	-69.0853	-	22
	B2	111.979	-20.506	-	
	B3	136.056	63.5266	-	

Власне нижче і створюється система тестів для перевірок коректності існуючих і майбутніх підходів. Для цього будемо змінювати згинальну жорсткість в широких діапазонах. Введемо поняття зміненої згинальної жорсткості EI_z , де $EI_z = z \cdot EI$, де z – це безрозмірний коефіцієнт жорсткості, а EI – це початкова згинальна жорсткість. Як ми уже бачили в нашому підході не існує проблем для аналізу більш гнучких конструкцій. Тут все ясно – спочатку застосовується більш схема канату для якої знаходиться розподіл осьових сил; а потім будується комбінована модель, де довжина балкового ГН ЗР елемента в зонах контакту не перевищувала величини $\mu\psi = 8$.

Тому нижче аналізуються більш жорсткі конструкції (за виключенням $z=0.1$), де значення z дорівнює $z=0.1, 1, 100, 10^4, 10^5, 10^7, 10^8$. Розраховані форми деформування таких райзерів для дуже детальних розбивок на елементи показані на Мал 3.6. Цікаво відмітити, що для $z=0.1, 1, 100$ графіки практично співпадають. В числовому вигляді ці результати для вказаних трьох точок B_n даються в таблицях 8-11.



Мал 3.6. Деформування райзера в залежності від коефіцієнта жорсткості

Таблиця 3.8. Положення характерних точок B_n для Л ЗР для вибраного коефіцієнта жорсткості $z=100$

Число елементів	Точка	Положення		Різниця %	число ітерацій
		x	y		
12	B1	43.1499	-71.2	3.149627	939
	B2	105.212	-18.7517	3.609636	
	B3	133.264	64.0292	1.461032	
20	B1	45.7898	-70.2747	1.753199	839
	B2	108.558	-19.6847	1.873398	
	B3	134.483	63.7969	0.840623	
48	B1	47.9549	-69.3422	0.57459	809
	B2	111.035	-20.2887	0.59863	
	B3	135.612	63.5997	0.267584	
100	B1	48.6789	-69.015	0.177342	764
	B2	111.844	-20.478	0.183204	
	B3	135.979	63.5387	0.081567	
200	B1	49.001	-68.8665	-	780
	B2	112.201	-20.5605	-	
	B3	136.14	63.5124	-	

Таблиця 3.9. Положення характерних точок B_n при застосуванні Л ЗР для райзера з коефіцієнтом жорсткості $z=10^4$

Число ітерацій	Точка	Положення		Різниця %	Число ітерацій
		x	y		
12	B1	60.3339	-59.7184	0.231566	25
	B2	132.205	-22.719	0.245011	
	B3	149.432	62.413	0.204016	
36	B1	60.5924	-59.5303	0.071733	25
	B2	132.528	-22.7251	0.083503	
	B3	149.693	62.4093	0.073503	
100	B1	60.6806	-59.4635	0.016414	24
	B2	132.657	-22.724	0.019001	
	B3	149.806	62.4082	0.017001	
200	B1	60.7064	-59.4432	-	24
	B2	132.695	-22.7236	-	
	B3	149.84	62.4079	-	

Таблиця 3.10. Положення точок B_n при застосуванні ГН ЗР для райзера з коефіцієнтом жорсткості $z=100$

Число елементів	Точка	Положення		Різниця %	$\mu\psi$	Число ітерацій
		x	y			
12	B1	49.7206	-68.404	0.2522	6.1184	22
	B2	113.389	-20.785	0.4207		
	B3	136.696	63.4313	0.1990		
20	B1	49.4271	-68.577	0.0859	3.6710	21
	B2	112.828	-20.69	0.1363		
	B3	136.434	63.47	0.0666		
48	B1	49.3368	-68.692	0.0127	1.5296	23
	B2	112.597	-20.647	0.0187		
	B3	136.321	63.4852	0.0096		
100	B1	49.322	-68.713	-	0.7342	23
	B2	112.56	-20.641	-		
	B3	136.302	63.4872	-		

Таблиця 3.11. Положення точок B_n при застосуванні ГН ЗР для райзера з коефіцієнтом жорсткості $z=10^4$

Число елементів	Точка	Положення		Різниця %	$\mu\psi$	Число ітерацій
		x	y			
12	B1	60.4341	-59.657	0.1566	0.6010	18
	B2	132.332	-22.701	0.1629		
	B3	149.59	62.4147	0.1080		
20	B1	60.5111	-59.591	0.1062	0.3606	18
	B2	132.413	-22.719	0.1220		
	B3	149.616	62.4115	0.0950		
36	B1	60.5922	-59.531	0.0555	0.2003	20
	B2	132.527	-22.725	0.0650		
	B3	149.692	62.4093	0.0570		
100	B1	60.6806	-59.464	-	0.0721	20
	B2	132.657	-22.724	-		
	B3	149.806	62.4082	-		

В приведених Таблицях 3.8-3.11 надаються положення точок для коефіцієнтів $z=10^2$ та $z=10^4$, та для двох схем методу (Л ЗР та ГН ЗР). Очевидно, що аналітичне наповнення елемента має вирішальну роль в для необхідної кількості ітерацій. Що стосується точності, то очевидно, що ГН ЗР схема є більш точною, перевага в точності не є вражаючою. Це пояснюється тим, що точність положення в основному забезпечується базовим рішенням. Що стосується швидкості досягнення правильного результату, то застосування ГН ЗР елемента має переваги тоді, коли розрахункова жорсткість елемента $\mu\psi$ є більшою, ніж одиниця. Власне тоді і принципово відрізняються аналітичні рішення для схем Л ЗР та ГН ЗР.

Для демонстрації додаткових переваг нашого методу приведемо результати для ще одного чисельного експерименту. Але спочатку розрахуємо для прямого стержня його критичну силу втрати стійкості теоретично, на основі результатів для задачі Ейлера. Відповідно до формули Ейлера, втрата стійкості відбувається при силі:

$$N_{crit} = \pi^2 EI / l_{A_1 A_2}^2 \quad (3.23a)$$

де $l_{A_1A_2} = \sqrt{2} \cdot 150 = 212.132$ – це геометрична відстань між граничними точками стержня. Ця формула є буде правильною для попередньо стиснутої балки, якщо її деформована довжина дорівнює $l_{A_1A_2}$, тобто є значно меншою, ніж початкова довжина, $L_0 = 350$ м. Для отримання необхідної довжини з початкової, прикладемо осьової сили, що дорівнює:

$$N_{\text{deform}} = EF(1 - l_{A_1A_2}/L_0) \quad (3.23б)$$

Порівнюючи обидві сили (3.23а) та (3.23б), отримаємо розрахункову згинальну жорсткість, що дає границю між стійким і нестійким станами:

$$EI_{\text{crit}} = \frac{EF l_{A_1A_2}^2}{\pi^2} \left(1 - l_{A_1A_2}/L_0\right) = 2.76226 \times 10^{11} \text{ Нм}^2 \quad (3.23в)$$

Відношення отриманої величини EI_{crit} до початкової EI дає значення $z_{\text{crit}} = 1.31787 \cdot 10^7$. Проведемо два чисельних експерименти – перший для значення жорсткості $EI_+ = EI_{\text{crit}}(1 + 10^{-5})$ та другий для $EI_- = EI_{\text{crit}}(1 - 10^{-5})$. В обох випадках в якості початкової геометрії була вибрана дуга еліпса з довжиною 350 м. В першому випадку після застосування лише декількох ітерацій райзер став ідеальною прямою лінією A_1, A_2 . В другому випадку отримана крива лінію була подібною для такої при $z=10^7$, Мал 3.6.

3.4.3 Втрата стійкості консольної балки при стиску

Цей пункт має на меті пояснення двох важливих особливостей методу і рішень. Перше, метод дійсно описує втрату стійкості стиснутих стержнів, яка по суті є частинним випадком ГН поведінки стержня, коли геометрично лінійні підходи теорії балок уже не працюють. Ми продемонструємо, як відбувається деформування після втрати стійкості, і як цей стан необхідно аналізувати. Друга особливість має більш теоретичне значення. В підрозділі 3.2. ми відзначали, що в ГН постановочному рівнянні (3.8) коефіцієнт при поперечній силі може бути різного знаку. До цього моменту, ми в основному розглядали від’ємні значення μ^2 (розтягнута балка), які приводили до появи в загальних рішеннях диференціальних рівнянь членів, що містили гіперболічні

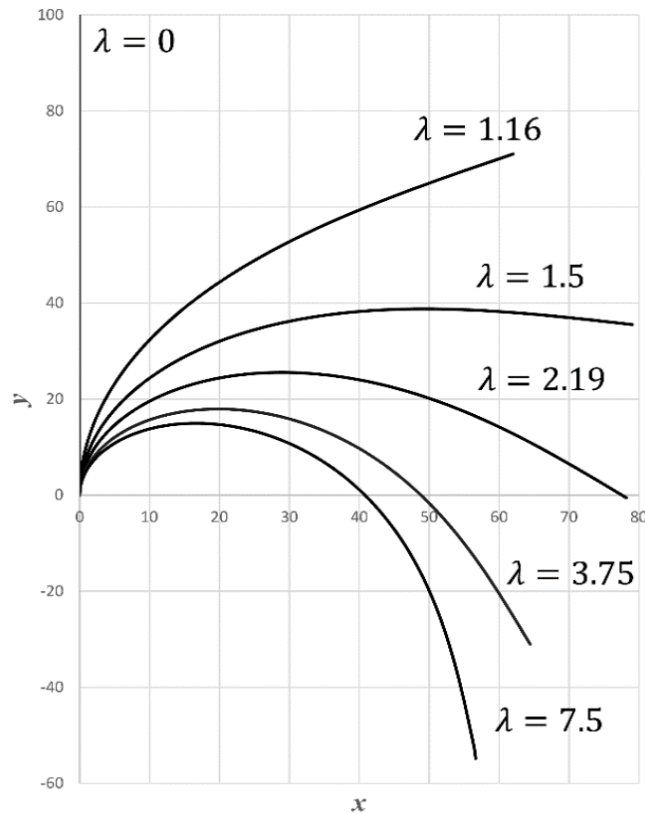
синусами і косинусами.

Додатне значення коефіцієнту відноситься до попередньо стиснутої балки і приводить до отримання рішень, що містять тригонометричні синуси і косинуси. Таким чином, нижче ми хочемо дослідити інший тип ГН ЗР, який використовує тригонометричні функції, порівняти його з Л ЗР, і як підсумок знову продемонструвати, що більш застосування більш складних рішень є ефективним інструментом для покращання точності результатів і швидкості їх отримання.

Типовим прикладом досліджень є аналіз втрати стійкості консольної вертикальної балки при навантаженні центру січення балки зосередженою стискуючою силою. Зокрема така проблема досліджувалася в роботі Альбіно та ін. [17]. Покладемо такі характеристики балки: жорсткість на згин $EI = 27.07 \times 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$, осьова жорсткість $EF = 146.7 \times 10^6 \text{ Н}$, початкова довжина $L_0 = 100 \text{ м}$. Відома формула втрати стійкості дає таку критичну силу:

$$P_{crit} = \pi^2 EI / (4L_0^2) = 1.745 \text{ Н} \quad (3.24)$$

Розглянемо деяку вертикально направлену сили $P_\lambda = \lambda P_{crit}$, де $\lambda > 1$, Мал 3.7. Для чисельного «запуску» процесу втрати стійкості необхідно дати певне збудження в перпендикулярному напрямку. Звичайно в літературі застосовують деяку малу поперечну силу, що і дає незначне відхилення, яким потім нехтують [17]. Наша техніка дозволяє застосовувати більш елегантний підхід – один або декілька елементів розглядаються з незначно скривленою базовою геометрією, це і забезпечує «запуск» початкового відхилення. Отримані графіки закритичного положення балки при великій кількості елементів для різних значеннях λ зображені на Мал 3.7. Приведені положення візуально узгоджуються з приведеними в роботі [17], хоча, на жаль там немає табличних значень. Як перевагу нашого підходу відмітимо, що ми використовували значно менше елементів, і кількість ітерацій у нас (10-25) була на порядки менше, ніж було необхідно (~ 400) в роботі [17].



Мал 3.7. Закритична форма деформування консольної балки

Дослідимо як впливає вибір конкретного ЗР та кількість елементів розбивки стержня на визначення вертикальної та горизонтальної координати положення точки прикладення сили. Вводиться поняття референсного розрахунку, що використовує достатньо велику кількість елементів і може вважатися як точне. Тоді рахується різниця між даними результатами і референсним значенням. Для визначення умовної похибки ця різниця ділиться на початкову довжину балки. Наведені в Табл. 3.12-3.14 дані отримані при застосуванні лінійного ЗР.

Спочатку розглядається сила, що дорівнює $1.2P_{crit}$, Табл. 3.12. Деформація балки для такої відносно невеликої сили є незначною, і її відхилення від початкового положення незначне. В цьому випадку можна використовувати мінімальну кількість елементів. Відмітимо дуже високу точність результатів, зокрема відносна похибка дорівнює 4% використовуючи лише один елемент, а використання лише трьох елементів значно покращує результати і приводить до точності 0.42%!

Таблиця 3.12. Положення точки прикладення сили при $P = 1.2P_{crit}$ з застосуванням лінійного ЗР

Кількість елементів	Положення кінця балки		Відносна точність %
	x	y	
1	61.0458	67.8859	4.030426
2	64.3546	69.2981	2.184088
3	65.0922	67.6313	0.419473
5	65.2264	67.0925	0.241133
10	65.1263	67.1043	0.15531
15	65.0598	67.1731	0.05967
20	65.0205	67.218	0
100	65.0205	67.218	-

Розглянемо дію сили, що дорівнює $P = 2P_{crit}$. Відповідні дані обчислення положення точки прикладення сили положення наведені в Табл. 3.13. Очевидно, що геометрія балки є більш скривленою і переміщення граничної точки є значно більшими. Очевидно, що тут необхідно застосовувати більшу кількість елементів. Для порівняння відмітимо, що використання 5 елементів для сили $F = 2F_{crit}$ дає похибку рівну 0.75, що значно гірше, ніж для сили $F = 1.2F_{crit}$, де похибка дорівнювала 0.24.

Таблиця 3.13. Положення точки прикладення сили при $\lambda = 1.2$ з застосуванням лінійного ЗР

Кількість елементів	Положення кінця балки		Відносна точність %
	x	y	
3	80.5088	5.77688	1.539921
5	80.0984	6.4458	0.755149
8	79.7581	6.87734	0.217492
10	79.736	6.95384	0.137866
15	79.717	7.03063	0.058843
20	79.7105	7.05709	0.031727
100	79.6989	7.08662	-

Розглянемо дію значної сили, наприклад, $F = 6F_{crit}$, результати

розрахунку для неї даються в Табл. 3.14. Очевидно, хороша точність тепер досягається при набагато більшій кількості елементів. Це пов'язано з тим, що кривизна дуже сильно змінюється по довжині балки, а оскільки базова геометрія оперує елементами постійної кривизни, то таких елементів має бути багато. Щоб забезпечити точність як для 3-х елементів при силі $\lambda = 1.2$ тут уже необхідно, як мінімум, 20 елементів,

Таблиця 3.14. Координати точки сили балки при $P = 6P_{crit}$. Лінійна схема

Кількість елементів	Положення кінця		Відносна різниця %
	x	y	
3	50.2008	-52.4671	5.438002
4	52.5122	-46.8791	0.787552
5	52.392	-46.4498	1.000268
8	52.2081	-46.4922	0.872169
10	52.1455	-46.6004	0.747653
15	52.0495	-46.8017	0.524674
20	51.994	-46.9259	0.388638
100	51.8345	-47.2803	-

Випадок $\lambda = 6$ є унікальним в тому сенсі, що початок балки (точка сили) і кінець балки (точка закріплення) по різному направлені по відношенні до сили. Початок балки знаходиться в стані розтягу, а кінець – стиску. Тобто, при використанні ГН ЗР схеми ми маємо використовувати тригонометричні рішення для ділянок близьких до кінця балки, і гіперболічні функції - для ділянок, що близькі до початку. В програмі реалізований автоматичний вибір типу рішення в залежності від знаку отриманих коефіцієнтів в рівнянні (3.9a) та (3.10a). Результати такого розрахунку представлені в Табл. 3.14. Порівнюючи результати Табл. 3.14 та Табл. 3.15, відмітимо, що застосування ГН рішень для ЗР приводить до покращання результатів, проте не кардинального. Це пояснюється тим, що значення $\mu\psi$ для кожного окремого елемента не є великими, тобто ГН ЗР є близькими до Л ЗР.

Можливі також інші способи оптимізації схеми розрахунку [1]. Наприклад, пропонується застосування не рівномірної розбивки, а такої, де

кривизна незначно змінюється в межах кожного елемента. Це також оптимізує кількість елементів.

Таблиця 3.15. Координати точки сили балки для $P = 6P_{crit}$ при ГН ЗР.

Кількість елементів	Положення точки сили		Відносна різниця %
	x	y	
3	52.8574	-47.4043	1.046707
4	52.4201	-47.2715	0.606807
5	52.0571	-47.1228	0.30799
8	51.8281	-47.3725	0.061185
15	51.8357	-47.3212	0.022618
100	51.8147	-47.3128	-

3.5 Комбінована схема балка-канат.

3.5.1 Особливості застосування

Тіла із значною довжиною, такі як підводні підвішені трубопроводи, характеризуються високою гнучкістю і зазвичай можуть бути апроксимовані як канати. Як вже відзначено в передніх порівняльних прикладах, це спрощує процес створення розрахункової моделі. Однак такий підхід не враховує краєві ефекти для сил і моментів на кінцях тіла або в точках контакту. Для врахування цього аспекту ми розглянемо можливість застосування комбінованої схеми, де біля опор використовується балкова схема заснована на ГН ЗР, а в середній частині використовується канатна модель. Такий підхід розглядався нами вперше в [1].

Вернемося знову до прикладу пункту 3.4.1 де довжина балки $L_0 = 1000\text{м}$. Зауважимо, що для цієї довжини результати визначення максимального провису практично ідентичні при використанні як моделі канату так і моделі балки,. Для моделі канату досить використовувати лише 7-8 елементів, щоб досягти точності на рівні 0.001%. Це робить модель канату ефективною та швидкою. Однак недоліком моделі є відсутність розподілу моментів біля точок закріплення. З іншого боку, для центральної частини конструкції модель канату надає правильні результати для моментів, якщо

розглядати кривизну канату як згинальний момент з відповідним фізичним коефіцієнтом.

Основне завдання використання комбінованої схеми полягає в формулюванні рівнянь спряження між балковим та канатним елементами. Однак виникає проблема у зв'язку з тим, що балка оперує шістьма параметрами, а канат - чотирма. Оскільки на границі між цими двома різними елементами зустрічається $4 + 6 = 10$ параметрів, необхідно сформулювати $10/2 = 5$ рівнянь спряження. Три рівняння формуємо для геометричних параметри, які мають бути взаємно зв'язаними, - це два векторних рівняння щодо переміщень та одне рівняння щодо кута повороту. Щодо двох інших рівнянь, то це два рівняння для сил: а) осьові сили повинні бути взаємно рівними, б) поперечна сила в балці має дорівнювати нулю, оскільки в цьому полягає основна відмінність між моделями канату і балки. Не формулюються конкретні умови щодо згинального моменту: в балці він може мати будь-яке значення, тоді як у канаті його умовний еквівалент - це кривизна канату. Зіставляючи ці параметри в уже отриманому рішенні, можна зробити висновок про коректність застосування комбінованої схеми. Це буде продемонстровано нижче.

Таким чином отримуємо наступні рівняння спряження кінця елемента балки з початком канатного елемента формально записуються майже як для двох балкових елементів:

$$U_e^j \vec{t}_e^j + W_e^j \vec{n}_e^j - G \vec{\Pi}^{j,j+1} = U_0^{j+1} \vec{t}_0^{j+1} + W_0^{j+1} \vec{n}_0^{j+1} \quad (3.25a)$$

$$N_e^j \vec{t}_e^j + Q_e^j \vec{n}_e^j - G \vec{N}^{j,j+1} = N_0^{j+1} \vec{t}_0^{j+1} + Q_0^{j+1} \vec{n}_0^{j+1} \quad (3.25б)$$

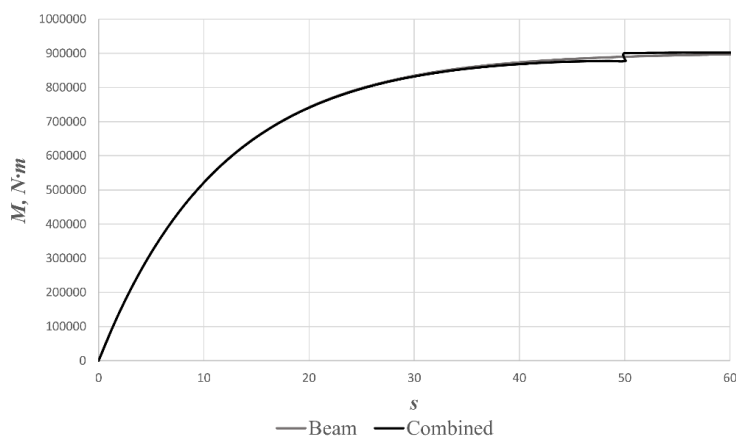
$$\theta_0^{j+1} - \theta_e^j = G \theta^{j,j+1} \quad (3.25г)$$

Де, наприклад, справа записані параметри канатного елемента. Зауважимо, що при формулювання канатного елемента в підрозділі (2.2) ми вимагали, щоб поперечна сила дорівнювала нулю. Тому фактично (3.22б) для напрямку нормалі дає вимогу рівності нулю поперечної сили в балковому елементі. Також відмітимо, що більш «нелінійне» рівняння спряження типу (3.12б)

також доцільно застосовувати в цьому випадку.

3.5.2 Аналіз довгої шарнірно опертої балки.

Для задачі розглянутої вище в пункті 3.4.1 розглянемо таку комбінацію 3 різних моделей: перша модель – ГН балка, друга – канат завдовжки 900 м, і останній – також ГН балка, при цьому кожна з двох балок має довжину 50 м. В термінах експоненціального рішення довжина балок $\mu\psi \approx 5.4$. Такий підхід обрано навмисно, враховуючи оптимальну довжину елемента в ГН ЗР. З одного боку, вона достатньо велика, а з іншого - уникне труднощів з технічними особливостями комп'ютерних розрахунків. Нашою метою є порівняти отримані результати для цієї моделі з результатами, отриманими на основі використання 100 елементів в ГН ЗР.



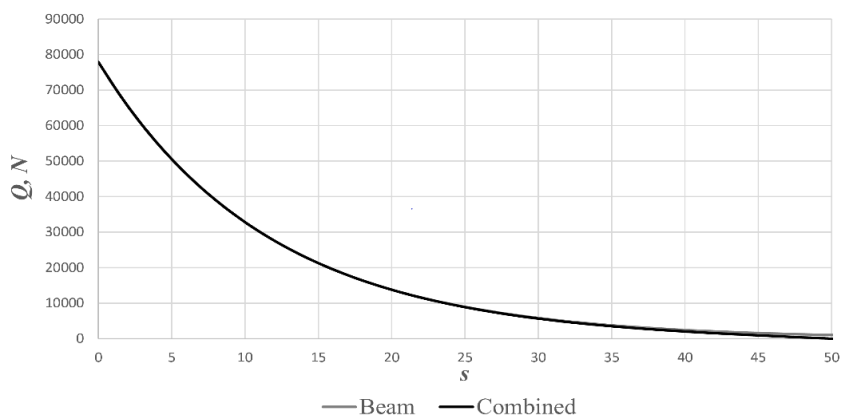
Мал. 3.8 Розподіл моментів для комбінованої схеми, що складається з 2 балок та 1 канатного елемента, в порівнянні зі схемою із 100 балкових елементів

На Малюнках 3.8 та 3.9 показані розподіли моментів і поперечних сил на перших шістдесяти метрах від лівого краю. Порівнюються дві принципово різні схеми отримання рішень: комбінована 3-х елементна схема балка-канат-балка та схема з використанням 100 балкових елементів в Л ЗР. Результати демонструють високу відповідність. Це свідчить про велику ефективність застосування комбінованої схеми, яка не тільки дає чудову точність, але і дуже швидко збігається, де остаточний правильний результат досягається всього за

10 ітерацій.

Важливо зауважити, що в математичній моделі канату відсутнє поняття «згинального моменту». Тому для порівняння результатів двох схем використовуємо поняття умовного згинального моменту як суми базової та поправочної кривизни канату помноженої на згинальну жорсткість січення. Отримані такі значення «канатного» згинального моменту знаходяться в чудовій відповідності з результатами на основі використання детальної моделі балки з застосуванням 100 елементів. Єдиною відмінністю комбінованої схеми є невеликий стрибок моментів на границі між канатом та балкою. Це відбувається тому, що в комбінованій схемі на умова рівності кривизн (моментів) між елементами явно не застосовується.

Розподіл поперечних сил для обох зазначених схем приведений на Малюнку 3.9. Оскільки модель каната не оперує і поперечними силами також, то при $s > 50$ ці значення в комбінованій схемі тотожно дорівнюють нулю.



Мал. 3.9. Локальний розподіл поперечних сил в місцевому контексті для комбінованої структури з 2 балкових елементів та 1 елемента канату, а також для структури з 100 ГН балкових елементів.

Проте це не є помітним недоліком комбінованої схеми, адже навіть в детальній балковій схемі значення поперечних сил при $s > 50$ на порядки менші за їх значення в околі точки закріплення. Що стосується розрахованих значень сил власне біля точки закріплення, то обидві моделі дають чудове

співпадіння результатів. Проведене співставлення це раз продемонструвало виняткову ефективність комбінованої схеми та правильність введених умов на границі між балкою і канатом, а також принципів визначення необхідної довжини балкових елементів.

3.5.3 Застосування комбінованої схеми для гнучкого райзеру

Продовжимо наше дослідження використання комбінованої схеми, де для точок закріплення застосовується модель балки, а для центральної частини розтягнутої конструкції використовується модель каната. Для реалізації цього підходу розглянемо приклад з пункту 3.4.2.

Розіб'ємо райзер на 16 елементів, а саме: спочатку утворимо два елементи балки, що використовує ГН ЗР, кожен з яким має довжину 1.5 м ($\mu\psi \approx 3.15$); потім застосуємо дванадцять елементів канату; і в кінці райзера знову використаємо ще два такі самі балкові елементи як і спочатку. Умови спряження між канатом і балкою сформульовані в пункті 3.5.1. Знову вважаємо, що в моделі канату поперечні сили дорівнюють нулю, а згинальні моменти перераховуються із суми по формулам підрозділу 2, зокрема так:

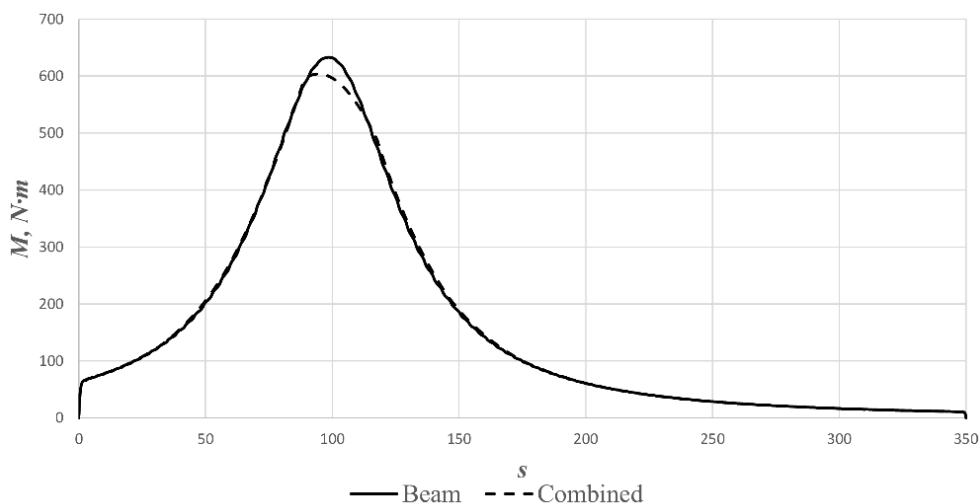
$$M_{cable}(s) = EI \cdot P_n(s) / (N^b + N(s)) \quad (3.26)$$

Як приклад, розглянемо наступну розбивку конструкції на 16 елементів: 2 ГН ЗР елементи балки кожен довжиною 1.5 м ($\mu\psi \approx 3.15$); потім 12 канатних елементів; і потім знову 2 ГН ЗР елементи балки довжиною 1.5 м. Використовуються умови спряження описані в пункті 3.5.1. Для канату за визначенням поперечні сили та кривизна дорівнюють нулю. Проте для канатної моделі моменти можна перерахувати із кривизні по формулі:

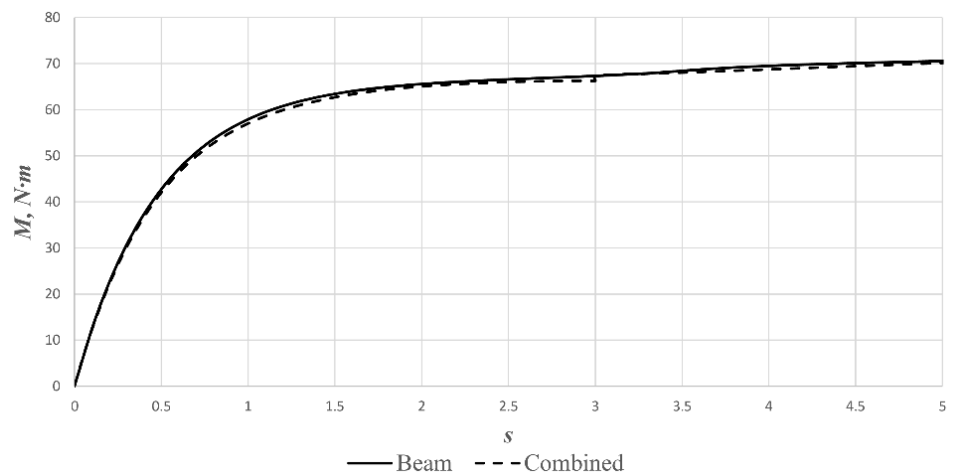
Мал. 3.10 відображає розподіл згинальних моментів за вказаною комбінованою схемою порівняно з референсною схемою, що складається з 100 ГН елементів. Ми спостерігаємо високу відповідність між ними, за винятком області максимальних моментів (приблизно на відстані 100 м), де кількість елементів розбивки для канатної схеми може бути недостатньою. Загалом, отримані результати відмінно відображають відомі літературні дані для цієї

задачі, такі як робота Альбіно та інших [17] та Яджі та Грісфельд [189], де застосовувалися алгоритми з 400 ітераційними наближеннями для переміщення правої опори від початкового горизонтального положення до правильного положення. Єдина відмінність наших результатів полягає в тому, що ми передбачаємо швидкий зріст згинальних моментів від нуля до 70 Нм на перших 1-1.5 м, що відрізняється від інших методів, що не показують такого стрімкого збільшення.

Цікаво порівняти розподіл моментів біля лівої точки закріплення райзеру, Мал 3.11. Як бачимо комбінована схема правильно відтворює відносно швидко зміну згинальних моментів в околі особливих точок. Таким чином, наведений детальний розгляд розподілу сил і моментів для дуже гнучкого райзера, ще раз засвідчив надзвичайну ефективність та правильність реалізації комбінованого застосування балкових та канатних елементів. Показано, що для гнучких конструкцій застосування балкових елементів доцільне лише в околі особливих точок, тобто контакту, закріплення, розгалуження. Подібні по ефективності результати в літературі відсутні.



Мал 3.10. Розподіл моментів в райзері для комбінованої балково-канатної 2+12+2 схеми та точної 100 елементної ГН ЗР схеми



Мал 3.11. Розподіл моментів в околі лівої границі райзера для балково-канатної 2+12+2 схеми та точної 100 елементної ГН ЗР схеми

3.6 Якість коротаційних балкових сплайнів і ГН балок

Мета цього підрозділу полягає в тому, щоб показати можливість застосування ГН балок для геометричного моделювання, побудови ліній оптимальної форми, чи прокладання оптимальних траєкторій, власне для побудови сплайнів. Для демонстрації таких можливостей розглянемо відомі моделі сплайнів [191]. Перша модель – це балкові коротаційні сплайни, КБС, побудовані за участі дисертанта; а друга – це відомі сплайни Безьє. Практичною задачею, яку ми будемо розглядати є побудова сплайну, що проходить через дві задані граничні точки під заданими кутами.

3.6.1 Опис відомих сплайнів для порівняння

Коротко опишемо суть КБС [4, 182] для задач інтерполяції.

1. Задані послідовно пронумеровані як точно виміряні реальні точки, так і вставлені між ними (у будь-якій кількості) уявні точки, $A_m(X_m, Y_m)$, де m – кількість точок, і X_m, Y_m – їх декартові координати в абсолютній системі координат.

2. Ці точки з'єднуються прямими відрізками, на яких встановлюються: а) локальні нормальні вектори; б) локальні нормальні вектори повернуті відносно дотичних на 90° за годинниковою стрілкою. Між сусідніми

дотичними векторами встановлюються кути розбіжності ψ_m , їх додатній напрямок за годинниковою стрілкою.

3. Для кожної ділянки записуються рівняння зв'язку, як для прямої балки. Вважається, що на ділянці немає розподілених сил.

4. В кінці кожної ділянки записуються рівняння спряження, де для реальних точок виконуються умови неперервності для моментів, умови рівності переміщень між собою і їх рівності нулю (тобто співпадіння з заданими положеннями), та умова рівності кутів з врахуванням початкового кута розбіжності між ними. Для фіктивних точок, замість умови рівності нулю переміщень використовується умова рівності поперечних сил.

5. Для відкритих кривих використовується по одній граничній умові рівності нулю переміщень, та ще по одній додатковій умові, наприклад, рівності кута заданій по умові величині. Для закритих кривих (замкнених контурів) замість чотирьох (2+2) граничних умов використовуються 4 умови спряження.

6. Побудова КБС проводиться в ітераційному процесі, де спочатку проводиться з'єднання реальних точок, розрахунок положення всіх проміжних точок, і поступовому додаванню уявних точок, призначення яких полягає в зменшенні кута розбіжності і наближення довжини побудованої кривої до набору довжин прямолінійних відрізків між точками.

Для кожної ділянки j розрахований контур дається формулою:

$$\vec{R}_i^j(s) = \vec{A}_i^{j-1} + \vec{t}_i \cdot X(s) + \vec{n}_i \cdot Y(s) \quad (3.27a)$$

де:

$$X(s) = (s - W(s)\sin\theta(s)), \quad Y(s) = W(s)\cos\theta(s) \quad (3.27б)$$

Де $W(s)$ – розраховане переміщення, що відкладається в напрямку нормалі повернутої на розрахований кут $\theta(s)$. З цих виразів знайдемо деформацію $\varepsilon(s)$, що визначається так:

$$\varepsilon(s) = \frac{\Delta s_d}{\Delta s} = \sqrt{(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2} \quad (3.27в)$$

Кривизна, $\kappa_d(s)$, отриманої кривої (3.27а), визначається по відомій формулі диференціальної геометрії для плоскої кривої:

$$\kappa_d(s) = \frac{\ddot{X}\dot{Y} - \dot{X}\ddot{Y}}{(\sqrt{(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2})^3} = \frac{\ddot{X}\dot{Y} - \dot{X}\ddot{Y}}{(\varepsilon(s))^3} \quad (3.27\Gamma)$$

Наступним розглянемо чотириточковий сплайн Безьє.

Розглянемо набір із чотирьох послідовних контрольних точок $A_1(X_1, Y_1)$, $A_2(X_2, Y_2)$, $A_3(X_3, Y_3)$, $A_4(X_4, Y_4)$, або у векторній формі:

$$\vec{A}_m = X_m \vec{i} + Y_m \vec{j}; \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (3.28a)$$

Їх можна використовувати для побудови кривої Безьє третього порядку, $\vec{P}(x, y)$ [15]:

$$\vec{P}(x, y) = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} = \vec{i} \cdot \sum_{m=1}^4 X_m \cdot K_m(t) + \vec{j} \cdot \sum_{m=1}^4 Y_m \cdot K_m(t); \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.28б)$$

Де $K_m(t)$ є функціями Бернштейна:

$$K_1(t) = (1 - t)^3, \quad K_2(t) = 3t(1 - t)^2, \quad K_3(t) = 3t^2(1 - t), \quad K_4(t) = t^3 \quad (3.28в)$$

Сплаيني Безьє мають наступні властивості [74], важливі для нашого завдання:

1. Перша і остання точки на кривій збігаються з першою і останньою точками контрольного багатокутника (control polygon).

2. Дотичні вектори на кінцях кривої мають той самий напрямок, що й перший і останній прольоти відповідно.

Отже, наше наступне завдання — побудувати сплайн, який починається в точці \vec{B}_1 на куті φ_1 з горизонтальною віссю і закінчується в точці \vec{B}_2 спрямований під кутом φ_2 . Введемо унітарні дотичні вектори $\vec{\eta}_1$ і $\vec{\eta}_2$ в цих граничних точках. Їх можна записати так:

$$\vec{\eta}_1 = \vec{i} \cdot \cos \varphi_1 + \vec{j} \cdot \sin \varphi_1; \quad \vec{\eta}_2 = \vec{i} \cdot \cos \varphi_2 + \vec{j} \cdot \sin \varphi_2 \quad (3.28\Gamma)$$

Отже, чотири послідовні точки кубічних сплайнів Безьє можна вибрати наступним чином:

$$\vec{A}_1 = \vec{B}_1, \quad \vec{A}_4 = \vec{B}_2, \quad \vec{A}_2 - \vec{A}_1 = D_1 \cdot \vec{\eta}_1; \quad \vec{A}_4 - \vec{A}_3 = D_2 \cdot \vec{\eta}_2 \quad (3.28д)$$

Де D_1 абсолютна відстань від точки \vec{A}_2 до точки \vec{A}_1 , і D_2 від \vec{A}_4 до точки \vec{A}_3 .

Наше наступне завдання - отримати елемент довжини в кожній точці, $\varepsilon(s)$ і кривизну $\kappa(t)$, які визначаються відповідно до формул (3.28в-г).

Ці вирази будуть використані для розрахунку якості сплайна Безьє. Нижче розраховано та порівняно кілька подібних задач.

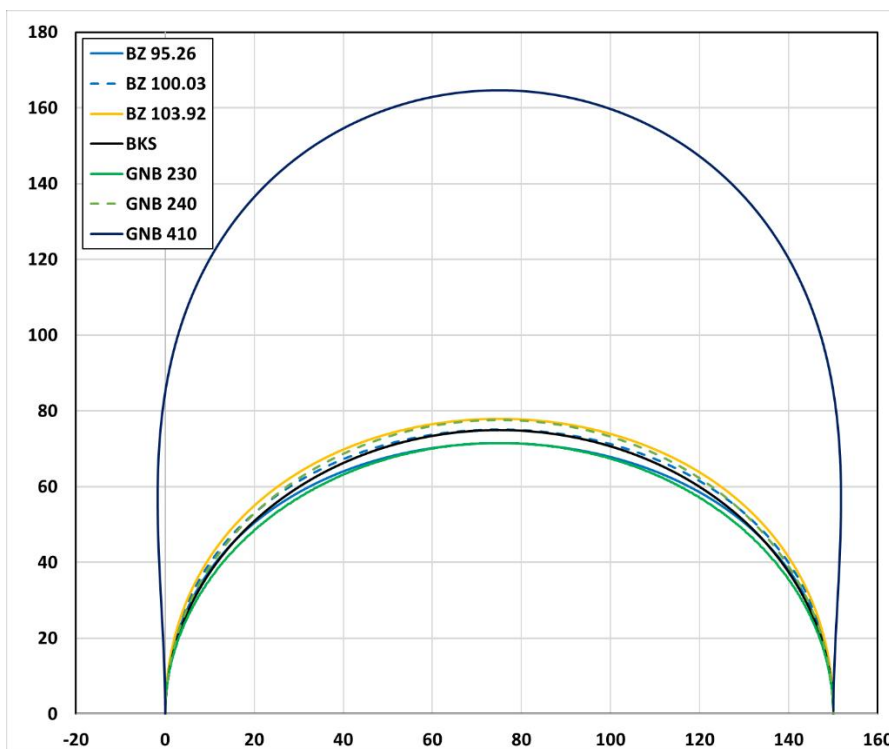
3.6.2 Приклади порівняння якості кривих

3.1. Завдання 1. Перша точка B_1 має координати $(X = 0, Y = 0)$, кінцева точка B_2 має координати $(X = 150, Y = 0)$, дотична в точці B_1 спрямована вертикально, тобто кут (за годинниковою стрілкою) з горизонтальною віссю дорівнює -90° , і в точці B_2 кут дорівнює 90° . Фактично, це відома задача Хорна [101], яка продемонструвала, що мінімізація енергії не завжди є рішенням для найкращої кривої, і зрештою призвела до появи інших критеріїв, скажімо, мінімізації квадрата похідної від кривини [71].

Зрозуміло, що найкращою кривою є півколо діаметром 150. Його довжина, $L_0 = \pi \cdot \frac{150}{2} = 235,62$. Обчислимо якість (енергію) ідеального півкола. Відповідно до (1а) воно дорівнює $E_0 = \left(\frac{2}{150}\right)^2 \cdot \frac{\pi 150}{2} \approx 0.041888$.

Побудуємо сплайни відповідно до різних методів. На Мал. 3.13. позначення BZ 95.26 відноситься до сплайна Безьє (BZ), де дві проміжні точки на заданій дотичній розташовані на відстані 95,26 від будь-якої кінцевої точки. Аналогічно, крива BZ 100.23 використовує одну точку на відстані $D_1 = D_2 = 100.23$ на кожній дотичній. ГН балка (ГНБ) залежить від заданої довжини, тому позначення ГНБ 230 означає, що довжина балки дорівнює 230. Очевидно, що можна отримати багато варіантів BZ і ГНБ. Що стосується коротацийного балкового сплайну, КБС, то він дає лише одну можливу конфігурацію.

Проаналізуємо результати. Перш за все, зауважимо, що КБС насправді дає ідеальне півколо. Що стосується інших кривих, то, на перший погляд, вони здатні дуже добре наблизитися до ідеальної фігури, і кожна, здавалося б, здатна зобразити ідеальне коло.

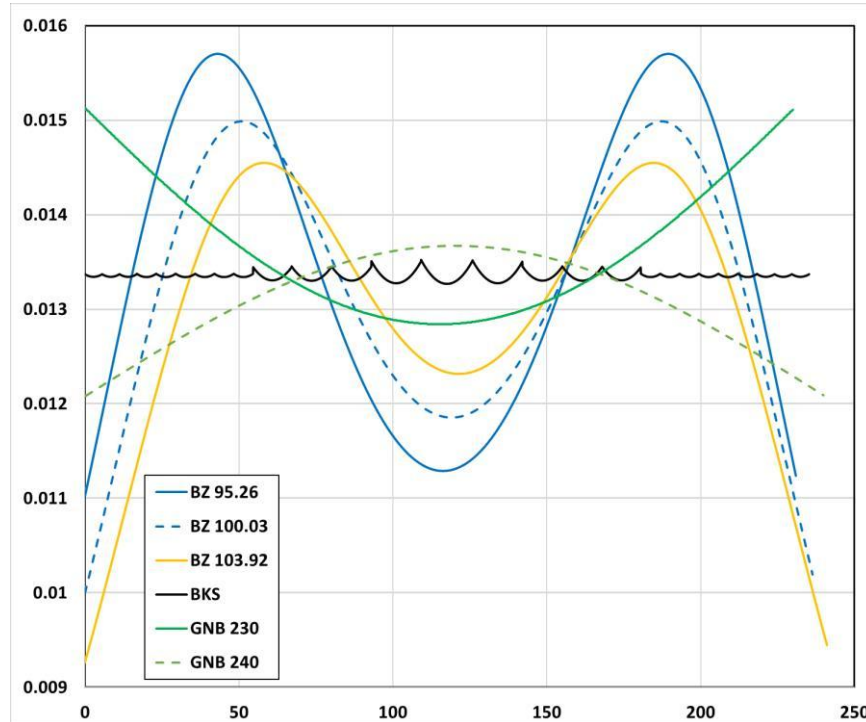


Мал 3.13. Кілька розрахованих сплайнів за методом Безьє (4 точки), КБС та ГНБ.

У цьому відношенні більш інформативними є графіки залежності кривизни від координати довжини для кожного сплайна, зображеного на Мал. 3.14. З нього можна зробити більш певні висновки. По-перше, зазначимо, що КБС дійсно здатна дати ідеальне коло. Хвилеподібність графіка є відображенням недостатньої кількості уявних точок – чим більше точок, тим плавніша кривизна. По-друге, сплайни Безьє дають помітне відхилення від ідеального кола для всіх параметрів оптимізації (відстаней від кінцевих точок). По-третє, ГНБ - це дуже потужна техніка, яка залежить від обраної довжини балки. У випадку, коли задана довжина ГНБ збігається з довжиною ідеального кола, вона фактично дає це ідеальне коло.

Порівняємо якість (енергію) кожної зображеної кривої. Результати його розрахунку наведені в таблиці 3.16, де представлено абсолютне значення енергії, а також її приведені значення (поділене на ідеальне значення півкола 0,41888). Результат для КБС дещо відрізняється від ідеального кола через меншу кількість уявних точок (тут використовується лише 28 точок). Щодо

результатів Безьє, то вони близькі до 1 у розглянутому діапазоні обраних відстаней додаткових точок, а найнижчий результат досягається для кривої BZ 103.92.



Мал. 3.14. Графіки кривизни, отримані різними сплайнами для завдання 1.

Таблиця 3.16. Розраховані енергії для різних сплайнів для завдання 1.

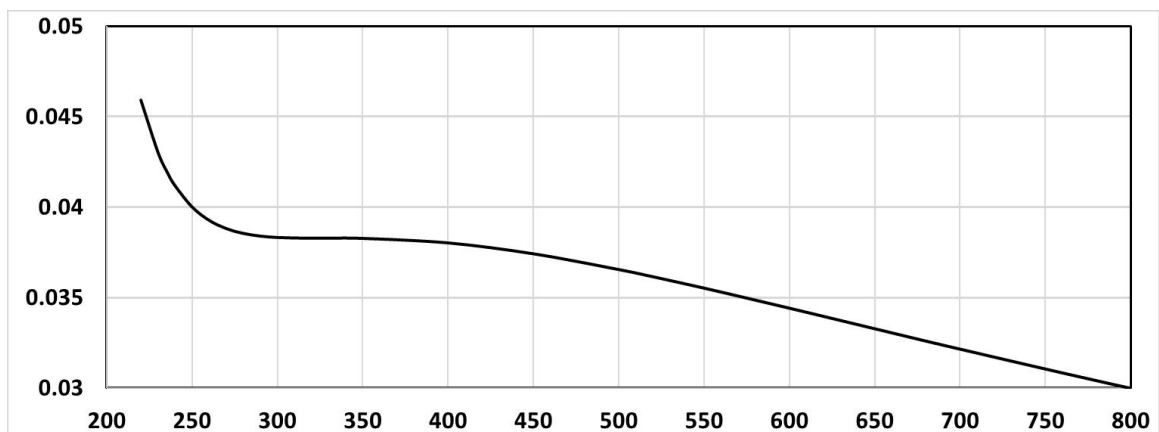
Тип кривої	BZ 110	BZ 115.5	BZ 120	КБС	ГНБ 230	ГНБ 240	ГНБ 410
Якість	0.04305	0.04190	0.04113	0.04190	0.043024	0.041181	0.037927
Відносна якість	1.02774	1.0003	0.9818	1.0003	1.04475	0.98312	0.90544

Очевидно, що поняття енергії не може бути єдиним критерієм добротності (fairness) кривої. Звертаємо увагу, що сплайни, які «охоплюють» ідеальне півколо, дають менші значення енергії. Стосовно результатів таблиці 1 цікаво нагадати результати Хорна [101].

Нагадаємо, що для цієї Задачі 1 було отримано «найкраще» значення енергії, рівне 0,91383 [101]. Отже, побудуємо графік енергії по відношенню до довжини балки за підходом ГНБ, Мал. 3.14. Цікаво відзначити, що в околі ідеальної конфігурації півкола ($L = L_0 = 235.6$) якість кривої лінійно

зменшується з довжиною. Проте в діапазоні довжини $310 < L < 340$ він виходить на локальне «плато». Розрахована якість в цьому діапазоні приблизно дорівнює 0,03828 (при $L=320$). Розділивши це значення на 0,041888 (ідеальне півколо), ми отримаємо приведені значення, що дорівнює 0,9138, що дуже близько до теоретичного значення Хорна. Це свідчить про високу ефективність ГНБ підходу [1].

Подальше збільшення L поза цим діапазоном призводить до постійного повільного зниження енергії, яке не було передбачено в аналізі Хорна [101]. Це пов'язано з зовнішнім відхиленням розрахункової фігури від вертикальних ліній $x = 0$ і $x = 150$, що видно з Мал. 3.15 для ГНБ 410. Для $L \rightarrow \infty$ енергія прямує до нуля.

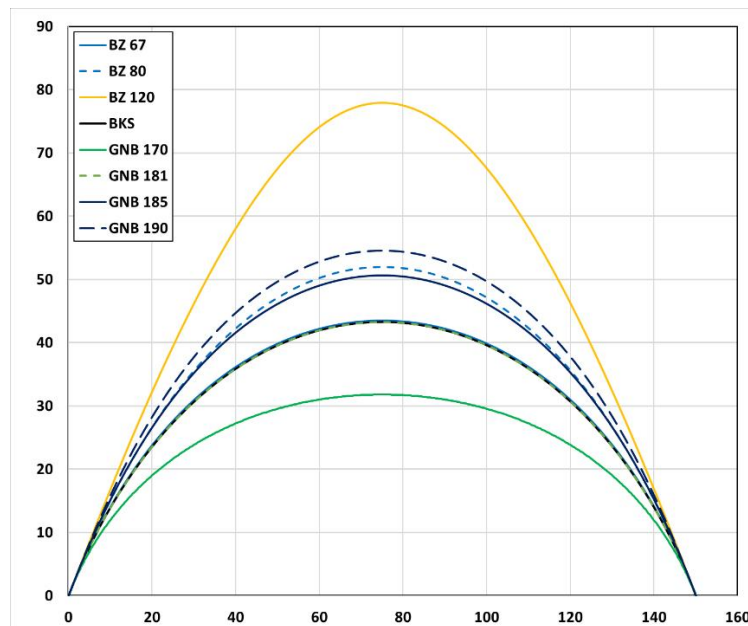


Мал. 3.15. Якість сплайна ГНБ щодо довжини балки для завдання 1.

Задача 2. Ця задача дуже схожа на симетричну Задачу 1. Різниця лише в тому, що в першій точці B_1 кут дотичної нахилений до -60° до горизонтальної осі, а в другій точці B_2 кут дорівнює 60° .

Інтуїтивно зрозуміло, що найкраща очікувана (ідеальна) крива – це сектор кола з дугою 60° . З геометричних міркувань його діаметр повинен задовольняти наступне співвідношення $D/2\cos 30^\circ = 75$, звідки можна отримати $D = 173.20$. Отже, довжина ідеальної фігури дорівнює 181,37. Що стосується енергії ідеальної кривої, то вона дорівнює 0,02418.

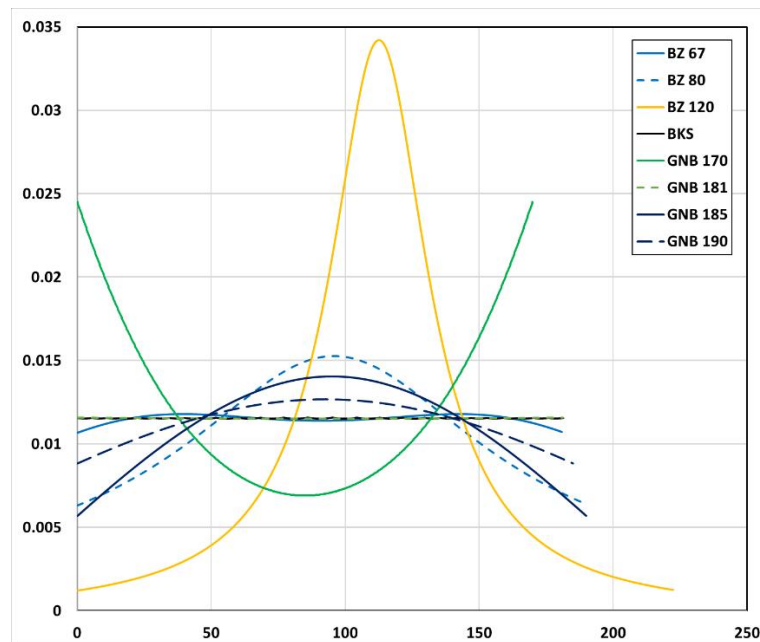
Побудуємо сплайни відповідно до різних методів, Мал. 3.16. Як і вище, КБС насправді дає ідеальний сектор кола. Сплайн Безьє дає дуже близькі результати для відстані, що дорівнює $D_1 = D_2 = 67$. Якщо ця відстань менша, крива Безьє лежить нижче ідеального кола, а коли відстань більша, вона розташована над ідеальною кривою. Схожа картина для сплайнів ГНБ. Якщо їх довжина менша за ідеальну довжину кола, вона розміщується нижче, а в іншому випадку — вище. Інформативним є графік кривизни для кожного сплайна, показаний на Мал. 3.17. Найкращий сплайн Безьє, BZ 67, дуже близький до ідеального кола, а його кривизна майже ідеальна. Те ж саме ми можемо сказати про BCS і ГНБ 185. У порівнянні з КБС для завдання 1 (Мал. 3.12), кривизна для КБС для завдання 2 набагато більш гладка: ми використовуємо тут аж 120 уявних точок. Очевидно, що графіки кривизни дуже важливі для судження про якість різних сплайнів.



Мал. 3.16. Кілька розрахованих сплайнів за методом Безьє, КБС та ГНБ, завдання 2.

Порівняєм якість (енергію) кожної зображеної кривої. Результати розрахунку для задачі 2 наведені в таблиці 3.17. Очевидно, що результати для

різнопланових кривих іноді дуже близькі. Це означає, що енергія не може бути єдиним критерієм ні побудови кривої, ні оцінки її якості.



Мал. 3.17. Графіки кривизни, отримані різними сплайнами для завдання 2

Таблиця 3.17. Розраховані енергії для різних сплайнів для завдання 2.

Крива	BZ 67	BZ 80	BZ 120	КБС 181	ГНБ 170	ГНБ 181	ГНБ 190
Якість	0.0241	0.0246	0.0408	0.0242	0.0303	0.0242	0.0243

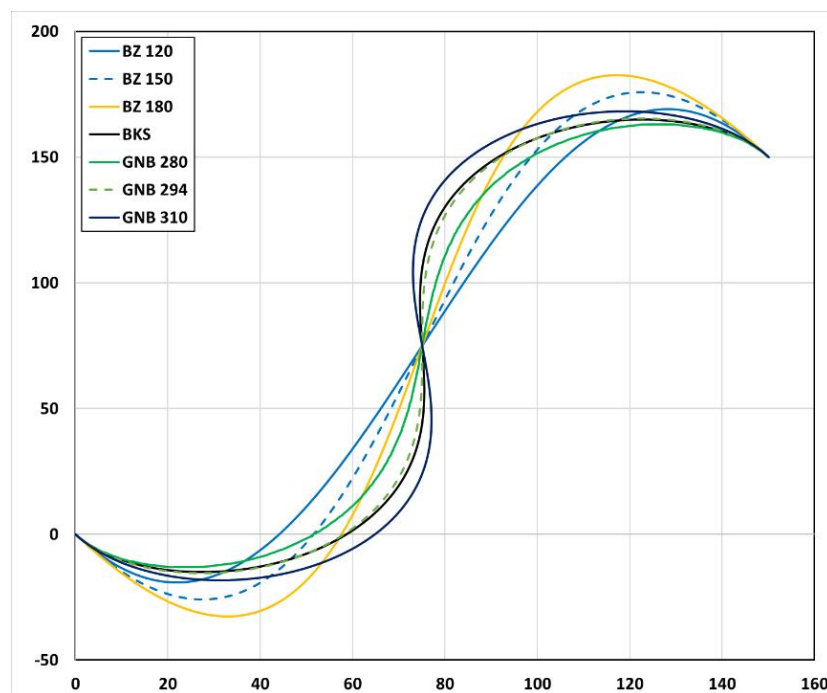
Задача 3. Ця задача більш складна і стосується побудови антисиметричної геометрії. Точка B_1 має координати $(X = 0, Y = 0)$, кінець B_2 має $((X = 150, Y = 150))$, дотична в точці B_1 спрямована під кутом 60° , поки в точці B_2 кут також дорівнює 60° .

Найкраще рішення неможливо сформулювати інтуїтивно, тому тут ми суб'єктивно оцінимо найкраще рішення нижче.

Побудуємо сплайни за різними методиками, Мал. 3.18. Розглянемо підхід КБС, який не потребує жодних допоміжних параметрів. Загальне суб'єктивне враження полягає в тому, що він візуально приємний, а його розрахована довжина становить близько 294. Отже, виберемо допоміжні параметри в інших методах сплайнів, щоб наблизитися до цього сплайна. Це не завжди можливо

для сплайнів Безьє. Якщо взяти відстань дуже малою – вона буде нагадувати пряму лінію між двома кінцевими точками, і, звичайно, цей випадок слід відкинути.

Якщо ми візьмемо відстань у сплайні Безьє занадто великою, графік буде розміщено далеко за межами вертикального діапазону $-150 < y < 150$. Таким чином, ми суб'єктивно вибрали відстані, що дорівнюють 120, 150 і 180, як кандидатів на найкращу криву Безьє. Тим не менш, вони не мають приємного вигляду, і це можна підтвердити графіками кривизни, Мал. 3.18. Що стосується ГНБ сплайну, то він повністю збігається з КБС, якщо прийняти його довжину 294, Мал. 3.18. Збільшення або зменшення довжини призводять до більш вільної або жорсткої геометрії відповідно.

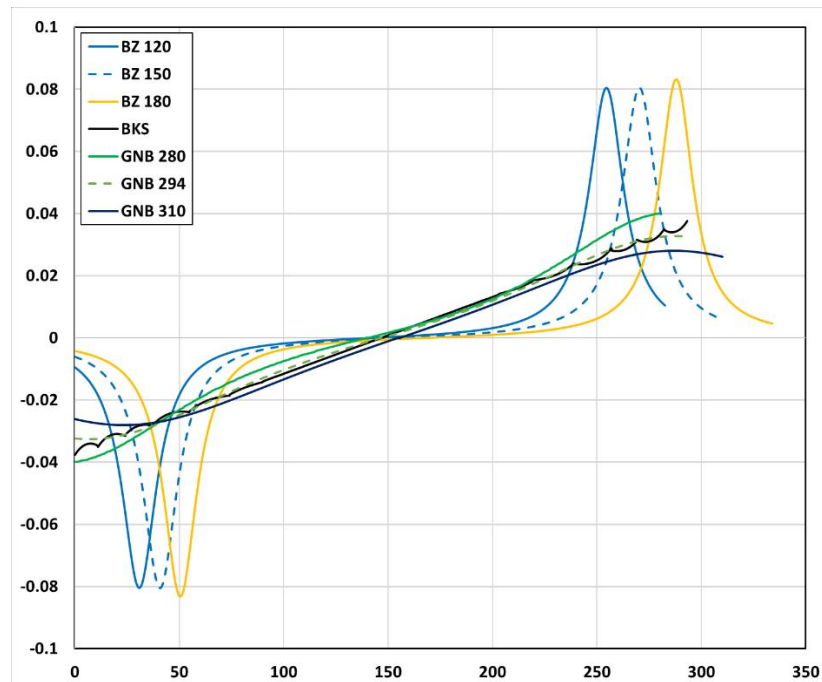


Мал. 3.18. Кілька розрахованих сплайнів за методом Безьє, КБС та ГНБ, завдання 3.

Більш інформативними є графіки кривизни відносно поточної координати довжини, Мал. 3.19. Кривизна КБС дуже плавна, фактично є прямою лінією (невеликі флуктуації зумовлені обмеженою кількістю уявних точок). Отже, з його візуального представлення можна зробити важливий

висновок. КБС насправді є спіраллю Корну. На кожній маленькій прямій ділянці $P = \text{const}$, тому моменти (кривизна) змінюються лінійно. У випадку, якщо проміжні точки є уявними, сила між ними не змінюється, тому вся ділянка між будь-якими реальними точками є спіраллю Корну.

Як бачимо, ГНБ повністю збігається з КБС у випадку, якщо його довжина дорівнює довжині КБС. Якщо ГНБ коротший за КБС, то його кривизна більша, ніж у КБС. І навпаки, для довшого ГНБ його кривизна менша. Що стосується кривої Безьє, то вона демонструє великі локальні кривизни для всіх трьох розглянутих відстаней. Як бачимо, крива Безьє неефективна для антисиметричного випадку.



Мал. 3.19. Графіки кривизни, отримані різними сплайнами для завдання 3

Порівняємо енергію для кожної кривої. Результати його розрахунку для задачі 3 наведені в табл. 3.18. Очевидно, що результати для кривих Безьє дуже погані. Отже, дуже велика різниця в енергії може свідчити про початкові притаманні недоліки. Що стосується ГНБ, результати для нього близькі для КБС, оскільки їх довжини подібні. У будь-якому випадку, змінюючи довжину ГНБ, його якість завжди може бути кращою, ніж у КБС.

Таблиця 3.18 Розраховані енергії для різних сплайнів для завдання 3.

Крива	BZ 120	BZ 150	BZ 180	КБС	ГНБ 280	ГНБ 294	ГНБ 310
Якість	0.2080	0.2092	0.2173	0.1286	0.1373	0.1284	0.1225

Задача 4. Ця задача подібна до попередньої, але не є антисиметричною. Точка B_1 має координати $(X = 0, Y = 0)$, друга точка B_2 має координати $(X = 150, Y = -150)$ дотична в точці B_1 спрямована під кутом -60° , а в точці B_2 кут дорівнює 0° .

Найкраще рішення неможливо сформулювати інтуїтивно, тому тут ми суб'єктивно оцінимо найкраще рішення нижче.

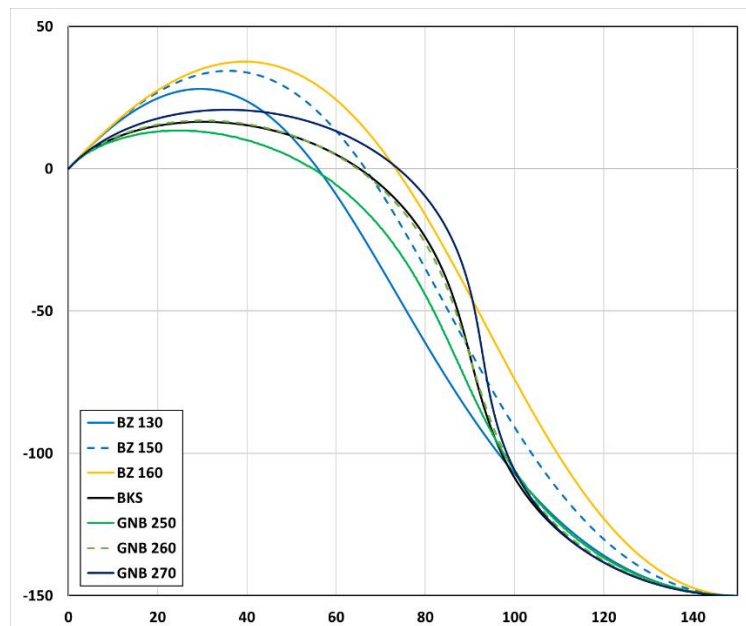
Побудуємо сплайни відповідно до різних методів, Мал. 3.19. Що стосується КБС, то загальне суб'єктивне враження полягає в тому, що він візуально приємний, а його розрахована довжина становить приблизно 260. Отже, вибрали допоміжні параметри в інших сплайнах, щоб наблизитися до цього сплайна. Як і в Задачі 3, це неможливо для сплайнів Безьє – вони відхиляються від КБС для будь-якого обраного параметра відстані. Отже, результати для сплайнів Безьє показані для трьох суб'єктивно вибраних відстаней – 100, 125 і 150. Тим не менш, вони не виглядають приємно, і це враження можна підтвердити графіками кривизни, Мал. 3.21, які мають великі локальні піки. кривизни, що заборонено для «добротного» (fair) сплайну [71]. Що стосується ГНБ, то він повністю збігається з КБС, якщо взяти його довжину рівною 260, Мал. 3.20. Збільшення або зменшення довжини призводить до більш вільної або жорсткої геометрії відповідно.

Інформативними є графіки кривизни відносно поточної координати довжини, Мал. 3.21. Кривизна КБС насправді є прямою лінією (невеликі коливання зумовлені обмеженою кількістю уявних точок), тому, очевидно, КБС є спіраллю Корню.

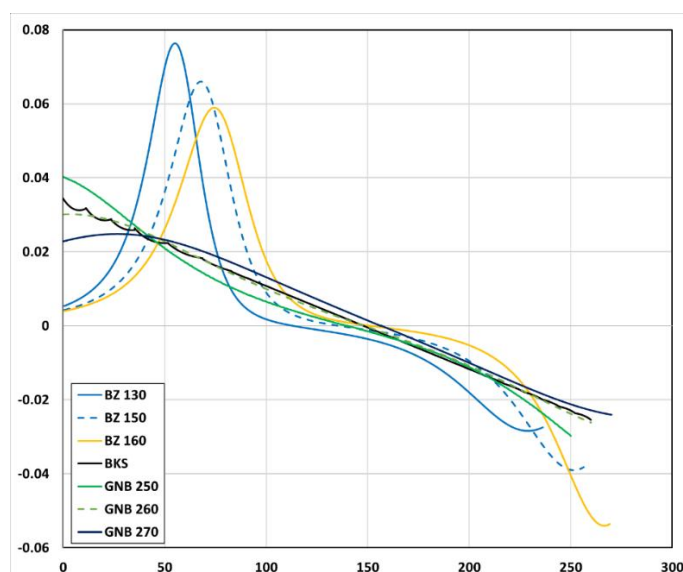
Як і в Задачі 3 вище, зауважимо, що ГНБ повністю збігається з КБС у випадку, якщо його довжина дорівнює довжині КБС, і може бути більш натягнутим або вільним залежно від того чи довжина ГНБ коротша або довша

за довжину КБС. Крива Безьє демонструє велику кривизну для всіх трьох вибраних відстаней.

Порівняємо енергію для кожної кривої. Розрахунки для задачі 4 наведені в табл. 3.19. Очевидно, що результати для кривих Безьє дуже погані і свідчать про неповноцінність кривої. Що стосується ГНБ, результати для енергії близькі для КБС, оскільки їх довжини подібні. У будь-якому випадку, змінюючи довжину ГНБ, його якість завжди може бути кращою, ніж у КБС.



Мал. 3.20. Розраховані сплайни за методами Безьє, КБС і ГНБ, задача 4.



Мал. 3.21. Графіки кривизни, отримані різними сплайнами, для задачі 4

Таблиця 3.19. Розраховані енергії для різних сплайнів для завдання 4.

Крива	BZ 100	BZ 125	BZ 150	КБС	ГНБ 250	ГНБ 260	ГНБ 270
Якість	0.1156	0.1114	0.1153	0.0781	0.0835	0.0778	0.0753

Висновки за розділом 3

Основний результат розділу – це створення принципово нової методології розрахунку ГН балок, що представляє собою суму криволінійного розривного базового рішення, БР, та згладжувального рішення, яке будується в криволінійних координатах БР. Методологія має деякі особливості коротацийного ГН підходу, проте містить принципово нові ідеї і результати. Вони такі:

1. БР на кожній ітерації має дві силові компоненти: а) згинальний момент і осьова сила, що закладені в ньому. Ці компоненти забезпечують вихідну довжину (з врахуванням видовження) та кривизну елемента, яка в значній степені враховує геометричну нелінійність і діючі навантаження.

2. ЗР забезпечує геометричну безперервність і рівновагу в кожній точці елемента та його границь в повному рішенні, ПР, це означає, що воно ліквідує розриви, створені БР. Одним із найбільших досягнень роботи є побудова ефективних аналітичних ЗР для трьох варіантів: лінійна балка, Л ЗР; та ГН балка при великій розтягуючій силі та ГН балка при помірно розтягуючій чи стискаючій силі. Щоб уникнути обчислювальної невизначеності для слабо вигнутих елементів, отримано відповідні розклади в ряд Тейлора вищевказаних рішень щодо кутової координати. Отже, загалом наведено 6 наборів точних розв'язків для рівномірно навантаженого елемента.

3. Запропоновано ефективну ітераційну процедуру обчислення балки з проведенням коригування БР по результатам визначення ЗР. Він містить дві різні групи коефіцієнтів, які обмежують максимально допустиму корекцію параметрів БР. Метою першої групи є обмеження максимальних значень розрахункових параметрів ЗР. Друга група залежить від збіжності результатів,

що контролюється зміною знаку екстремального значення кожного заданого параметра на двох послідовних ітераціях.

4. Приклади розрахунку показують ефективність алгоритму уточнень, та застосованих рішень, зокрема врахування ЗР отриманих по деформованій схемі, коли воно саме є геометрично нелінійним. Продemonстровано, що даний підхід забезпечує на порядки меншу кількість ітерацій, меншу в рази кількість необхідних елементів, і, на відміну від існуючих підходів, не залежить від вибору початкового положення не тільки балки, але і її елементів, що можуть бути розкидані в на площині в довільному порядку і орієнтації.

5. Вперше в літературі запропоновано ефективну комбіновану схему застосування балкових і канатних елементів, коли в зоні опор, контактів, дій зосереджених сил застосовуються балкові елементи, а на всіх інших ділянках – канатні. Суть її полягає в формулюванні специфічних умов спряження на межах між різними елементами. На прикладах довгих розтягнутих балок показана надзвичайна ефективність такого об'єднання балки і каната.

6. Проведено порівняльний аналіз застосування для задач геометричного моделювання (побудова сплайнів) трьох різних методів: коротаційний балковий сплайн, КБС, сплайни Безьє, VZ, та ГН балка, ГНБ. Показано, що VZ значно поступається по якості перед двома іншими, і дає значні локальні піки кривизн, і вимагає подальшого уточнення чи оптимізації. КБС для всіх розглянутих задач приводить до досить приємних результатів. У всіх випадках розрахована кривизна є або постійною (симетричні випадки), або лінійно змінюється з координатою довжини сплайна. Єдиною технічною вимогою до його реалізації є необхідність використання великої кількості уявних точок. ГНБ є найефективнішою методикою як для сплайнового моделювання, так і для моделювання деформації реальних гнучких балок. Його недоліком для геометричної конструкції є те, що довжина балки повинна бути обрана заздалегідь, проте значення, отримане за допомогою рішення КБС, є хорошим початковим наближенням для подальшого застосування ГНБ.

РОЗДІЛ 4. ПРОСТОРОВІ ГН БАЛКИ

4.1 Базова геометрія

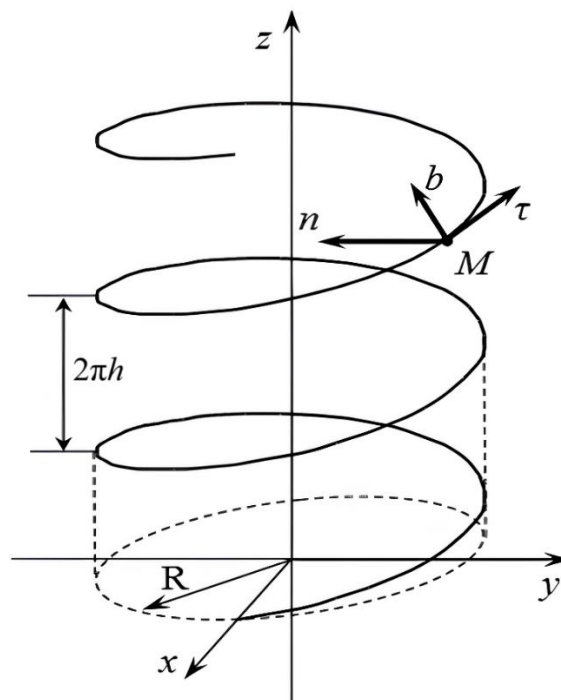
В даному розгляді розглядаються 3D балки при ГН деформуванні. Ця задача набагато складніша, ніж для 2D геометрії і містить багато нових нюансів [181]. Тому мета даного розділу полягає в тому, щоб розглянути лише базове рішення для ГН балки, і показати, що навіть лише базове рішення здатне моделювати просторове деформування балок в деяких простих випадках, не застосовуючи при цьому Згладжувальне рішення.

Базовим рішенням для просторового елемента вибираємо ділянку хелікса, як найпростішої тривимірної фігури, Мал 4.1, [169]. Без втрати загальності. Вважаємо, що початкове положення хелікса дається координатами:

$$x = a \cos \phi; \quad y = a \sin \phi; \quad z = h\phi \quad (4.1a)$$

Де a та h - геометричні характеристики хелікса. Замість параметричного кута ϕ часто зручно розглядати елемент довжини хелікса s

$$s = \sqrt{a^2 + h^2} \phi \quad (4.1b)$$



Мал 4.1. Елемент хелікса [169]

Запишемо відомі диференційні залежності Френе для одиничних векторів хелікса [169], де \vec{t} - дотичний, \vec{n} – нормальний, і $\vec{\beta}$ – бінормальний вектори:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\vec{t} &= \frac{a}{a^2+h^2}\vec{n} = K \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \frac{-a}{a^2+h^2}\cdot\vec{t} + \frac{h}{a^2+h^2}\cdot\vec{\beta} = -K\cdot\vec{t} + T\cdot\vec{\beta} \\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} &= -\frac{h}{a^2+h^2}\cdot\vec{n} = -T\cdot\vec{n}\end{aligned}\quad (4.1б)$$

Де ми ввели параметри кривизни K та скрута T , яких геометричних характеристик хелікса. Можна отримати наступні зручні співвідношення між геометричними параметрами:

$$\frac{a}{a^2+h^2} = K \quad \frac{h}{a^2+h^2} = T \quad K^2 + T^2 = \frac{1}{a^2+h^2} \quad a = \frac{K}{H^2} \quad h = \frac{T}{H^2} \quad K^2 + T^2 = H^2 \quad (4.1в)$$

Тоді розглядаючи рівняння (4.1б) як векторні диференційні рівняння відносно одиничних векторів, отримаємо загальне рішення для довільних точок $\phi = sH$ в вигляді зручному для застосування МПП:

$$\begin{pmatrix} \vec{t}(\phi) \\ \vec{n}(\phi) \\ \vec{\beta}(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \cos \phi + h^2}{a^2+h^2} & \frac{a \sin \phi}{\sqrt{a^2+h^2}} & \frac{-ah \cos \phi + ah}{a^2+h^2} \\ \frac{-a \sin \phi}{\sqrt{a^2+h^2}} & \cos \phi & \frac{h \sin \phi}{\sqrt{a^2+h^2}} \\ \frac{-ah \cos \phi + ah}{a^2+h^2} & \frac{-h \sin \phi}{\sqrt{a^2+h^2}} & \frac{a^2+h^2 \cos \phi}{a^2+h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}_0 \\ \vec{n}_0 \\ \vec{\beta}_0 \end{pmatrix} \quad (4.1г)$$

Або

$$\begin{pmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{\beta}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K^2 \cos sH + T^2}{H^2} & \frac{K \sin sH}{H} & \frac{KT(1-\cos sH)}{H^2} \\ \frac{-K \sin sH}{H} & \cos sH & \frac{T \sin sH}{H} \\ \frac{KT(1-\cos sH)}{H^2} & \frac{-T \sin sH}{H} & \frac{K^2+T^2 \cos sH}{H^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}_0 \\ \vec{n}_0 \\ \vec{\beta}_0 \end{pmatrix} \quad (4.1д)$$

Іншим, необхідним нам для подальшого застосування, рівнянням геометричного зв'язку положення довільної точки \vec{B} відносно початкової точки \vec{A} є наступне:

$$\overrightarrow{AB} = \left\{ \frac{a^2 \sin \phi}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{h^2 \phi}{\sqrt{a^2 + h^2}}; a(1 - \cos \phi); \frac{-ah \sin \phi}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{ah \phi}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right\} \begin{pmatrix} \vec{t}_0 \\ \vec{n}_0 \\ \vec{\beta}_0 \end{pmatrix} \quad (4.2a)$$

Або

$$\overrightarrow{AB} = \left\{ \frac{K^2 \sin sH}{H^3} + \frac{T^2 sH}{H^3}; \frac{K}{H^2} (1 - \cos sH); \frac{-KT \sin sH}{H^3} + \frac{KT sH}{H^3} \right\} \begin{pmatrix} \vec{t}_0 \\ \vec{n}_0 \\ \vec{\beta}_0 \end{pmatrix} \quad (4.2б)$$

Тоді положення довільної точки \vec{B} є таким:

$$\vec{B} = \vec{A} + \overrightarrow{AB} \quad (4.2в)$$

Вважаємо, що положення початкової точки елемента, є відомим, тобто:

$$\vec{A} = p_{0x} \vec{i} + p_{0y} \vec{j} + p_{0z} \vec{k} \quad (4.2г)$$

Де глобальні координати p_{0x}, p_{0y}, p_{0z} характеризують положення точки \vec{A} . Таким чином, враховуючи залежності (4.1г) та (4.1б) положення і направляючі вектори всіх точок хеліксного елемента є відомими, якщо відомі характеристики початкової точки, початкових векторів, та геометричні характеристики хеліксу. Тобто, всі точки хеліксу є відомими, якщо задані 14 початкових параметрів:

$$p_{0x}, p_{0y}, p_{0z}, t_{0x}, t_{0y}, t_{0z}, n_{0x}, n_{0y}, n_{0z}, \beta_{0x}, \beta_{0y}, \beta_{0z}, K, T \quad (4.2д)$$

Формально, вектор $\vec{\beta}$ можна було б виключити з розгляду, бо він жорстко зв'язаний з парою \vec{t}, \vec{n} як їх векторний добуток. Більше того, кожен одиничний вектор характеризується лише 2 параметрами, а третій визначається із норми елемента (проте має знак). Більше того, якщо відомий вектор дотичної, то вектор нормалі має лише одну ступінь вільності. Тим не менше, розгляд елемента хелікса, як такого, що має 14 характерних параметрів є зручним.

4.2 Фізичні закони деформування елемента

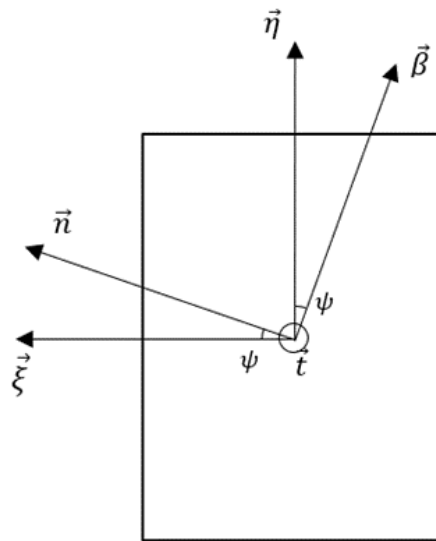
4.2.1 Зв'язок моментів з кривизною і скрутом

Переходимо до фізики процесу деформування. Спочатку розглянемо

реальне тіло, що характеризується певним перерізом. В цьому перерізі нехай є визначений напрямок дотичного вектора \vec{t}_i кожного елементу i (він утворюється як початковий ще до деформації, або по результатам уточнення напрямків після певної ітерації j) і вектори внутрішньої геометрії, $\vec{\xi}_i$ та $\vec{\eta}_i$, матеріальні вектори. В подальшому індекси i будемо використовувати, коли розглядається послідовність (сусідство) різних елементів. Це внутрішня права трійка векторів записується в такій послідовності (\vec{t} , $\vec{\xi}$ та $\vec{\eta}$). Також маємо кут ψ , який показує як вектор \vec{n} природної системи векторів (\vec{t} , \vec{n} та $\vec{\beta}$), що розглядалися вище і зв'язані між собою залежностями Френе, повернутий навколо \vec{t} (Мал 4.2). Маємо такі залежності між матеріальними і природними векторами:

$$\vec{n} = \vec{\xi} \cdot \cos\psi + \vec{\eta} \cdot \sin\psi \quad \vec{\beta} = -\vec{\xi} \cdot \sin\psi + \vec{\eta} \cdot \cos\psi \quad (4.3a)$$

$$\vec{\xi} = \vec{n} \cdot \cos\psi - \vec{\beta} \cdot \sin\psi \quad \vec{\eta} = \vec{n} \cdot \sin\psi + \vec{\beta} \cdot \cos\psi \quad (4.3b)$$



Мал 4.2. Внутрішня геометрія січення та природні вектори

Всі ці вектори відомі для кожної точки, якщо відомі 12 геометричних характеристик першої точки (3 положення і 9 початкових напрямків матеріальної системи векторів), а також геометричні характеристики K та T , а також кут ψ . Ці три додаткових параметри для ГН поведінки балки визначаються із фізичних законів деформування.

Вважаємо, що до (малого) елементу прикладені глобальні постійні базові моменти і глобально постійні базові сили, які можуть незначно змінюватися від попередньої ітерації (вірніше такі, що кривизни і скрути не дуже сильно змінюються, тобто не приводять до значної зміни геометрії).

Ці сили і моменти формують нову довжину елемента та його природні вектори (відносно матеріальних), відносно яких і буде формуватися задача деформування.

Вважаємо, що розглядуваний елемент, довжиною Δs або тут просто s має відомий напрямок \vec{t} , $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$. Він має початкову кривизну $K_0 = \frac{1}{R_0}$, таку, що початковий напрям нормалі (до деформування) природної кривої співпадає з внутрішнім вектором $\vec{\xi}$, тобто $\vec{n}_0 = \vec{\xi}_0$. Може бути і початковий скрут T_0 .

Вважаємо, що до елементу прикладені моменти \vec{M} , які можна розкласти на проєкції

$$\vec{M} = M_t \vec{t} + M_\xi \vec{\xi} + M_\eta \vec{\eta} \quad (4.4a)$$

За фізикою процесу деформування, прикладення моменту M_η (навколо $\vec{\eta}$) до елементу малої довжини Δs приводить до отримання додаткового кута деформування $\Delta\theta_\eta$, :

$$\Delta\theta_\eta \vec{\eta} = -\frac{M_\eta \Delta s}{EI_\eta} \vec{\eta} \quad (4.4б)$$

Проте ми вважаємо, що відносно цієї осі була і початкова кривизна K_0 . Тому рівняння (4.4б) перепишемо з врахуванням її:

$$\Delta\theta_\eta \vec{\eta} = K_0 \Delta s \vec{\eta} - \frac{M_\eta \Delta s}{EI_\eta} \vec{\eta} \quad (4.4в)$$

Прикладення моменту M_ξ (навколо $\vec{\xi}$) до елементу малої довжини Δs приводить до отримання додаткового кута деформування $\Delta\theta_\xi$, :

$$\Delta\theta_\xi \vec{\xi} = -\frac{M_\xi \Delta s}{EI_\xi} \vec{\xi} \quad (4.4г)$$

Наша задача – це отримати *природну* нормаль (Мал 4.2). За скалярним визначенням кривизни маємо:

$$\frac{\Delta\theta}{K} = \Delta s \quad (4.5a)$$

Де $d\theta$ – кут повороту, K - кривизна, Δs – довжина елементу. За векторним визначенням кривизни природної нормалі для правої трійки векторів, маємо:

$$\left(\vec{n} \frac{1}{K}\right) \times (\vec{\beta} \Delta\theta) = \vec{t} \Delta s \quad (4.5б)$$

Спочатку знайдемо узагальнений кут повороту, $\Delta\theta$, та вектор повороту, $\vec{\beta}$, малої ділянки Δs . Для цього знайдемо суму кутів (4.4в) та (4.4г):

$$\vec{\beta} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = -\frac{M_\eta}{EI_\eta} \vec{\eta} + K_0 \vec{\eta} - \frac{M_\xi}{EI_\xi} \vec{\xi} \quad (4.5в)$$

Звідки слідує:

$$\vec{\beta} = \frac{-\frac{M_\eta}{EI_\eta} \vec{\eta} + K_0 \vec{\eta} - \frac{M_\xi}{EI_\xi} \vec{\xi}}{\sqrt{\left(\frac{M_\eta}{EI_\eta}\right)^2 + \left(K_0 - \frac{M_\xi}{EI_\xi}\right)^2}} \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \sqrt{\left(K_0 - \frac{M_\eta}{EI_\eta}\right)^2 + \left(\frac{M_\xi}{EI_\xi}\right)^2} \quad (4.5г)$$

Підставляючи (4.5г) в (4.5б) отримаємо як напрямок нормалі, так і величину результуючої кривизни:

$$K = \sqrt{\left(K_0 - \frac{M_\eta}{EI_\eta}\right)^2 + \left(\frac{M_\xi}{EI_\xi}\right)^2} \quad \vec{n} = \vec{\beta} \times \vec{t} \quad (4.5д)$$

Зокрема, якщо діє лише момент в напрямку, як і початкова кривизна, то отримаємо, що $\vec{\beta} = \vec{\eta}$, а $\vec{n} = \vec{\xi}$.

Довершуючи фізичну постановку для зміни природних векторів, запишемо рівняння для зміни скрута

$$T = T_0 - \frac{M_t}{GJ} \quad (4.5е)$$

Природні вектори задовольняють рівнянням Френе (4.1б).

Цими рівняннями ми пов'язали зміну кривизни і скрута, а також напрями природних векторів з глобальними моментами, що діють на елемент (маленьку ділянку). Що стосується видовження елемента (зміна довжини), то вона вираховується по базовій поздовжній силі (проекція на локальний вектор \vec{t}) так само, як і розділах 2 та 3.

4.2.2 Отримання хелікса деформуванням прямого стержня

Основне питання даного пункту полягає в тому, щоб визначити комбінацію і спосіб прикладення зовнішніх сил, щоб утворити хелікс з заданими значеннями кривизни і скрута із початково прямого стержня. Вище ми уже побачили, що внутрішні сили можуть змінювати ці дві основні геометричні характеристики лінії, відповідно до формул (4.4) та (4.5). Тому питання полягає в тому, щоб отримати відповідність між зовнішніми і внутрішніми силами (моментами).

Теоретичні рішення для просторових балок на відміну від 2D балки є менш детальними. Зазвичай в літературі обмежуються отриманням спіралі з початкової прямої гнучкої консольної балки, до вільного кінця якої прикладанні зосереджена сила та зосереджений момент. Ця задача отримала назву задачі Кірхгофа. Вона спочатку була розв'язана Лавом [155] для балки з ізотропним січенням, а згодом була узагальнена для балок з різними властивостями січення [157]. В сучасній літературі ця задача активно застосовується для тестування методів розрахунку 3D ГН балок.

Спочатку розглянемо одну залежність для базових векторів хелікса. Можна показати, що певний глобальний вектор \vec{k} може бути представлений як комбінація локальних векторів в довільній точці ϕ :

$$\vec{k} = \frac{h \cdot \vec{t}(\phi)}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{a \cdot \vec{\beta}(\phi)}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \vec{z} = const \quad (4.6a)$$

Тут ми ввели два вектори: перший \vec{k} , який отримується, коли розглядається конкретний хелікс (4.1a) і \vec{z} в усіх інших випадках. Зокрема, як слідує з (4.6a) та (4.1г) маємо:

$$\vec{z} = \frac{h \cdot \vec{t}_0}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{a \cdot \vec{\beta}_0}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad (4.6б)$$

Тобто глобальний напрямок \vec{z} може бути визначеним із початкових локальних векторів для довільної ділянки хелікса.

Тепер розглянемо постійну зосереджену силу, \vec{Q} , що діє в глобальному напрямку \vec{z} вздовж усього елемента:

$$\vec{Q} = P \cdot \vec{z} \quad (4.7a)$$

Де, введено скалярне значення сили, P . Тоді враховуючи диференційну залежність між силою та приростами моментів [Ory-book], отримаємо:

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = P(\vec{z} \times \vec{t}) = -\frac{P}{\sqrt{a^2+h^2}}(\vec{t} \times (h \cdot \vec{t} + a\vec{\beta})) = \frac{a \cdot P}{\sqrt{a^2+h^2}}\vec{n} \quad (4.7б)$$

Розкладемо (4.7б) по трьох скалярних проекціях, що дає систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dM_t(s)}{ds} - M_n(s)K &= 0 \\ \frac{dM_n(s)}{ds} + M_t(s)K - M_\beta(s)T &= P \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} = P \frac{K}{H} \\ \frac{dM_\beta(s)}{ds} + M_n(s) \cdot T &= 0 \end{aligned} \quad (4.7в)$$

Рішення цієї системи з ненульової правою частиною дається наступними виразами, що описують доповнене частинне рішення, тобто те, яке в нульовій (початковій) точці елемента приймає значення рівне нулю:

$$M_{t,zp} = \frac{PK^2}{H^2\sqrt{K^2+T^2}}(1 - \cos Hs) \quad (4.8a)$$

$$M_{n,zp}(s) = \frac{PK}{H\sqrt{K^2+T^2}}\sin Hs \quad (4.8б)$$

$$M_{\beta,zp} = \frac{PKT}{H^2\sqrt{K^2+T^2}}(\cos Hs - 1) \quad (4.8в)$$

Повне рішення системи (4.7в) повинно включати в себе суму однорідного загального рішення, що задовольняє початковим умовам, та доповненого нульового частинного рішення. Однорідне загальне рішення дається матрицею (4.1д), оскільки диференційні рівняння для вектору моментів, як для довільного іншого вектору, є тотожними з рівняннями для одиничних базисних векторів. Запишемо цю суму:

$$M_t(s) = M_{t,0} \left(\frac{T^2+K^2\cos Hs}{H^2} \right) + M_{n,0} \frac{K \cdot \sin Hs}{H} + M_{\beta,0} \frac{TK \cdot (1-\cos Hs)}{H^2} + \frac{PK^2(1-\cos Hs)}{H^3} \quad (4.9a)$$

$$M_n(s) = -M_{t,0} \frac{K \cdot \sin Hs}{H} + M_{n,0} \cos Hs + M_{\beta,0} \frac{T \cdot \sin Hs}{H} + \frac{PK \cdot \sin Hs}{H^2} \quad (4.9б)$$

$$M_\beta(s) = M_{t,0} \frac{KT(1-\cos Hs)}{H^2} - M_{n,0} \frac{T \sin Hs}{H} + M_{\beta,0} \left(\frac{T^2 \cos Hs + K^2}{H^2} \right) + \frac{PKT(\cos Hs - 1)}{H^3} \quad (4.9в)$$

Формулюємо математично відому задачу Кіркгофа, з якою потім будемо порівнювати наше чисельне рішення. Розглядаємо стержень круглого січення.

Це значить, що всі поперечні напрямки в ньому рівнозначні, тобто $EI_\eta = EI_\xi$. Більш того, можна покласти, що природна система векторів співпадає з матеріальною, тобто кут $\psi = 0$. Тобто, якщо потрібно створити хелікс з кривизною K та скруто T , то це значить, що в кожній точці хелікса мають діяти наступні моменти:

$$M_\beta(s) = -K \cdot EI = \text{const}; \quad M_t(s) = -T \cdot GJ = \text{const}; \quad M_n(s) = 0 \quad (4.9\Gamma)$$

Таким чином, потрібно підібрати таке значення глобальної сили P , та такі початкові значення $M_{t,0}$, $M_{n,0}$, $M_{\beta,0}$, щоб в кожній точці виконувалися умови (4.9Г). Почнемо з умови (4.9Б). Очевидно, що $M_{n,0} = 0$. Тоді для інших параметрів маємо таку необхідну умову, що слідує з (4.9Г) при скороченні на спільний множник $\sin Hs$.

$$-M_{t,0}K + M_{\beta,0}T + \frac{PK}{\sqrt{K^2+T^2}} = 0 \quad (4.10a)$$

Виразивши звідси необхідне значення P , маємо:

$$P = M_{t,0}H - M_{\beta,0} \frac{TH}{K} \quad (4.10Б)$$

Тепер, підставивши (4.10Б) спочатку в (4.9а), а потім в (4.9в), отримаємо, що значення моментів в бінормальному і дотичному напрямках є такими:

$$M_t(s) = M_{t,0} = \text{const} \quad (4.10в)$$

$$M_\beta(s) = M_{\beta,0} = \text{const} \quad (4.10Г)$$

Тобто, якщо сила направлена вздовж осі \vec{z} , то умова (4.10Б) забезпечує незмінність моментів для всіх точок елемента.

Тепер вияснимо, як за допомогою зовнішніх навантажень створити в початковій точці необхідні моменти (4.9Г). Розглянемо в доповнення до глобальної сили (4.7а) ще і глобальний момент, M_{gl} , що також діє в напрямку \vec{z} :

$$\vec{M} = M_{gl} \cdot \vec{z} = \frac{M_{gl}h \cdot \vec{t}(\phi)}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{M_{gl}a \cdot \vec{\beta}(\phi)}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{M_{gl}h \cdot \vec{t}_0}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{M_{gl}a \cdot \vec{\beta}_0}{\sqrt{a^2+h^2}} \quad (4.11a)$$

Тобто глобальний момент створює такі початкові моменти:

$$M_{t,0,M} = \frac{M_{gl}h}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{M_{gl}T}{H} \quad M_{\beta,0,M} = \frac{M_{gl}a}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{M_{gl}K}{H} \quad (4.11б)$$

Так само, ще додаткові початкові моменти можна створити за допомоги розглядуваної уже глобальної сили. Для цього розмістимо силу \vec{Q} (4.7а) на відстані l по нормалі \vec{n}_0 (тобто всередину хелікса) до розглядуваної початкової точки. Ця сила приводить до такого початкового моменту:

$$\vec{M}_{0,P} = \vec{Q} \times (-l\vec{n}_0) = -Pl \left(\frac{h\vec{t}_0}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{a\vec{\beta}_0}{\sqrt{a^2+h^2}} \right) \times \vec{n}_0 = -\frac{Plh\vec{\beta}_0}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{Pla\vec{t}_0}{\sqrt{a^2+h^2}} \quad (4.11в)$$

Тобто

$$M_{t,0,P} = Pl \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{PlK}{H}; \quad M_{\beta,0,P} = -\frac{Plh}{\sqrt{a^2+h^2}} = -\frac{PlT}{H} \quad (4.11г)$$

З іншої сторони, залежності (4.11г) повинні задовольняти умові (4.10б). Звідки отримуємо рівність, яка задовольняється коли:

$$P = PlK + \frac{PlT}{K} \quad (4.11д)$$

Що приводить до умови, що $l = a = \frac{K}{H^2}$. Таким чином, початкові моменти від сили P можуть бути лише такими:

$$M_{t,0,P} = \frac{PK^2}{H^3}; \quad M_{\beta,0,P} = -\frac{PKT}{H^3} \quad (4.11е)$$

Таким чином, початкові моменти формуються глобальною силою і глобальним моментом. Підставляючи ці сумарні початкові моменти в умови (4.9г), отримаємо:

$$K \cdot EI = \frac{PKT}{H^3} - \frac{M_{gl}K}{H} \quad T \cdot GJ = -\frac{PK^2}{H^3} - \frac{M_{gl}T}{H} \quad (4.11ж)$$

В більш загальній формі і іншим способом вказані формули були отримані в роботі [156]. Вони дозволяють знайти глобальну силу (прикладену в середній точці по осі хелікса) і глобальний момент, що дозволяють утворити хелікс з заданими геометричними характеристиками:

$$P = \frac{EI-GJ}{(h^2+a^2)^{3/2}} h; \quad M_{gl} = -\frac{EIa^2+GJh^2}{(h^2+a^2)^{3/2}} \quad (4.12а)$$

або в поняттях кривизни і скрута:

$$P = (EI - GJ)TH; \quad M_{gl} = -\frac{EI \cdot K^2}{H} - \frac{GJ \cdot T^2}{H} \quad (4.12б)$$

4.3 Ітераційний процес розв'язку

Як вказувалося, в даному розділі для побудови ГН рішення для 3D балок використовується лише базове рішення. Це можливо лише для певного класу задач, наприклад, для статично визначених балок, де всі силові фактори можуть бути знайденими з глобальних рівнянь рівноваги. Зауважимо, що незважаючи на більш загальні постановочні формулювання, більшість прикладів, що розглядаються в літературі, власне і є такими задачами.

Алгоритм рішення дещо нагадує метод стрільби, що застосовувався в 2 розділі для канатів, навантажених зосередженими силами. Як уже вказувалося – це не самий надійний алгоритм, проте мета цього розділу інша – відпрацювання базового рішення.

Тут застосовується МПП. На відміну від задач розділу 3, де основна роль МПП полягала в виборі невідомих і зручного отримання системи визначальних рівнянь (коефіцієнтів матриці) відносно них, тут МПП застосовується для безпосереднього послідовного визначення всіх необхідних параметрів. Тобто, по великому рахунку, не формується система визначальних рівнянь. Використовуючи статичну визначеність задачі, зразу ж явно отримуються всі визначальні параметри на одному з кінців всієї системи. Потім такі ж визначальні параметри знаходяться для кінця першого елемента, потім з рівнянь неперервності знаходяться параметри на початку другого і так далі, аж поки ми не дійдемо кінця останнього елемента. Необхідність застосування ітераційного процесу полягає в тому, що рівняння глобальної рівноваги, що дозволяють визначити всі силові параметри на початку першого елемента, можуть бути застосовані лише для заданої геометрії, яка є наперед невідомою.

Розпишемо більш детально алгоритм рішення цієї задачі.

1. Розбиваємо всю систему на N елементів (ділянок). Визначаємо довжини кожного елемента і вводимо для кожного елемента напрям дотичного вектора та локальні матеріальні вектори (для січення). Локальні матеріальні вектори вважаються неперервними як по довжині елемента, так і

на межі між елементами.

2. Вважаємо, що початкова неперервна геометрія всієї системи відома, вона залежить від відомих Базових моментів, і ці Базові (в глобальних векторних координатах) моменти, $\vec{M}_{b,i}^j$, задаються для кожного елемента, j, i є наслідком розрахунку на попередній ітерації, i . Для статично визначеної системи на поточній ітерації $i + 1$ знаходимо глобальні сили і моменти (як векторні величини відносно глобальних координат) на початку всієї системи, тобто на початку першого елемента, а також сили і моменти на початку кожного елемента, $\vec{M}_{u,i+1}^j$. По процедурі уточнення знаходимо нові базові моменти:

$$\vec{M}_{b,i+1}^j = \vec{M}_{b,i}^j + \delta(\vec{M}_{u,i+1}^j - \vec{M}_{b,i}^j) \quad (4.13a)$$

Де δ - це коефіцієнт уточнення (руху) детально описаний нами в п. 3.3.3 і складається з двох компонент-множників, один з яких обмежує абсолютні кінематичні прирости, а інших враховує стабілізацію (збіжність) поправок.

3.1. Знайдені Базові моменти по чергово прикладаються до кожного елемента. Спочатку вважається, що положення і матеріальні направляючі вектори першої точки першого елемента відомі. Тоді по формулі (4.4a) спочатку знаходяться проєкції глобального базового вектору $\vec{M}_{b,i+1}^j$ на локальні матеріальні вектори $\vec{t}; \vec{\xi}; \vec{\eta}$, а потім по всім іншим формулам (4.4) знаходяться спочатку кривизни і скрути, а потім і природні вектори $\vec{t}; \vec{n}; \vec{\beta}$. Далше по формулам МПП знаходяться: а) положення всіх проміжних точок включно з останньою по формулах (4.2); б) природні вектори в кінці ділянки по формулі (4.1). Відмітимо, що матеріальні вектори в кінці ділянки також визначаються з допомогою матриці (4.1), де в якості початкових беруться початкові значення матеріальних векторів.

3.2. Перехід до наступної ділянки відбувається за допомогою рівнянь спряження. Початок положення другої ділянки повністю співпадає з початком другої. Узгодження напрямків і орієнтації елемента відбувається для

матеріальних векторів, тобто вважається, що матеріальні вектори кінця попередньої і початку наступної ділянок співпадають. А далі знову застосовується процедура 3.1., і так аж до самого кінця балки.

4. Процес рішення продовжується, аж поки не буде виконуватися умова:

$$\vec{M}_{b,i+1}^j - \vec{M}_{b,i}^j \gg \vec{M}_{b,i}^j \quad (4.136)$$

для всіх елементів балки.

Нижче покажемо приклади застосування даного підходу для деяких дуже відомих в літературі тестів.

4.4 Приклади рішення

4.4.1 Задача Кірхгофа

Кірхгоф показав, що з початково прямого стержня можна отримати хелікс, приклавши певні колінеарні крутний момент \vec{M} і силу \vec{F} [155].

Формулюємо задачу: параметри хелікса – K, T ; кількість витків – $N \in \mathbb{R}$. Початковий стержень має довжину l і дотичну \vec{t}_0 .

Вводимо допоміжні значення:

$$a = \frac{K}{K^2 + T^2}; \quad h = \frac{T}{K^2 + T^2} \quad (4.14)$$

У випадку, коли $T = 0$ (хелікс вироджується до дуги кола в площині), достатньо обчислити «фазову довжину» $l_\phi := 2\pi N$. В загальному ж випадку деяка частина довжини l витрачається на рух в перпендикулярному до площини напрямку, тому вона виявляється більшою:

$$l = l_\phi \sqrt{a^2 + h^2} \geq l_\phi \quad (4.15)$$

Зауважимо, що для отримання «красивого» (з вертикальною віссю) хелікса початкова лінія (і, відповідно, базис) мають бути нахилені:

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) &= \frac{(a \quad 0 \quad h)^T}{\sqrt{a^2 + h^2}}; \quad \vec{\xi}(s) = (0 \quad 1 \quad 0)^T; \quad \vec{\eta}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{\xi}(s) \\ \vec{p}(s) &= \vec{t}(s) \cdot s - (0 \quad a \quad 0)^T \end{aligned} \quad (4.16)$$

Нехай також задані фізичні константи EI і GJ .

Тоді, відповідно до рішення Лава [155], потрібно прикласти наступні скрутний момент і центровану (в точці $\vec{F}_p = (0 \ 0 \ 0)^T$) силу:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \frac{EI \cdot K^2 + GJ \cdot T^2}{\sqrt{K^2 + T^2}} \cdot (0 \ 0 \ 1)^T \\ \vec{F} &= (GJ - EI)T\sqrt{K^2 + T^2} \cdot (0 \ 0 \ 1)^T\end{aligned}\quad (4.17)$$

Можна помітити, що для кожного елементу процедура прикладання дасть однаковий за виразом момент від сили:

$$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F} = a \|\vec{F}\| \cdot pr(\vec{t}, XOY) \quad (4.18)$$

Оскільки плече сили колінеарне вектору нормалі, який у «красивого» в сенсі (4.16) хелікса лежить в горизонтальній площині, момент від сили також лежатиме в цій площині.

В результаті маємо отримати шуканий хелікс:

$$\vec{p}(s) = (a \sin \phi \quad -a \cos \phi \quad \phi h)^T \quad (4.19)$$

$$\text{Проекція сумарного моменту на дотичну} \quad M_t = \frac{a \|\vec{M}_F\| + h \|\vec{M}_{ex}\|}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{a^2 \|\vec{F}\| + h \|\vec{M}\|}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

Можна пересвідчитись аналітично, що, будучи розділеним на GJ , це значення дійсно дає шукане T . Аналогічно співпадає і складова кривизни \vec{K} .

Для цього будується хелікс з параметрами $a = 2$; $h = 0.05$; $EI = 1$; $GJ = 0.8$; $N = 5$.

$$\text{Тоді } K = \frac{a}{a^2 + h^2} \approx 0.4996877 \text{ і } T = \frac{h}{a^2 + h^2} \approx 0.01249219.$$

Починаємо з прямої лінії довжиною $2\pi N \sqrt{a^2 + h^2} \approx 62.85148496$, що має початок в точці $\vec{p}_0 = (0; -a; 0)^T = (0; -2; 0)^T$, дотичну $\vec{t}_0 = \frac{(a \ 0 \ h)^T}{\sqrt{a^2 + h^2}} \approx (0.99968765 \ 0 \ 0.02499219)^T$ і нормаль $\vec{\xi}_0 = (0 \ 1 \ 0)^T$;

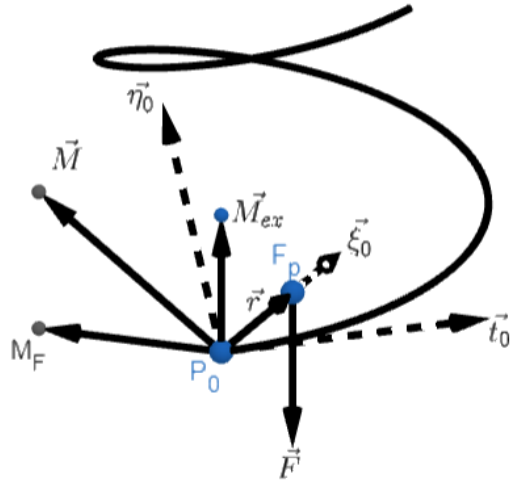
Відповідно, бінормаль

$$\vec{\eta}_0 = \vec{t}_0 \times \vec{\xi}_0 \approx (-0.02499219 \ 0 \ 0.99968765)^T.$$

Згідно з формулами (18), прикладаємо до елементів направлений вгору момент $\|\vec{M}\| = \left| \frac{EI \cdot K^2 + GJ \cdot T^2}{\sqrt{K^2 + T^2}} \right| \approx 0.49978138$, і направлену вниз силу $\|\vec{F}\| =$

$$|(GJ - EI)T\sqrt{K^2 + T^2}| \approx 0.00124883.$$

(Сила потрібна, щоб компенсувати нерівномірне скручування у випадках, коли $GJ \neq EI$.)



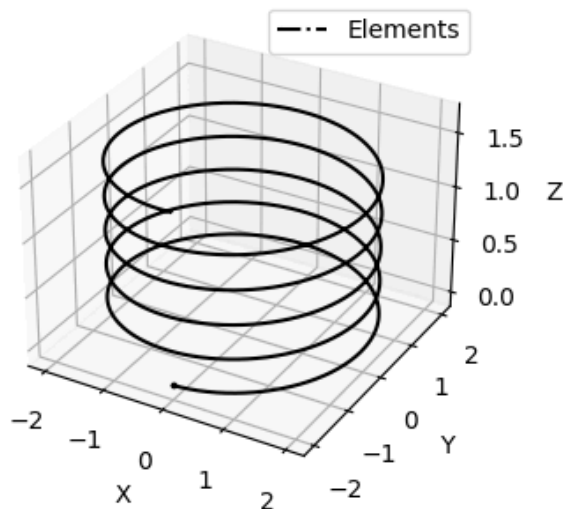
Мал. 4.3– компенсуюча сила та сумарний момент

Сумарний момент на початку балки

$$\vec{M} \approx (-0.00249766 \quad 0 \quad 0.49978138)^T.$$

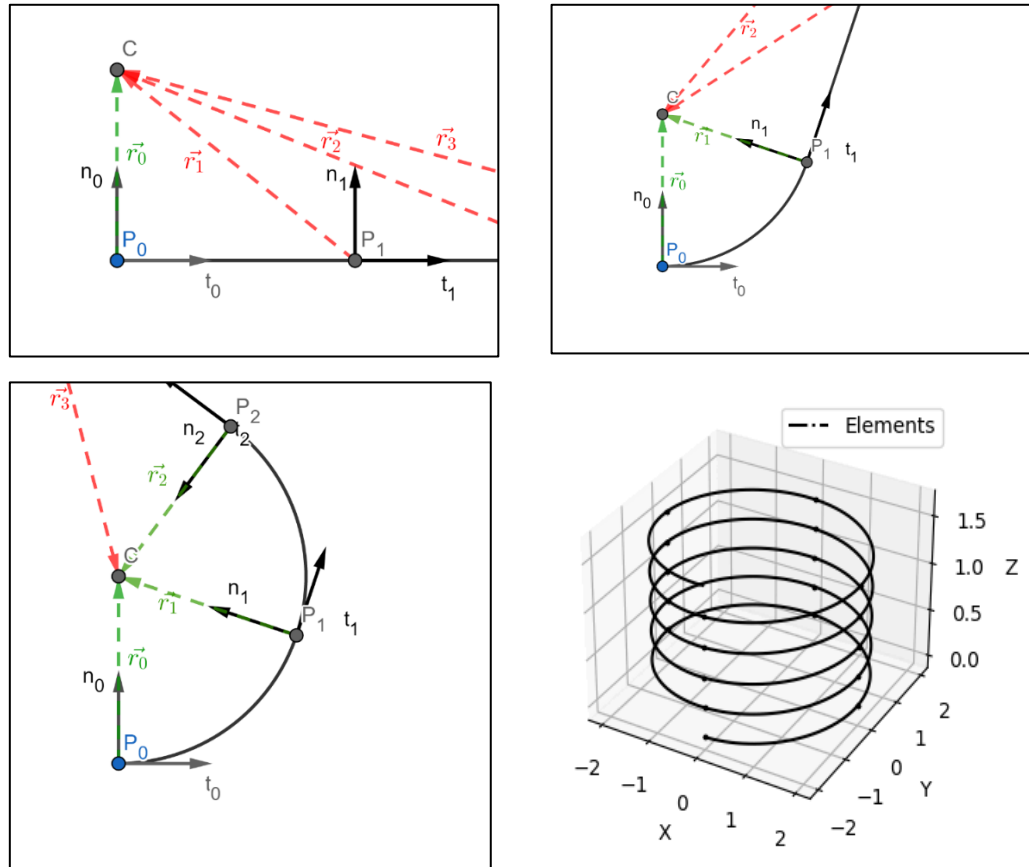
Можна перевірити, що він правильно проходить процедуру розкладання:

$$\frac{\vec{M} \cdot \vec{t}_0}{GJ} \approx 0.01249219 = T; \quad \vec{M} \cdot \vec{\xi}_0 = 0; \quad \frac{\vec{M} \cdot \vec{\eta}_0}{EI} \approx 0.4996877 = K$$



Мал. 4.4 – отримання хеліксу одним елементом

При розбитті на N елементів в загальному випадку розв'язок отримується не менш ніж за N ітерацій. Це пов'язано з різницею в плечах сили \vec{r} (лише у «готового» хелікса точка прикладання \vec{F}_p знаходиться на однаковій відстані від початків елементів):



Мал. 4.5– ітераційне уточнення плечей та розв'язок для 20 елементів

4.4.2 Задача Бате

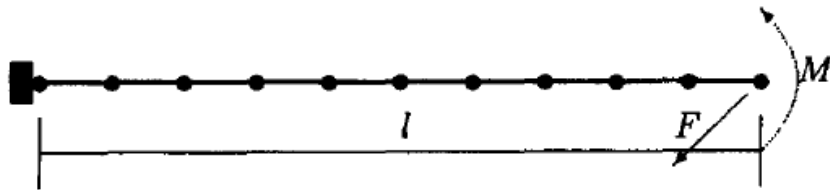
Розглядається початково крива балка, що лежить в площині і має форму дуги з центральним кутом $\pi/8$ кола радіуса $R = 100$. Задані $EI = GJ = 1$. До вільного кінця балки прикладається [17] перпендикулярна площині (направлена вгору) сила $F = \frac{\lambda EI}{R^2} = \lambda \cdot 10^{-4}$.

Таблиця 4.2. Задача Бате, координати вільного кінця при $\lambda=7.2$

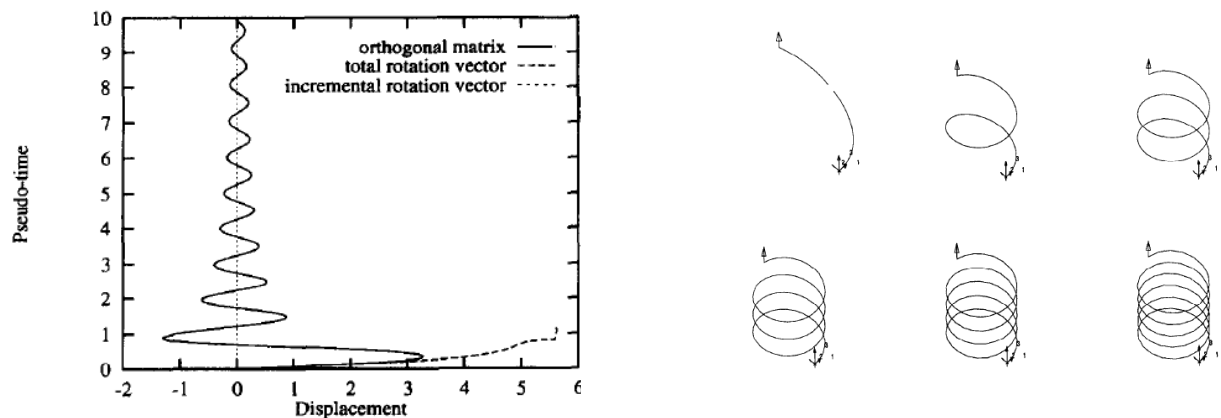
Варіант	X	Y	Z
10 елементів	15.045353	45.243628	54.713814
100 елементів	15.622659	46.95426	53.605801
1000 елементів	15.678852	47.131527	53.48245
Albino et al. [17]	15.6	47.1	53.6
Bathe et al. [194]	15.9	47.2	53.4

4.4.3 Задача Ібрагімбеговича

Розглядається початково пряма балка довжиною $l = 10$; $EI = GJ = 100$. До вільного кінця балки прикладаються направлені вертикально вгору крутний момент $M = 200\pi$ та сила $F = 50$ [195].



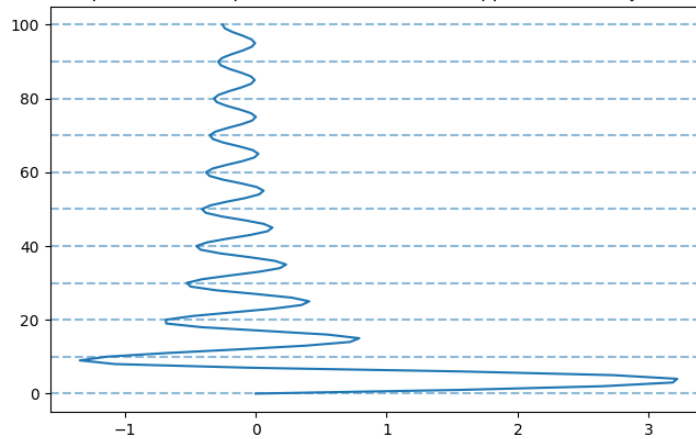
Мал. 4.8 – умова задачі Ібрагімбеговича



Мал. 4.9 – очікуване рішення задачі Ібрагімбеговича [195]

Особливістю даної задачі є поступове збільшення навантаження. Для цього вводиться параметр «псевдо-часу», що виступає в ролі нормованого (від 0 до 1) множника для \vec{F} і \vec{M} . Спостерігається осциляція вертикального переміщення останньої точки [194]:

Free-end displacement component in the direction of applied force (only for task steps)



Мал. 4.10 – фактичне рішення задачі Ібрагімбеговича

Чисельні результати наведені в Таблицях 4.3, 4.4 і 4.5:

Таблиця 4.3. Задача Ібрагімбеговича, переміщення кінця балки, 10 елементів

$\lambda, \%$	X	Y	Z
0	1.000000e+01	0.000000e+00	0.000000e+00
3.6	3.892370e+00	6.411033e+00	-3.598481e+00
9	-8.338968e-01	1.693583e-01	2.668158e-01
15	2.997172e-01	1.998785e+00	-2.401981e+00
25	1.906868e-01	1.154474e+00	-2.779751e+00
50	-5.032712e-02	4.282715e-02	-2.232799e+00
100	1.816463e-13	-4.007788e-14	-1.584764e-07

Таблиця 4.4. Задача Ібрагімбеговича, переміщення кінця балки, 100 елементів

$\lambda, \%$	X	Y	Z
0	1.000000e+01	0.000000e+00	0.000000e+00
3.6	3.872713e+00	6.544524e+00	-3.309474e+00
9	-5.800782e-01	9.038742e-02	1.201945e+00
15	1.021398e-01	2.114726e+00	-1.034295e+00
25	5.653336e-02	1.268488e+00	-8.151035e-01
50	-1.211718e-02	1.188323e-03	-3.646746e-01
100	-2.431667e-02	5.809512e-03	-1.074613e+00

Таблиця 4.5. Задача Ібрагімбеговича, переміщення кінця балки, 1000 елементів

λ , %	X	Y	Z
0	1.000000e+01	0.000000e+00	0.000000e+00
3.6	3.869653e+00	6.558041e+00	-3.278281e+00
9	-5.556378e-01	8.878571e-02	1.295173e+00
15	7.510166e-02	2.119229e+00	-8.700036e-01
25	2.888077e-02	1.272471e+00	-5.391933e-01
50	1.598553e-02	2.761412e-04	1.896195e-01
100	1.644169e-03	-1.731448e-05	1.689455e-03

Висновки за розділом 4

Дана робота продовжує дослідження по геометрично нелінійному, ГН, аналізу балок, а саме узагальнює методологію базового та згладжувального рішень на тривимірний випадок. Розглядаються задачі спрощеного рівня, які втім і аналізуються в основному в літературі, для яких, власне, можна отримати прийнятний результат і без згладжувального рішення. Статично визначені задачі відносяться до таких постановок. Отримані такі результати:

1. В рамках моделі кожен елемент МПП подається у вигляді ділянки хелікса (гвинтової лінії), в який «вмонтовані» відповідні значення згинального моменту та осової сили. Базове рішення є основою методу, адже в основному враховує ГН та створює систему координат і векторів, відповідно до яких в майбутньому буде розраховуватися поправочне (мале геометрично лінійне) рішення.

2. Оскільки отримання згладжувального рішення для тривимірного випадку є досить складною задачею, дана робота зосереджується на реалізації тільки базового. Досліджуються дві важливі особливості 3D задачі порівняно з 2D. По-перше, тут розділяються поняття матеріального векторного базису елемента як основного, по якому і забезпечується геометрична неперервність. По-друге, вектор кутової зміни (кривизни) не співпадає з головним вектором згинального моменту, а кут між ними залежить від геометричних та фізичних властивостей заданого поперечного січення. Власне відпрацювання цих

особливостей і є головним завданням базового рішення.

3. Порівняння з відомими задачами показують, що навіть одного базового методу достатньо для точного наближення рішення невеликою кількістю елементів, зазвичай на порядки нижче, ніж це вимагається в лінійних моделях. Спостерігаються певні проблеми при розв'язанні нестабільних задач, однак, цілком ймовірно, що це буде вирішено реалізацією згладжувального рішення, а також вдосконаленням алгоритму виявлення розбіжності.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Як основний науковий результат роботи вперше запропоновано метод базових розривних рішень, БР, та згладжувальних рішень, ЗР. Метод є новим варіантом відомого коротаційного підходу, де БР є криволінійною ділянкою (елемент кола чи хелікса) і в цілому враховує ГН деформацію від значних внутрішніх сил та моментів, проте є розривним і не неперервним. ЗР будується в локальних криволінійних координатах, є лінійним і незначним, згладжує БР і забезпечує неперервність всіх параметрів, і слугує для уточнення БР на наступній ітерації. Процедура уточнення є динамічною, і шляхом корекції коефіцієнта уточнення враховує збіжність чи розбіжність результатів на двох послідовних ітераціях. Іншими важливими результатами роботи є:

1. В додаток до відомого класичного рішення для ланцюгової лінії (catenary), що є основою всіх точних алгоритмів, для розрахунків канату отримано альтернативне точне (на ділянці) рішення, що представляє собою суму частинки кола та ЗР, що є рішенням диференційних рівнянь четвертого порядку; і яке, на відміну від ланцюгової лінії, дозволяє точно враховувати довільне видовження канату, тобто розглядати досить еластичні канати. Рішення отримано в вигляді зручному для застосування методу початкових параметрів, МПП (transfer matrix method).

2. Для попередньо розтягнутої (стисненої) ділянки кола під дією розподілених дотичних і нормальних навантажень вперше отримані точні аналітичні рішення диференційних рівнянь 6-го порядку в вигляді зручному для застосування МПП. Для забезпечення комп'ютерної збіжності формул для ділянок, що є майже прямими (кут дуги кола не перевищує 1°), вперше отримані розклади цих рішень в ряд Тейлора, і продемонстровано, що експоненціальні («розтягнуті») рішення співпадають з тригонометричними («стиснутими») рішеннями при характерному значенні осьової сили. В свою чергу при відсутності «вбитої» осьової сили лінійне рішення співпадає з тригонометричним. Це забезпечує неперервність загального рішення тіла в

цілому при довільній історії навантаження і зміні геометрії.

3. Вперше сформульовані критерії для яких комбінацій геометричних, фізичних і механічних параметрів задане довге тіло можна розглядати як канат чи як балку, та отримані деякі конкретні рішення. Вперше запропонована методика і умови комбінованого спряження канату та балки. Продемонстровані переваги такого підходу, коли внутрішня частина тіла моделюється як канат, а біля границь використовується модель балки.

4. Вперше запропоновано базове рішення для трьохвимірного елемента як ділянки хелікса, і всі геометричні параметри якого (базисні вектори, відносні положення точок) однозначно зв'язані з системою базисних глобальних моментів та характеристиками жорсткості січення. Показано, що для деяких видів закріплення просторової балки наявність такого БР навіть при відсутності ЗР може забезпечити достатню точність ГН деформування.

5. Запропонована ідея і показана техніка застосування ГН балок для задач геометричного моделювання (побудови сплайнів). На основі порівняльного аналізу з сплайнами Безьє та балковими коротацийними сплайнами, показано, що ГНБ є найефективнішою методикою як для знаходження кривих найкращої якості, так і для моделювання деформації реальних гнучких балок. Його недоліком для геометричної конструкції є те, що довжина балки повинна бути обрана заздалегідь, проте значення, отримане за допомогою рішення КБС, є хорошим початковим наближенням для подальшого застосування ГНБ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Orynyak I., Mazuryk R., Oryniak A. (2020). Basic (Discontinuous) and Smoothing-Up (Conjugated) Solutions in Transfer-Matrix Method for Static Geometrically Nonlinear Beam and Cable in Plane. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 146, Issue 5 [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001753](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001753)
2. Orynyak I., Mazuryk R. (2022). Application of method of discontinuous basic and enhanced smoothing solutions for 3D multibranch cable. *Engineering Structures* Volume 251, Part B, 15 January 2022, 113582 <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113582>
3. Orynyak I, Guarracino F., Mazuryk R., Modano M. (2022) An efficient iteration procedure for form finding of slack cables under concentrated forces. *Archives of Civil Engineering*, 2022, 68(2): 645-663 <https://doi.org/10.24425/ace.2022.140664>
4. Orynyak I., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points. *System research and information technologies*. 2022, N4. doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.10.
5. Orynyak I, Kulyk K, Mazuryk R. Analysis of geometrically nonlinear deformation of 3D beams by the method of basic helical elements. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2023. – 66, № 1-2. – С. 5–28.
6. Ігор Ориняк, Дмитро Кольцов, Роман Мазурик (2023). Порівняння плоских балкового коротацийного сплайну і геометрично нелінійної балки. Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023" , Львів. Збірник наукових праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2023. – 454 с. С. 393.
7. Ігор Ориняк, Роман Мазурик. Метод базових (розривних) та поправочних розв'язків для геометрично нелінійного аналізу балок та канатів. Там же. С. 85.
8. Ігор Ориняк, Костянтин Кулик, Роман Мазурик Аналіз геометрично нелінійного деформування 3D балок методом базових хеліксних ділянок. Там же. С. 79.
9. І.В. Ориняк, Р.В.Мазурик (2023). Моделювання плоских канатів з врахуванням їх жорсткості на вигин методом розривних базових та згладжувальних рішень. Матеріали Міжнародної наукової конференції "Актуальні проблеми механіки" до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка, 14-16 листопада. [Електронний ресурс] // Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України – 2023. – 469 с. С. 385.

10. Ориняк І.В., Мазурик Р.В (2023). Комбіноване застосування моделей геометрично нелінійної балки та канату для довгих розтягнутих конструкцій. Матеріали Всеукраїнської наукової конференції. “Сучасні проблеми прикладної математики та комп’ютерних наук”, 7 – 9 листопада 2023, Львів, АРАМС-2023 // Львівський національний університет імені Івана Франка – 250 с. С 169.
11. Pai, P. F. (2007). *Highly flexible structures: modeling, computation, and experimentation*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
12. Sabale, A., & Gopal, K. N. (2019). Nonlinear aeroelastic response of wind turbines using Simo-Vu-Quoc rods. *Applied Mathematical Modelling*, 65, 696-716.
13. P. Qi, X. Zhao, Y. Wang, R. Palacios and A. Wynn, Aeroelastic and trajectory control of High Altitude Long Endurance aircraft, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, vol. 54, no. 6, pp. 2992-3003, 2018.
14. Puig, L., Barton, A., & Rando, N. (2010). A review on large deployable structures for astrophysics missions. *Acta astronautica*, 67(1-2), 12-26.
15. Pottmann, H., Eigensatz, M., Vaxman, A., & Wallner, J. (2015). Architectural geometry. *Computers & graphics*, 47, 145-164.
16. D’Amico, B., Zhang, H., & Kermani, A. (2016). A finite-difference formulation of elastic rod for the design of actively bent structures. *Engineering Structures*, 117, 518-527
17. Albino, J. C. R., Almeida, C. A., Menezes, I. F. M., & Paulino, G. H. (2018). Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers manufactured with functionally graded materials (FGMs). *Engineering Structures*, 173, 283-299.
18. Moll, M., & Kavraki, L. E. (2006). Path planning for deformable linear objects. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(4), 625-636
19. Takano, R., Mochiyama, H., & Takesue, N. (2017, May). Real-time shape estimation of Kirchhoff elastic rod based on force/torque sensor. In *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)* (pp. 2508-2515). IEEE.
20. Lv, N., Liu, J., Xia, H., Ma, J., & Yang, X. (2020). A review of techniques for modeling flexible cables. *Computer-Aided Design*, 122, 102826
21. Audette, M. A., Bordas, S. P., & Blatt, J. E. (2020). Robotically steered needles: A survey of neurosurgical applications and technical innovations. *Robotic Surgery: Research and Reviews*, 1-23.
22. Li, P., Jiang, S., Liang, D., Yang, Z., Yu, Y., & Wang, W. (2017). Modeling of path planning and needle steering with path tracking in anatomical soft tissues for minimally invasive surgery. *Medical engineering & physics*, 41, 35-45.
23. Huang, W., He, D., Tong, D., Chen, Y., Huang, X., Qin, L., & Fei, Q. (2022). Static analysis of elastic cable structures under mechanical load using discrete catenary theory. *Fundamental Research*.

24. Botta, E. M., Sharf, I., & Misra, A. K. (2017). Contact dynamics modeling and simulation of tether nets for space-debris capture. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 40(1), 110-123.
25. Zhang, Y., Li, N., Yang, G., & Ru, W. (2017). Dynamic analysis of the deployment for mesh reflector deployable antennas with the cable-net structure. *Acta astronautica*, 131, 182-189.
26. Nealen, A., Müller, M., Keiser, R., Boxerman, E., & Carlson, M. (2006, December). Physically based deformable models in computer graphics. In *Computer graphics forum* (Vol. 25, No. 4, pp. 809-836). Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd.
27. Deul, C., Kugelstadt, T., Weiler, M., & Bender, J. (2018, September). Direct position-based solver for stiff rods. In *Computer Graphics Forum* (Vol. 37, No. 6, pp. 313-324).
28. Hafner, C., & Bickel, B. (2023). The design space of Kirchhoff rods. *ACM Transactions on Graphics*, 42(5), 1-20.
29. Hafner, C., & Bickel, B. (2021). The design space of plane elastic curves. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 40(4), 1-20.
30. Romero, V., Ly, M., Rasheed, A. H., Charrondière, R., Lazarus, A., Neukirch, S., & Bertails-Descoubes, F. (2021). Physical validation of simulators in Computer Graphics: A new framework dedicated to slender elastic structures and frictional contact. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 40(4), 1-19.
31. Irvine H. M., CABLE STRUCTURES, MIT Press, Cambridge, Mass., 1981. 259p
32. Truesdell, C. (1960). Outline of the history of flexible or elastic bodies to 1788. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 32(12), 1647-1656.
33. Routh, E.J. 1891 Analytical Statics. Vol.1. Cambridge University Press. Ch. 10.
34. Ramsey, A.S. 1946. Statics. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, ch. 12.
35. Ernst, H. (1965). Der E-modul von seilen unter bercksichtigung des durchhanges. *Bauingenieur*, 40.
36. Knudson, W. C. (1971). *Static and dynamic analysis of cable-net structures*. University of California, Berkeley.
37. Liew, J. R., Punniyakotty, N. M., & Shanmugam, N. E. (2001). Limit-state analysis and design of cable-tensioned structures. *International journal of space structures*, 16(2), 95-110.
38. Chen, Z. H., Wu, Y. J., Yin, Y., & Shan, C. (2010). Formulation and application of multi-node sliding cable element for the analysis of Suspen-Dome structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(9), 743-750.
39. Gambhir, M. L., & de V. Batchelor, B. (1977). A finite element for 3-D prestressed cablenets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(11), 1699-1718.
40. Ozdemir, H. (1979). A finite element approach for cable problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(5), 427-437.

41. De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J., & Verhoosel, C. V. (2012). *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons.
42. Andreu, A., Gil, L., & Roca, P. (2006). A new deformable catenary element for the analysis of cable net structures. *Computers & Structures*, 84(29-30), 1882-1890.
43. Chen, Z. H., Wu, Y. J., Yin, Y., & Shan, C. (2010). Formulation and application of multi-node sliding cable element for the analysis of Suspen-Dome structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(9), 743-750.
44. Jian-hua, W. U., & Wen-zhang, S. U. (2015). The non-linear finite element analysis of cable structures based on four-node isoparametric curved element. *Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering*, (6), 55-58.
45. Wang, Y., Zuo, S. R., & Wu, C. (2013). A finite element method with six-node isoparametric element for nonlinear analysis of cable structures. *Applied Mechanics and Materials*, 275, 1132-1135.
46. Thai, S., Kim, N. I., & Lee, J. (2017). Isogeometric cable elements based on B-spline curves. *Meccanica*, 52, 1219-1237.
47. Rezaiee-Pajand, M., Mokhtari, M., & Masoodi, A. R. (2018). A novel cable element for nonlinear thermo-elastic analysis. *Engineering Structures*, 167, 431-444.
48. O'Brien, W. T., & Francis, A. J. (1964). Cable movements under two-dimensional loads. *Journal of the Structural Division ASCE*, 90(3), 89-123.
49. Jayaraman, H. B., & Knudson, W. C. (1981). A curved element for the analysis of cable structures. *Computers & Structures*, 14(3-4), 325-333.
50. Greco, L., Impollonia, N., & Cuomo, M. (2014). A procedure for the static analysis of cable structures following elastic catenary theory. *International Journal of Solids and Structures*, 51(7-8), 1521-1533.
51. Thai, H. T., & Kim, S. E. (2011). Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures. *Finite elements in analysis and design*, 47(3), 237-246.
52. Rezaiee-Pajand, M., & Mohammadi-Khatami, M. (2021). Nonlinear analysis of cable structures using the dynamic relaxation method. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 15, 253-274.
53. Crusells-Girona, M., Filippou, F. C., & Taylor, R. L. (2017). A mixed formulation for nonlinear analysis of cable structures. *Computers & Structures*, 186, 50-61.
54. Shehata, A., & El Damatty, A. (2021). Extensible catenary approach in analyzing transmission line's conductors under downbursts. *Engineering Structures*, 234, 111905.
55. Milewski, S., Cecot, W., & Orkisz, J. (2021). On-line monitoring aided evaluation of power line cable shapes. *Engineering Structures*, 235, 111902.
56. Song, C., Xiao, R., & Sun, B. (2020). Improved method for shape finding of long-span suspension bridges. *International Journal of Steel Structures*, 20, 247-258.

57. Irvine, H. M., & Sinclair, G. B. (1976). The suspended elastic cable under the action of concentrated vertical loads. *International Journal of Solids and Structures*, 12(4), 309-317
58. Papini, D. (2010). On shape control of cables under vertical static loads. *M.S. thesis, Lund University, Lund*.
59. Argyris, J. H., Angelopoulos, T., & Bichat, B. (1974). A general method for the shape finding of lightweight tension structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1), 135-149.
60. Ahmadizadeh, M. (2013). Three-dimensional geometrically nonlinear analysis of slack cable structures. *Computers & Structures*, 128, 160-169.
61. Zhou, Y., & Chen, S. (2019). Iterative nonlinear cable shape and force finding technique of suspension bridges using elastic catenary configuration. *Journal of Engineering Mechanics*, 145(5), 04019031.
62. Alberg, J. H., Nilson, E. N., & Walsh, J. L. (1967). The theory of splines and their applications. *New York: Academic*.
63. Farin, G. (2002). History of Curves and Surfaces in CAGD. Handbook of CAGD, G. Farin, MS Kim, J. Hoschek.
64. Holladay, J. C. (1957). A smoothest curve approximation. *Mathematical tables and other aids to computation*, 11(60), 233-243.
65. Bartels, R. H., Beatty, J. C., & Barsky, B. A. (1995). *An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling*. Morgan Kaufmann.
66. Schweikert, D. G. (1966). An interpolation curve using a spline in tension. *J. Math. Phys*, 45(3), 312-317.
67. Timoshenko, S. P. (1956). *Strength of Materials: Part II Advanced Theory and Problems*. D. Van Nostrand.
68. Mehlum, E. (1964). A curve-fitting method based on a variational criterion. *BIT Numerical Mathematics*, 4, 213-223.
69. Wagner, P. H., Luo, X., & Stelson, K. A. (1995). Smoothing curvature and torsion with spring splines. *Computer-aided design*, 27(8), 615-626.
70. Asker, B. (1962). The spline curve, a smooth interpolating function used in numerical design of ship-lines. *BIT Numerical Mathematics*, 2, 76-82.
71. Moreton, H. P. (1992). *Minimum curvature variation curves, networks, and surfaces for fair free-form shape design*. (Doctoral dissertation) University of California, Berkeley.
72. Salkauskas, K. (1984). C^1 splines for interpolation of rapidly varying data. *The Rocky Mountain journal of mathematics*, 14(1), 239-250.
73. Birkhoff, G., Burchard, H., & Thomas, D. (1965). *Nonlinear interpolation by splines, pseudosplines and elastica*. Research Laboratories, General Motors Corporation.
74. Rogers, D. F. (2001). *An introduction to NURBS: with historical perspective*. Morgan Kaufmann.
75. Ferguson, J. (1964). Multivariable curve interpolation. *Journal of the ACM (JACM)*, 11(2), 221-228.

76. Epstein, M. P. (1976). On the influence of parametrization in parametric interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2), 261-268.
77. Kjellander, J. A. (1983). Smoothing of cubic parametric splines. *Computer-Aided Design*, 15(3), 175-179.
78. Ravankar, A., Ravankar, A. A., Kobayashi, Y., Hoshino, Y., & Peng, C. C. (2018). Path smoothing techniques in robot navigation: State-of-the-art, current and future challenges. *Sensors*, 18(9), 3170.
79. Binninger, A., & Sorkine-Hornung, O. (2022, August). Smooth Interpolating Curves with Local Control and Monotone Alternating Curvature. In *Computer Graphics Forum* (Vol. 41, No. 5, pp. 25-38).
80. Levien, R., & Séquin, C. H. (2009). Interpolating splines: Which is the fairest of them all?. *Computer-Aided Design and Applications*, 6(1), 91-102.
81. Brunnett, G., & Kiefer, J. (1994). Interpolation with minimal-energy splines. *Computer-Aided Design*, 26(2), 137-144.
82. Veltkamp, R. C., & Wesselink, W. (1995, August). Modeling 3D curves of minimal energy. In *Computer Graphics Forum* (Vol. 14, No. 3, pp. 97-110). Edinburgh, UK: Blackwell Science Ltd.
83. Fang, L., & Gossard, D. C. (1995). Multidimensional curve fitting to unorganized data points by nonlinear minimization. *Computer-Aided Design*, 27(1), 48-58.
84. Birkhoff, G., & De Boor, C. R. (1965). Piecewise polynomial interpolation and approximation. *Approximation of functions*, 164-190.
85. Farin, G., Rein, G., Sapidis, N., & Worsey, A. J. (1987). Fairing cubic B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 4(1-2), 91-103.
86. Bruckstein, A. M., Holt, R. J., & Netravali, A. N. (2001). Discrete elastica. *Applicable Analysis*, 78(3-4), 453-485.
87. Xu, G., Wang, G., & Chen, W. (2011). Geometric construction of energy-minimizing Bézier curves. *Science China Information Sciences*, 54, 1395-1406.
88. Brander, D., Bærentzen, J. A., Fisker, A. S., & Gravesen, J. (2018). Bézier curves that are close to elastica. *Computer-Aided Design*, 104, 36-44.
89. Zhang, C., Zhang, P., & Cheng, F. F. (2001). Fairing spline curves and surfaces by minimizing energy. *Computer-Aided Design*, 33(13), 913-923.
90. Parkinson, D. B., & Moreton, D. N. (1991). Optimal biarc-curve fitting. *Computer-Aided Design*, 23(6), 411-419.
91. Xu, G., Zhu, Y., Deng, L., Wang, G., Li, B., & Hui, K. C. (2019). Efficient construction of B-spline curves with minimal internal energy. *Computers, Materials & Continua*, 58(3), 879-892.
92. Li, J. (2020). Combined internal energy minimizing planar cubic Hermite curve. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, 14(7), JAMDSM0103.
93. Levien, R. (2008). The elastica: a mathematical history. *Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley*, 70.

94. Birkhoff, G., & De Boor, C. R. (1965). Piecewise polynomial interpolation and approximation. *Approximation of functions*, 164-190.
95. Lee, E. H., & Forsythe, G. E. (1973). Variational study of nonlinear spline curves. *SIAM review*, 15(1), 120-133.
96. BRUNETT, Guido H. Properties of minimal-energy splines. In: *Curve and surface design*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. p. 3-22.
97. Glass, J. M. (1966). Smooth-curve interpolation: A generalized spline-fit procedure. *BIT Numerical Mathematics*, 6(4), 277-293.
98. Malcolm, M. A. (1977). On the computation of nonlinear spline functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14(2), 254-282.
99. Even Mehlum. "Curve and Surface Fitting Based on Variational Criteria for Smoothness." Central Institute for Industrial Research, Oslo, Norway, 1969.
100. Cohen, E., Lyche, T., & Riesenfeld, R. F. (2010). MCAD: Key historical developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 199(5-8), 224-228.
101. Horn, B. K. (1983). The curve of least energy. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 9(4), 441-460.
102. Kallay, M. (1986). Plane curves of minimal energy. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 12(3), 219-222.
103. Kallay, M. (1987). Method to approximate the space curve of least energy and prescribed length. *Computer-Aided Design*, 19(2), 73-76.
104. Brander, D., Gravesen, J. & Nørbjerg, T.B. Approximation by planar elastic curves. *Adv Comput Math* **43**, 25–43 (2017).
105. Argyris, J. H., Balmer, H., Doltsinis, J. S., Dunne, P. C., Haase, M., Kleiber, M., ... & Scharpf, D. W. (1979). Finite element method—the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17, 1-106.
106. M.A. Crisfield, A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 81 (1990) 131–150.
107. Fowler, A. H., and Wilson, C. W., "Cubic Spline, a Curve Fitting Routine," Report No. Y-1400, Contract No. W-7405-ENG-26, Nuclear Division, Union Carbide Corp., Oak Ridge, Tenn., 1962, p 1-41.
108. Birchler, W. D., & Schilling, S. A. (2001). *Comparisons of Wilson-Fowler and Parametric Cubic Splines with the Curve-Fitting Algorithms of Several Computer-Aided Design Systems* (No. LA-13784). Los Alamos National Lab.(LANL), Los Alamos, NM (United States).
109. Borum, A., & Bretl, T. (2015, May). The free configuration space of a kirchhoff elastic rod is path-connected. In *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)* (pp. 2958-2964). IEEE.
110. David Brander, J. Andreas Bærentzen, Kenn Clausen, et al. „Designing for hot-blade cutting: Geometric Approaches for High-Speed Manufacturing of Doubly Curved Architectural Surfaces“. In: *Advances in Architectural Geometry 2016*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 2016, pp. 306–327.

111. Wang, T. M., Lee, S. L., & Zienkiewicz, O. C. (1961). A numerical analysis of large deflections of beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 3(3), 219-228.
112. Kuznetsov, V. V., & Levyakov, S. V. (2002). Complete solution of the stability problem for elastica of Euler's column. *International journal of non-linear mechanics*, 37(6), 1003-1009.
113. Phungpaingam, B., & Chucheepsakul, S. (2005). Post-buckling of an elastic column with various rotational end restraints. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 5(01), 113-123.
114. Vaz, M. A., & Silva, D. F. C. (2003). Post-buckling analysis of slender elastic rods subjected to terminal forces. *International journal of non-linear mechanics*, 38(4), 483-492.
115. Phungpaingam, B., & Chucheepsakul, S. (2007). Postbuckling of elastic beam subjected to a concentrated moment within the span length of beam. *Acta Mechanica Sinica*, 23, 287-296.
116. Pulngern, T., Sudsanguan, T., Athisakul, C., & Chucheepsakul, S. (2013). Elastica of a variable-arc-length circular curved beam subjected to an end follower force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 49, 129-136.
117. Xianheng, W., Mu, W., & Xinming, Q. (2023). Sign problems in elliptic integral solution of planar elastica theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 100, 105032.
118. Kuguchi, F. (1975). On the validity of the finite element analysis of circular arches represented by an assemblage of beam elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 5(3), 253-276.
119. Kikuchi, F., & Tanizawa, K. (1984). Accuracy and locking-free property of the beam element approximation for arch problems. *Computers & Structures*, 19(1-2), 103-110.
120. Wang, T. M., & Merrill, T. F. (1988). Stiffness coefficients of noncircular curved beams. *Journal of Structural Engineering*, 114(7), 1689-1699.
121. Lin, K. C., & Hsieh, C. M. (2007). The closed form general solutions of 2-D curved laminated beams of variable curvatures. *Composite Structures*, 79(4), 606-618.
122. Marquis, J. P., & Wang, T. M. (1989). Stiffness matrix of parabolic beam element. *Computers & structures*, 31(6), 863-870.
123. Tufekci, E., & Arpacı, A. (2006). Analytical solutions of in-plane static problems for non-uniform curved beams including axial and shear deformations. *Structural Engineering and Mechanics*, 22(2), 131-150.
124. Tufekci, E., Eroglu, U., & Aya, S. A. (2017). A new two-noded curved beam finite element formulation based on exact solution. *Engineering with Computers*, 33, 261-273.
125. Orynyak, I. V., Yakovleva, E. S., & Rozgonyuk, V. V. (2007). Application of the Cheng-Finnie method to the calculation of stress intensity factors in thin-walled pipes with long axial cracks with allowance for geometric nonlinearity. *Strength of materials*, 39, 455-465.

126. Orynyak, I. V., Lokhman, I. V., & Bohdan, A. V. (2012, July). The Improved Measurements and Stress Analysis of Cylinder/Pipe With Out-of-Roundness. In *Pressure Vessels and Piping Conference* (Vol. 55027, pp. 539-546). American Society of Mechanical Engineers.
127. Oryniak, A., & Orynyak, I. (2017). The accounting for geometrical nonlinearity for thin-walled pressurized elastic pipe with long axial surface crack. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 139(2), 021210.
128. Babu, C. R., & Prathap, G. (1986). A linear thick curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(7), 1313-1328.
129. Balasubramanian, T. S., & Prathap, G. (1989). A field consistent higher-order curved beam element for static and dynamic analysis of stepped arches. *Computers & structures*, 33(1), 281-288.
130. Molari, L., & Ubertini, F. (2006). A flexibility-based finite element for linear analysis of arbitrarily curved arches. *International journal for numerical methods in engineering*, 65(8), 1333-1353.
131. Saffari, H., Fadaee, M. J., & Tabatabaei, R. (2008). A new formulation based upon trigonometric function for finite circular arch elements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 222(8), 1371-1380.
132. Zhang, B., He, Y., Liu, D., Gan, Z., & Shen, L. (2014). Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory. *Finite elements in analysis and design*, 79, 22-39.
133. Attarnejad, R. (2010). Basic displacement functions in analysis of nonprismatic beams. *Engineering Computations*, 27(6), 733-745.
134. Ishaquddin, M., Raveendranath, P., & Reddy, J. N. (2012). Flexure and torsion locking phenomena in out-of-plane deformation of Timoshenko curved beam element. *Finite elements in analysis and design*, 51, 22-30.
135. Baier-Saip, J. A., Baier, P. A., De Faria, A. R., Oliveira, J. C., & Baier, H. (2020). Shear locking in one-dimensional finite element methods. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 79, 103871.
136. Wong, F.T., Sulistio, A., Syamsoeyadi, H., 2018. Kriging-based timoshenko beam elements with the discrete shear gap technique. *Int. J. Comput. Methods* 15, 1850064:1–1850064:27.
137. Prathap, G., 1993. The finite element method in structural mechanics. Springer Science & Business Media.
138. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z., 2013b. The finite element method: its basis and fundamentals, 7th Elsevier.
139. Gerstmayr, J., Sugiyama, H., & Mikkola, A. (2013). Review on the absolute nodal coordinate formulation for large deformation analysis of multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 8(3), 031016.
140. Meier, C., Popp, A., & Wall, W. A. (2015). A locking-free finite element formulation and reduced models for geometrically exact Kirchhoff rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 290, 314-341.

141. Greco, L., Cuomo, M., Contrafatto, L., & Gazzo, S. (2017). An efficient blended mixed B-spline formulation for removing membrane locking in plane curved Kirchhoff rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 324, 476-511
142. Vo, D., Duong, N. H., Rungamornrat, J., & Nanakorn, P. (2022). A 2D field-consistent beam element for large displacement analysis using a rational Bézier representation with varying weights. *Applied Mathematical Modelling*, 104, 806-825.
143. O'Brien, P. J., & McNamara, J. F. (1989). Significant characteristics of three-dimensional flexible riser analysis. *Engineering structures*, 11(4), 223-233.
144. Dan, D., Xu, B., Huang, H., & Yan, X. F. (2016). Research on the characteristics of transverse dynamic stiffness of an inclined shallow cable. *Journal of Vibration and Control*, 22(3), 812-825.
145. Zhang, W. M., Lu, X. F., Wang, Z. W., & Liu, Z. (2021). Effect of the main cable bending stiffness on flexural and torsional vibrations of suspension bridges: Analytical approach. *Engineering Structures*, 240, 112393.
146. Liu, Z., Guo, T., Huang, L., & Pan, Z. (2017). Fatigue life evaluation on short suspenders of long-span suspension bridge with central clamps. *Journal of Bridge Engineering*, 22(10), 04017074.
147. PTI (Ed.), 2007, Recommendations for Stay Cables Design, Testing and Installation. PTI .
148. Costello, G. A., & Butson, G. J. (1982). Simplified bending theory for wire rope. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 108(2), 219-227.
149. Denoël, V., & Canor, T. (2013). Patching asymptotics solution of a cable with a small bending stiffness. *Journal of Structural Engineering*, 139(2), 180-187.
150. Arena, A., Pacitti, A., & Lacarbonara, W. (2016). Nonlinear response of elastic cables with flexural-torsional stiffness. *International journal of solids and structures*, 87, 267-277.
151. Huang, W., He, D., Tong, D., Chen, Y., Huang, X., Qin, L., & Fei, Q. (2022). Static analysis of elastic cable structures under mechanical load using discrete catenary theory. *Fundamental Research*.
152. Petrov, E., & G radin, M. (1998). Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids Part 1: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 165(1-4), 43-92.
153. Meier, C., Popp, A., & Wall, W. A. (2019). Geometrically exact finite element formulations for slender beams: Kirchhoff–Love theory versus Simo–Reissner theory. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 26(1), 163-243.
154. Orynyak, I. V., & Radchenko, S. A. (2004). A mixed-approach analysis of deformations in pipe bends. Part 3. Calculation of bend axis displacements by the method of initial parameters. *Strength of materials*, 36, 463-472.
155. Love, A. E. H. (1927). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. CAMBRIDGE, University Press.

156. Shield, R. T., & Im, S. (1986). Small strain deformations of elastic beams and rods including large deflections. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 37, 491-513.
157. O'Reilly, O. M. (2017). *Modeling nonlinear problems in the mechanics of strings and rods* (pp. 187-268). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
158. Lee, H. P. (1969). Generalized stiffness matrix of a curved-beam element. *AIAA Journal*, 7(10), 2043-2045.
159. Palaninathan, R., & Chandrasekharan, P. S. (1985). Curved beam element stiffness matrix formulation. *Computers & structures*, 21(4), 663-669.
160. Tabarrok, B., Farshad, M., & Yi, H. (1988). Finite element formulation of spatially curved and twisted rods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 70(3), 275-299.
161. Haktanir, V. E. B. İ. L., & Kiral, E. (1993). Statical analysis of elastically and continuously supported helicoidal structures by the transfer and stiffness matrix methods. *Computers & structures*, 49(4), 663-677.
162. Busool, W., & Eisenberger, M. (2001). Exact static analysis of helicoidal structures of arbitrary shape and variable cross section. *Journal of Structural Engineering*, 127(11), 1266-1275.
163. Provasi, R., & Martins, C. D. A. (2014). A three-dimensional curved beam element for helical components modeling. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 136(4), 041601.
164. Gimena, L., Gimena, F. N., & Gonzaga, P. (2008). Structural analysis of a curved beam element defined in global coordinates. *Engineering Structures*, 30(11), 3355-3364.
165. Gimena, F. N., Gonzaga, P., & Gimena, L. (2008). Stiffness and transfer matrices of a non-naturally curved 3D-beam element. *Engineering Structures*, 30(6), 1770-1781.
166. Xu, Y., Johnston, D. N., Jiao, Z., & Plummer, A. R. (2014). Frequency modelling and solution of fluid–structure interaction in complex pipelines. *Journal of sound and vibration*, 333(10), 2800-2822.
167. Крылов, А. Н. (1931). О расчете балок, лежащих на упругом основании, Ленинград, Изд. АН СССР. 154с.
168. F. Leckie, E. Pestel. Transfer-matrix fundamentals. *International Journal of Mechanical Sciences, Volume 2, Issue 3, 1960, Pages 137-167*
169. Ориняк І. В. Розрахунки складних систем методом початкових параметрів. // Навчально-методичні матеріали (ПМА), HTYU «КПІ ім. Ігоря Сікорського». – 2022. – <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48744>.
170. M.H. Chaudhry, Resonance in pressurized piping systems, Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of British Columbia, Canada, 1970
171. Zhong, H., Liu, Z., Qin, H., & Liu, Y. (2018). Static analysis of thin-walled space frame structures with arbitrary closed cross-sections using transfer matrix method. *Thin-Walled Structures*, 123, 255-269.

172. Crisfield MA. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2: Advanced Topics. Wiley: Chichester, 1997.
173. Гуляев, В. И., Гайдайчук, В. В., & Кошкин, В. Л. (1992). Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. *К.: Наукова думка*, 344.
174. Karkon, M., & Rezaiee-Pajand, M. (2016). Geometrical nonlinear analysis of plane problems by corotational formulation. *Journal of Engineering Mechanics*, 142(10), 04016073.
175. Harsch, J., Sailer, S., & Eugster, S. R. (2023). A total Lagrangian, objective and intrinsically locking-free Petrov–Galerkin SE (3) Cosserat rod finite element formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
176. Gerstmayr, J., & Irschik, H. (2008). On the correct representation of bending and axial deformation in the absolute nodal coordinate formulation with an elastic line approach. *Journal of Sound and Vibration*, 318(3), 461-487.
177. Vo, D., Nanakorn, P., Bui, T. Q., & Rungamornrat, J. (2022). On invariance of spatial isogeometric Timoshenko–Ehrenfest beam formulations for static analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 394, 114883.
178. Pai, P. F., Anderson, T. J., & Wheeler, E. A. (2000). Large-deformation tests and total-Lagrangian finite-element analyses of flexible beams. *International Journal of Solids and Structures*, 37(21), 2951-2980.
179. Felippa, C. A., & Haugen, B. (2005). A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(21-24), 2285-2335.
180. Crisfield, M. A. (1990). A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 81(2), 131-150.
181. Rosen, A., & Gur, O. (2009). A transfer matrix model of large deformations of curved rods. *Computers & structures*, 87(7-8), 467-484.
182. Desai Y.M., Popplewell N., Shah A.H., Buragohain D.N. (1988) Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures. *Computers and Structures*, V29 (6): 1001–1009. DOI: 10.1016/0045-7949(88)90326-4
183. Michalos J., Birnstiel C. (1960) Movement of a cable due to changes in loading. *J. Struct. Div. ASCE* 86 ST12, 23-38 (1960). DOI: 10.1061/TACEAT.0008533
184. Girona M.C. A mixed 3d cable element for the nonlinear static and dynamic analysis of cable structures. A dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. University of California, Berkeley, Fall 2017
185. Kim, NI., Thai, S. & Lee, J. (2016) Nonlinear elasto-plastic analysis of slack and taut cable structures. *Engineering with Computers* 32, 615–627. DOI: 10.1007/s00366-016-0440-7

186. Babilio E. and Lenci S. (2017). "On the notion of curvature and its mechanical meaning in a geometrically exact plane beam theory." *Intern J Mech Sciences*, 128–129, 277-293.
187. Orynyak I.V., Bogdan A.V. and Radchenko S.A. (2009). "Geometrically nonlinear numerical procedure for Saint-Venant's problem for a symmetrical elastic shell with a closed contour and circular axis". *Thin-Walled Structures*, 47(8-9), 858-867.
188. ABAQUS version 6.14 User's manual. RI: Hibbitt, Karlsson & Sorencen Inc.2014.
189. Yazdchi M. and Crisfield M.A. (2002). "Nonlinear dynamic behaviour of flexible marine pipes and risers." *Int J Numer Meth Eng* ,54(9), p 1265–1308 .
190. Rumbod Ghadimi, A simple and efficient algorithm for the static and dynamic analysis of flexible marine risers, *Computers & Structures*, Volume 29, Issue 4, 1988, Pages 541-555, [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90364-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90364-1).
191. Miura, K. T., & RU, G. (2014). Aesthetic curves and surfaces in computer aided geometric design. *International Journal of Automation Technology*, 8(3), 304-316. <https://doi.org/10.20965/ijat.2014.p0304>
192. Marino Enzo. Isogeometric collocation for three-dimensional geometrically exact shear-deformable beams. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2016. – 307. – P. 383–410. – <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.04.016>.
193. Connaire A., O'Brien P., Harte A., O'Connor A. Advancements in subsea riser analysis using quasi-rotations and the Newton–Raphson method. // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2015. – 70. – P. 47–62. - <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.10.021>.
194. Bathe K, Bolourchi S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *Int J Numer Meth Eng* 1979;14(7):961–86. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620140703>.
195. Ibrahimbegovic A. On the choice of finite rotation parameters. Containing papers presented at the Symposium on Advances in Computational Mechanics. 1997. Vol. 149, no. 1. P. 49–71. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00059-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00059-5).

ДОДАТКИ

Додаток А. Лінійний розв'язок згладжувального рішення для плоских балок

Лінійні розв'язки рівнянь (3.5 а-е) описаних в Розділі 3.2. Введемо заміну: $f = \frac{1}{EF} \frac{s_0}{s_b}$

- Переміщення балки в повздовжньому напрямку u і поперечному напрямку w .

$$\begin{aligned}
 u(s) = & \cos \phi u_0 + \sin \phi w_0 + R(1 - \cos \phi)\theta_0 + \left(\frac{R^3}{E'J} \left(1 - \frac{\phi \sin \phi}{2} - \cos \phi \right) - \right. \\
 & \left. fR \left(\frac{\phi \sin \phi}{2} \right) \right) Q_0 + \left(-\frac{R^3}{E'J} \left(\phi + \frac{\phi \cos \phi}{2} - \frac{3}{2} \sin \phi \right) - fR \left(\frac{\phi \cos \phi}{2} + \frac{\sin \phi}{2} \right) \right) N_0 + \\
 & \frac{R^2}{E'J} (\phi - \sin \phi) M_0 + \hat{P}_n \left(\frac{R^4}{E'J} \left(\phi + \frac{\phi \cos \phi}{2} - \frac{3}{2} \sin \phi \right) + fR^2 \left(\frac{\phi \cos \phi}{2} - \frac{\sin \phi}{2} \right) \right) + \\
 & P_t \left(\frac{R^4}{E'J} \left(2 - 2 \cos \phi - \frac{\phi \sin \phi}{2} - \frac{\phi^2}{2} \right) - fR^2 \left(\frac{\phi \sin \phi}{2} \right) \right) \quad (5.1a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(s) = & -\sin \phi u_0 + \cos \phi w_0 + R \sin \phi \theta_0 + \left(\frac{R^3}{E'J} \left(\frac{\sin \phi}{2} - \frac{\phi \cos \phi}{2} \right) - \right. \\
 & \left. fR \left(\frac{\phi \cos \phi}{2} - \frac{\sin \phi}{2} \right) \right) Q_0 + \left(-\frac{R^3}{E'J} \left(1 - \cos \phi - \frac{\phi \sin \phi}{2} \right) + fR \frac{\phi \sin \phi}{2} \right) N_0 + \frac{R^2}{E'J} (1 - \\
 & \cos \phi) M_0 + \hat{P}_n \left(\frac{R^4}{E'J} \left(1 - \cos \phi - \frac{\phi \sin \phi}{2} \right) + fR^2 (1 - \cos \phi - \frac{\phi \sin \phi}{2}) \right) + \\
 & P_t \left(\frac{R^4}{E'J} \left(\frac{3 \sin \phi}{2} - \frac{\phi \cos \phi}{2} - \phi \right) - fR^2 \left(\frac{\phi \cos \phi}{2} - \frac{\sin \phi}{2} \right) \right) \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

- Кут повороту θ .

$$\begin{aligned}
 \theta(s) = & \theta_0 + \frac{R^2}{E'J} (1 - \cos \phi) Q_0 + \left(\frac{R^2}{E'J} (\sin \phi - \phi) \right) N_0 + \frac{R}{E'J} \phi M_0 + \hat{P}_n \frac{R^3}{E'J} (\phi - \\
 & \sin \phi) + P_t \frac{R^3}{E'J} \left(1 - \cos \phi - \frac{\phi^2}{2} \right) \quad (5.1b)
 \end{aligned}$$

- Поперечна сила Q та повздовжня сила N

$$Q(s) = \cos \phi Q_0 + (-\sin \phi) N_0 + 0 M_0 + \hat{P}_n R \sin \phi + P_t R (\cos \phi - 1) \quad (5.1\Gamma)$$

$$N(s) = \sin \phi Q_0 + \cos \phi N_0 + 0M_0 + \hat{P}_n R(1 - \cos \phi) + P_t R \sin \phi \quad (5.1д)$$

- Згинальний момент M

$$M(s) = R \sin \phi Q_0 + R(\cos \phi - 1)N_0 + M_0 + \hat{P}_n(R^2(1 - \cos \phi)) + P_t R^2(\sin \phi - \phi) \quad (5.1е)$$

Розклад цих рівнянь в ряд Тейлора що використовуються для малих кутів $\phi < 0.002$, враховуючи заміну $R\phi = s$

- Переміщення балки в повздовжньому напрямку u і поперечному напрямку w .

$$u(s) = \cos \phi u_0 + \sin \phi w_0 + s \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\phi^3}{4!} + \frac{\phi^5}{6!} \right) \theta_0 + \left(\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi}{4!} - \frac{2\phi^3}{6!} \right) - fs \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\phi^3}{2 \cdot 3!} + \frac{\phi^5}{2 \cdot 5!} \right) \right) Q_0 + \left(-\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi^2}{5!} \right) - fs \left(1 - \frac{2\phi^2}{3} + \frac{3\phi^4}{5!} \right) \right) N_0 + \frac{s^2}{E'J} \left(\frac{\phi}{3!} - \frac{\phi^3}{5!} \right) M_0 + \hat{P}_n \left(\frac{s^4}{E'J} \left(\frac{\phi}{5!} \right) + fs^2 \left(-\frac{\phi}{3!} + \frac{2\phi^3}{5!} \right) \right) + P_t \left(-\frac{s^4}{E'J} \left(\frac{\phi^2}{6!} \right) - fs^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi^2}{2 \cdot 3!} + \frac{\phi^4}{2 \cdot 5!} \right) \right) \quad (5.2а)$$

$$w(s) = -\sin \phi u_0 + \cos \phi w_0 + R \sin \phi \theta_0 + \left(\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{1}{3!} - \frac{2\phi^2}{5!} \right) + fs \left(\frac{\phi^2}{3!} - \frac{2\phi^4}{5!} \right) \right) Q_0 + \left(-\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi}{4!} - \frac{2\phi^3}{6!} \right) + fs \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\phi^3}{2 \cdot 3!} + \frac{\phi^5}{2 \cdot 5!} \right) \right) N_0 + \frac{s^2}{E'J} \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi^2}{4!} + \frac{\phi^4}{6!} \right) M_0 + \hat{P}_n \left(\frac{s^4}{E'J} \left(\frac{1}{4!} - \frac{2\phi^2}{6!} \right) + fs^2 \left(\frac{\phi^2}{4!} - \frac{2\phi^4}{6!} \right) \right) + P_t \left(\frac{s^4}{E'J} \left(-\frac{\phi}{5!} \right) + fs^2 \left(\frac{\phi}{3!} - \frac{2\phi^3}{5!} \right) \right) \quad (5.2б)$$

- Кут повороту θ .

$$\theta(s) = 1\theta_0 + \frac{s^2}{E'J} \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi^2}{4!} + \frac{\phi^4}{6!} \right) Q_0 + \left(-\frac{s^2}{E'J} \left(\frac{\phi}{3!} - \frac{\phi^3}{5!} \right) \right) N_0 + \frac{s}{E'J} M_0 + \hat{P}_n \frac{s^3}{E'J} \left(\frac{1}{3!} - \frac{\phi^2}{5!} \right) + P_t \frac{s^3}{E'J} \left(-\frac{\phi}{4!} + \frac{\phi^3}{6!} \right) \quad (5.2в)$$

- Поперечна сила Q та повздовжня сила N

$$Q(s) = \cos \phi Q_0 + (-\sin \phi)N_0 + 0M_0 + \hat{P}_n R \sin \phi + P_t s \left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\phi^3}{4!} - \frac{\phi^5}{6!} \right) \quad (5.2г)$$

$$N(s) = \sin \phi Q_0 + \cos \phi N_0 + 0M_0 + \hat{P}_n s \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\phi^3}{4!} + \frac{\phi^5}{6!} \right) + P_t R \sin \phi \quad (5.2d)$$

• Згинальний момент M

$$M(s) = R \sin \phi Q_0 + s \left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\phi^3}{4!} - \frac{\phi^5}{6!} \right) N_0 + 1M_0 + \hat{P}_n s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi^2}{4!} + \frac{\phi^4}{6!} \right) + P_t s^2 \left(-\frac{\phi}{3!} + \frac{\phi^3}{5!} \right) \quad (5.2e)$$

**Додаток Б. Експоненційний розв'язок згладжувального рішення для
плоских балок**

Експоненційні розв'язки рівнянь (3.5 а-е) описаних в Розділі 3.2

Введемо заміну: $f = \frac{1}{EF} \frac{s_0}{s_b}$

- Переміщення балки в повздовжньому напрямку u і поперечному напрямку w .

$$\begin{aligned}
 u = & \cos \phi u_0 + \sin \phi w_0 + R(1 - \cos \phi)\theta_0 + \left(\frac{R^3}{E'J\mu^2} \left(\frac{(ch \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 + 1} - (1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \cos \phi) \right) - fR \left(\frac{(ch \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 + 1} \right) \right) Q_0 - \left(\frac{R^3}{E'J\mu^3} \left(\frac{(sh \mu \phi - \mu \sin \phi)}{\mu^2 + 1} - \mu(\phi - \sin \phi) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{fR}{\mu^2} \left(\frac{(\mu^4 + 2\mu^2)\sin \phi}{\mu^2 + 1} - \frac{\mu sh \mu \phi}{\mu^2 + 1} \right) \right) N_0 + \left(\frac{R^2}{E'J} \left(\frac{sh \mu \phi}{\mu^3} - \frac{\phi}{\mu^2} \right) - f \left(\frac{1}{\mu} \right) (sh \mu \phi - \right. \\
 & \left. \mu \sin \phi) \right) M_0 + \hat{P}_n R \left(\frac{R^3}{E'J\mu^3} \left(\frac{(sh \mu \phi - \mu \sin \phi)}{\mu^2 + 1} - \mu(\phi - \sin \phi) \right) - f \frac{R}{\mu} \left(\frac{sh \mu \phi}{\mu^2 + 1} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\mu \sin \phi}{\mu^2 + 1} \right) \right) - P_t R \left(\frac{R^3}{E'J\mu^4} \left(\frac{ch \mu \phi}{\mu^2 + 1} - \frac{\cos \phi \mu^4}{\mu^2 + 1} - \frac{\mu^2 \phi^2}{2} + \mu^2 - 1 \right) - f \frac{R}{\mu^2} \left(\frac{\cos \phi - ch \mu \phi}{\mu^2 + 1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (\mu^2 + 1)(1 - \cos \phi) \right) \right) \Bigg) \quad (5.3a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w = & -\sin \phi u_0 + \cos \phi w_0 + R \sin \phi \theta_0 + \left(\frac{R^3}{E'J\mu^2} \left(\frac{\mu sh \mu \phi}{\mu^2 + 1} - \frac{\sin \phi \mu^2}{\mu^2 + 1} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{fR}{\mu} \left(\frac{(sh \mu \phi - \mu \sin \phi)}{\mu^2 + 1} \right) \right) Q_0 - \left(\frac{R^3}{E'J\mu^2} \left(\frac{(ch \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 + 1} - (1 - \cos \phi) \right) - f \frac{R}{\mu^2} \left((1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \cos \phi)(\mu^2 + 1) - \frac{(ch \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 + 1} \right) \right) N_0 + \left(\frac{R^2}{E'J} \left(\frac{ch \mu \phi - 1}{\mu^2} \right) + f \left(\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2} \right) \left(\frac{(ch \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 + 1} - \right. \right. \\
 & \left. \left. (1 - \cos \phi) \right) \right) M_0 + \hat{P}_n R \left(\frac{R^3}{E'J\mu^2} \left(\frac{(ch \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 + 1} - (1 - \cos \phi) \right) + \right. \\
 & \left. \frac{fR}{\mu^2} \left(\frac{(ch \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 + 1} - (1 - \cos \phi) \right) \right) - P_t R \left(\frac{R^3}{E'J\mu^4} \left(\frac{\mu sh \mu \phi}{\mu^2 + 1} + \frac{\mu^4 \sin \phi}{\mu^2 + 1} - \mu^2 \phi \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\frac{fR}{\mu^3} \left((\mu^2 + 1)\mu(\phi - \sin\phi) - \frac{(sh\mu\phi - \mu\sin\phi)}{\mu^2 + 1} \right) \quad (5.3b)$$

- Кут повороту θ .

$$\begin{aligned} \theta(s) = & 1\theta_0 + \frac{R^2}{E'J\mu^2} (ch\mu\phi - 1)Q_0 - \frac{R^2}{E'J\mu^3} (sh\mu\phi - \mu\phi)N_0 + \frac{R}{E'J} \left(\phi + \right. \\ & \left. \frac{(\mu^2 + 1)}{\mu^3} (sh\mu\phi - \mu\phi) \right) M_0 + \hat{P}_n \frac{R^3}{E'J\mu^3} (sh\mu\phi - \mu\phi) - P_t \frac{R^3}{E'J\mu^4} \left(ch\mu\phi - \frac{\mu^2\phi^2}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (5.3в)$$

- Поперечна сила Q та повздовжня сила N

$$Q(\phi) = Q_0 ch\mu\phi - \frac{N_0}{\mu} sh\mu\phi + M_0 \frac{\mu^2 + 1}{R\mu} sh\mu\phi + \hat{P}_n R \frac{sh\mu\phi}{\mu} + \frac{RP_t}{\mu^2} (-ch\mu\phi + 1) \quad (5.3г)$$

$$\begin{aligned} N = & Q_0 \frac{sh\mu\phi}{\mu} + N_0 \left(1 - \frac{(ch\mu\phi - 1)}{\mu^2} \right) + M_0 \left(\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 R} \right) (ch\mu\phi - 1) + \hat{P}_n R \frac{(ch\mu\phi - 1)}{\mu^2} - \\ & RP_t \left(\frac{sh\mu\phi}{\mu^3} - \left(\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2} \right) \phi \right) \end{aligned} \quad (5.3д)$$

- Згинальний момент M

$$\begin{aligned} M(\phi) = & Q_0 \frac{R}{\mu} sh\mu\phi + N_0 \frac{R}{\mu^2} (-ch\mu\phi + 1) + M_0 \left(ch\mu\phi + \frac{1}{\mu^2} (ch\mu\phi - 1) \right) + \\ & \hat{P}_n R \frac{R}{\mu^2} (ch\mu\phi - 1) + RP_t \left(-\frac{R}{\mu^3} sh\mu\phi + \frac{R\phi}{\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (5.3е)$$

Розклад цих рівнянь в ряд Тейлора що використовуються для малих кутів $\phi < 0.002$, враховуючи заміну $R\phi = s$ та попередню заміну $f = \frac{1}{EF} \frac{s_0}{s_b}$

- Переміщення балки в повздовжньому напрямку u і поперечному напрямку w .

$$\begin{aligned} u = & \cos\phi u_0 + \sin\phi w_0 + s \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\phi^3}{4!} + \frac{\phi^5}{6!} \right) \theta_0 + \left(\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi}{4!} + \frac{(\mu^2 - 1)\phi^3}{6!} \right) - fs \left(\frac{\phi}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(\mu^2 - 1)\phi^3}{4!} + \frac{(\mu^6 + 1)\phi^5}{(\mu^2 + 1)6!} \right) \right) Q_0 - \left(\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi^2}{5!} \right) + fs \left(1 - \frac{2\phi^2}{3!} + \frac{\phi^4}{5!} \frac{(\mu^2 + 2 - \mu^4)}{(\mu^2 + 1)} \right) \right) N_0 + \\ & \left(\frac{s^2}{E'J} \left(\frac{\phi}{3!} + \frac{\mu^2\phi^3}{5!} \right) - f \left(\frac{(\mu^2 + 1)\phi^3}{3!} + \frac{(\mu^4 - 1)\phi^5}{5!} \right) \right) M_0 + \hat{P}_n \left(\frac{s^4}{E'J} \left(\frac{\phi}{5!} \right) - fs^2 \left(\frac{\phi}{3!} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{(\mu^2-1)\phi^3}{5!} \right) - P_t \left(\frac{s^4}{E'J} \left(\frac{\phi^2}{6!} \right) + f s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2\phi^2}{4!} + \frac{(-\mu^4+\mu^2+2)\phi^4}{(\mu^2+1)6!} \right) \right) \quad (5.4a)$$

$$w = -\sin \phi u_0 + \cos \phi w_0 + R \sin \phi \theta_0 + \left(\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{1}{3!} + \frac{\phi^2}{5!} (\mu^2 - 1) \right) + f s \left(\frac{\phi^2}{3!} + \frac{\phi^4}{5!} (\mu^2 - 1) \right) \right) Q_0 - \left(\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi}{4!} + \frac{(\mu^2-1)\phi^3}{6!} \right) - f s \left(\frac{\phi}{2} - \frac{2\phi^3}{4!} - \frac{(\mu^2-2)\phi^5}{6!} \right) \right) N_0 + \left(\frac{s^2}{E'J} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu^2\phi^2}{4!} + \frac{\mu^4\phi^4}{6!} \right) + f (\mu^2 + 1) \left(\frac{\phi^4}{4!} + \frac{(\mu^2-1)\phi^6}{6!} \right) \right) M_0 + \hat{P}_n \left(\frac{s^4}{E'J} \left(\frac{1}{4!} + \frac{(\mu^2-1)\phi^2}{6!} \right) + f s^2 \left(\frac{\phi^2}{4!} + \frac{(\mu^2-1)\phi^4}{6!} \right) \right) - P_t \left(\frac{s^4}{E'J} \left(\frac{\phi}{5!} \right) - f s^2 \left(\frac{\phi}{3!} - \frac{2\phi^3}{5!} \right) \right) \quad (5.4б)$$

- Кут повороту θ .

$$\theta(s) = 1\theta_0 + \frac{s^2}{E'J} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu^2\phi^2}{4!} + \frac{\mu^4\phi^4}{6!} \right) Q_0 - \frac{s^2}{E'J} \left(\frac{\phi}{3!} + \frac{\mu^2\phi^3}{5!} \right) N_0 + \frac{R}{E'J} \left(\phi + \frac{\phi^3(\mu^2+1)}{3!} + \frac{\mu^2\phi^5(\mu^2+1)}{5!} \right) M_0 + \hat{P}_n \frac{s^3}{E'J} \left(\frac{1}{3!} + \frac{\mu^2\phi^2}{5!} \right) - P_t \frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi}{4!} + \frac{\mu^2\phi^3}{6!} \right) \quad (5.4в)$$

- Поперечна сила Q та повздовжня сила N

$$Q(\phi) = Q_0 ch \mu \phi - N_0 \left(\phi + \frac{\mu^2\phi^3}{3!} + \frac{\mu^4\phi^5}{5!} \right) + M_0 \frac{\mu^2+1}{R} \left(\phi + \frac{\mu^2\phi^3}{3!} + \frac{\mu^4\phi^5}{5!} \right) + \hat{P}_n s \left(1 + \frac{\mu^2\phi^2}{3!} + \frac{\mu^4\phi^4}{5!} \right) - P_t s \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\mu^2\phi^3}{4!} + \frac{\mu^4\phi^5}{6!} \right) \quad (5.4г)$$

$$N = Q_0 \left(\phi + \frac{\mu^2\phi^3}{3!} + \frac{\mu^4\phi^5}{5!} \right) + N_0 \left(1 - \frac{\phi^2}{2} - \frac{\mu^2\phi^4}{4!} - \frac{\mu^4\phi^6}{6!} \right) + M_0 \left(\frac{\mu^2+1}{R} \right) \left(\frac{\phi^2}{2} + \frac{\mu^2\phi^4}{4!} + \frac{\mu^4\phi^6}{6!} \right) + \hat{P}_n s \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\mu^2\phi^3}{4!} + \frac{\mu^4\phi^4}{6!} \right) + P_t s \left(1 - \frac{\phi^2}{3!} - \frac{\mu^2\phi^4}{5!} \right) \quad (5.4д)$$

- Згинальний момент M

$$M(\phi) = Q_0 s \left(1 + \frac{\mu^2\phi^2}{3!} + \frac{\mu^4\phi^4}{5!} \right) - N_0 s \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\mu^2\phi^3}{4!} + \frac{\mu^4\phi^5}{6!} \right) + M_0 \left(1 + \frac{(\mu^2+1)\phi^2}{2} + \frac{(\mu^2+1)\mu^2\phi^4}{4!} + \frac{\mu^4(\mu^2+1)\phi^6}{6!} \right) + \hat{P}_n s^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu^2\phi^2}{4!} + \frac{\mu^4\phi^4}{6!} \right) - P_t s^2 \left(\frac{\phi}{3!} + \frac{\mu^2\phi^3}{5!} \right) \quad (5.4е)$$

Додаток В Тригонометричний розв'язок згладжувального рішення для плоских балок

Лінійні розв'язки рівнянь (3.5 а-е) описаних в Розділі 3.2. Введемо заміну: $f = \frac{1}{EF} \frac{s_0}{s_b}$

- Переміщення балки в повздовжньому напрямку u і поперечному напрямку w .

$$\begin{aligned}
 u = & \cos \phi u_0 + \sin \phi w_0 + R(1 - \cos \phi) \theta_0 + \left(\frac{R^3}{E' J \mu^2} \left((1 - \cos \phi) - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(\cos \phi - \cos \mu \phi)}{\mu^2 - 1} \right) + f R \frac{(\cos \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 - 1} \right) Q_0 + \left(\frac{R^3}{E' J \mu^3} \left(\frac{(\mu \sin \phi - \sin \mu \phi)}{\mu^2 - 1} - \mu(\phi - \sin \phi) \right) - \right. \\
 & \left. \frac{f R}{\mu^2} \left(\frac{(\mu^4 - 2\mu^2) \sin \phi}{\mu^2 - 1} + \frac{(\mu \sin \mu \phi)}{\mu^2 - 1} \right) \right) N_0 + \left(\frac{R^3}{E' J \mu^3} (\mu \phi - \sin \mu \phi) - \right. \\
 & \left. f \left(\frac{\sin \mu \phi - \mu \sin \phi}{\mu} \right) \right) M_0 + \widehat{P}_n R \left(\frac{R^3}{EI \mu^3} \left(\mu(\phi - \sin \phi) - \frac{(\mu \sin \phi - \sin \mu \phi)}{\mu^2 - 1} \right) - \frac{f R}{\mu} \left(\frac{\mu \sin \phi}{\mu^2 - 1} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\sin \mu \phi}{\mu^2 - 1} \right) \right) + R P_t \left(\frac{R^3}{EI \mu^4} \left(\frac{\cos \mu \phi}{\mu^2 - 1} - \frac{\mu^4 \cos \phi}{\mu^2 - 1} - \frac{\phi^2 \mu^2}{2} + \mu^2 + 1 \right) - \frac{f R}{\mu^2} \left(- \frac{(\cos \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 - 1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (\mu^2 - 1)(1 - \cos \phi) \right) \right) \quad (5.5a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w = & -\sin \phi u_0 + \cos \phi w_0 + R \sin \phi \theta_0 + \left(\frac{R^3}{EI \mu^2} \left(\frac{\mu^2 \sin \phi}{\mu^2 - 1} - \frac{\mu \sin \mu \phi}{\mu^2 - 1} \right) - \right. \\
 & \left. \frac{f R}{\mu} \frac{(\sin \mu \phi - \mu \sin \phi)}{(\mu^2 - 1)} \right) Q_0 + \left(\frac{R^3}{EI \mu^2} \left(\frac{(\cos \phi - \cos \mu \phi)}{\mu^2 - 1} - (1 - \cos \phi) \right) - \right. \\
 & \left. \frac{f R}{\mu^2} \left(\left(\frac{(\cos \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 - 1} \right) - (\mu^2 - 1)(1 - \cos \phi) \right) \right) N_0 + \left(\frac{R^2}{EI \mu^2} (1 - \cos \mu \phi) - \right. \\
 & \left. f \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \right) \left(\frac{(\cos \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 - 1} + (1 - \cos \phi) \right) \right) M_0 + \widehat{P}_n R \left(\frac{R^3}{EI \mu^2} \left((1 - \cos \phi) - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{(\cos \phi - \cos \mu \phi)}{\mu^2 - 1} \right) - \frac{f R}{\mu^2} \left(-(1 - \cos \phi) - \frac{(\cos \mu \phi - \cos \phi)}{\mu^2 - 1} \right) \right) + R P_t \left(\frac{R^3}{EI \mu^4} \left(\frac{\mu^4 \sin \phi}{\mu^2 - 1} - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\mu \sin \mu \phi}{\mu^2 - 1} - \mu^2 \phi \right) - \frac{fR}{\mu^3} \left(\frac{(\sin \mu \phi - \mu \sin \phi)}{\mu^2 - 1} + (\mu^2 - 1)(\mu \sin \phi - \mu \phi) \right) \Bigg) \quad (5.5б)$$

- Кут повороту θ .

$$\theta(\phi) = \theta_0 + \frac{R^2}{EI\mu^2} (1 - \cos \mu \phi) Q_0 + \frac{R^2}{EI\mu^3} (\sin \mu \phi - \mu \phi) N_0 + \frac{R}{EI\mu} \left(\sin \mu \phi - \frac{1}{\mu^2} (\sin \mu \phi - \mu \phi) \right) M_0 + \hat{P}_n R \frac{R^2}{EI\mu^3} (\mu \phi - \sin \mu \phi) + RP_t \frac{R^2}{EI\mu^4} \left(1 - \cos \mu \phi - \frac{\mu^2 \phi^2}{2} \right) \quad (5.5в)$$

- Поперечна сила Q та повздовжня сила N

$$Q(\phi) = \cos \mu \phi Q_0 - \frac{\sin \mu \phi}{\mu} N_0 - \frac{(\mu^2 - 1) \sin \mu \phi}{\mu R} M_0 + \hat{P}_n R \frac{\sin \mu \phi}{\mu} + \frac{RP_t}{\mu^2} (\cos \mu \phi - 1) \quad (5.5г)$$

$$N = \frac{\sin \mu \phi}{\mu} Q_0 + \left(1 + \frac{(\cos \mu \phi - 1)}{\mu^2} \right) N_0 + \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 R} \right) (\cos \mu \phi - 1) M_0 + \hat{P}_n R \frac{(1 - \cos \mu \phi)}{\mu^2} + RP_t \left(\frac{\sin \mu \phi}{\mu^3} + \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \right) \phi \right) \quad (5.5д)$$

- Згинальний момент M

$$M(\phi) = \frac{R}{\mu} \sin \mu \phi Q_0 + \frac{R}{\mu^2} (\cos \mu \phi - 1) N_0 + \left(\cos \mu \phi - \frac{1}{\mu^2} (\cos \mu \phi - 1) \right) M_0 + \hat{P}_n R \frac{R}{\mu^2} (1 - \cos \mu \phi) + RP_t \frac{R}{\mu^3} (\sin \mu \phi - \mu \phi) \quad (5.5е)$$

Розклад цих рівнянь в ряд Тейлора що використовуються для малих кутів $\phi < 0.002$, враховуючи заміну $R\phi = s$

- Переміщення балки в повздовжньому напрямку u і поперечному напрямку w .

$$u = \cos \phi u_0 + \sin \phi w_0 + s \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\phi^3}{4!} + \frac{\phi^5}{6!} \right) \theta_0 + \left(\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi}{4!} - \frac{(\mu^2 + 1)\phi^3}{6!} \right) - fs \left(\frac{\phi}{2} - \frac{(\mu^2 + 1)\phi^3}{4!} + \frac{(\mu^6 - 1)\phi^5}{(\mu^2 - 1)6!} \right) \right) Q_0 + \left(-\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi^2}{5!} \right) - fs \left(1 - \frac{\phi^2}{3!} + \frac{\phi^4(\mu^2 + 2)}{5!} \right) \right) N_0 + \left(\frac{s^3}{E'J} \left(\frac{\phi^3}{3!} - \frac{\mu^2 \phi^5}{5!} \right) + f \left((\mu^2 - 1) \frac{\phi^3}{3!} - (\mu^4 - 1) \frac{\phi^5}{5!} \right) \right) M_0 + \hat{P}_n \left(\frac{s^4}{EI} \left(\frac{\phi}{5!} \right) - fs^2 \left(\frac{\phi}{3!} - \frac{\phi^3}{5!} (\mu^2 + 1) \right) \right) - P_t \left(\frac{s^4}{EI} \left(\frac{\phi^2}{6!} \right) + fs^2 \left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{2\phi^4}{4!} + \frac{(\mu^2 + 2)\phi^4}{6!} \right) \right) \quad (5.6а)$$

$$\begin{aligned}
w = & -\sin \phi u_0 + \cos \phi w_0 + R \sin \phi \theta_0 + \left(\frac{s^3}{EI\mu} \left(\frac{1}{3!} - \frac{\phi^2}{5!} (\mu^2 + 1) \right) + fs \left(\frac{\phi^2}{3!} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\phi^4}{5!} (\mu^2 + 1) \right) \right) Q_0 + \left(-\frac{s^3}{EI} \left(\frac{\phi}{4!} - \frac{(\mu^2+1)\phi^3}{6!} \right) + fs \left(\frac{\phi}{2} - \frac{2\phi^3}{4!} + \frac{(\mu^2+2)\phi^5}{6!} \right) \right) N_0 + \\
& \left(\frac{s^2}{EI} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu^2\phi^2}{4!} + \frac{\mu^4\phi^4}{6!} \right) - f(\mu^2 - 1) \left(\frac{\phi^4}{4!} - \frac{(\mu^2+1)\phi^6}{6!} \right) \right) M_0 + \widehat{P}_n \left(\frac{s^4}{EI} \left(\frac{1}{4!} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(\mu^2+1)\phi^2}{6!} \right) + fs^2 \left(\frac{\phi^2}{4!} - \frac{(\mu^2+1)\phi^4}{6!} \right) \right) + P_t \left(-\frac{s^4}{EI} \left(\frac{\phi}{5!} \right) + fs^2 \left(\frac{\phi}{3!} - \frac{2\phi^3}{5!} \right) \right) \quad (5.66)
\end{aligned}$$

- Кут повороту θ .

$$\begin{aligned}
\theta(\phi) = & \theta_0 + \frac{s^2}{EI} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu^2\phi^2}{4!} + \frac{\mu^4\phi^4}{6!} \right) Q_0 + \frac{s^2}{EI} \left(-\frac{\phi}{3!} + \frac{\mu^3\phi^3}{5!} \right) N_0 + \frac{s}{EI} \left(1 - \frac{(\mu^2-1)\phi^2}{3!} + \right. \\
& \left. \frac{\mu^2(\mu^2-1)\phi^4}{5!} \right) M_0 + \widehat{P}_n \frac{s^3}{EI} \left(\frac{1}{3!} - \frac{\mu^2\phi^2}{5!} \right) + P_t \frac{s^3}{EI} \left(-\frac{\phi}{4!} + \frac{\mu^2\phi^3}{6!} \right) \quad (5.6в)
\end{aligned}$$

- Поперечна сила Q та повздовжня сила N

$$\begin{aligned}
Q(\phi) = & \cos \mu\phi Q_0 - \left(\phi - \frac{\mu^2\phi^3}{3!} + \frac{\mu^4\phi^5}{5!} \right) N_0 - \frac{(\mu^2-1)}{R} \left(\phi - \frac{\mu^2\phi^3}{3!} + \frac{\mu^4\phi^5}{5!} \right) M_0 + \\
& \widehat{P}_n s \left(1 - \frac{\mu^2\phi^2}{3!} + \frac{\mu^4\phi^4}{5!} \right) - P_t s \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\mu^2\phi^3}{4!} + \frac{\mu^4\phi^5}{6!} \right) \quad (5.6г)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N = & \left(\phi - \frac{\mu^2\phi^3}{3!} + \frac{\mu^4\phi^5}{5!} \right) Q_0 + \left(1 - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\mu^2\phi^4}{4!} - \frac{\mu^4\phi^6}{6!} \right) N_0 + \left(\frac{\mu^2-1}{R} \right) \left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{\mu^2\phi^4}{4!} + \right. \\
& \left. \frac{\mu^4\phi^6}{6!} \right) M_0 + \widehat{P}_n s \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\mu^2\phi^3}{4!} + \frac{\mu^4\phi^5}{6!} \right) + P_t s \left(1 - \frac{\phi^2}{3!} + \frac{\mu^2\phi^4}{5!} \right) \quad (5.6д)
\end{aligned}$$

- Згинальний момент M

$$\begin{aligned}
M(\phi) = & s \left(1 - \frac{\mu^2\phi^2}{3!} + \frac{\mu^4\phi^4}{5!} \right) Q_0 - s \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\mu^2\phi^3}{4!} + \frac{\mu^4\phi^5}{6!} \right) N_0 + \left(1 - (\mu^2 - 1) \left(\frac{\phi^2}{2} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\mu^2\phi^4}{4!} + \frac{\mu^4\phi^6}{6!} \right) \right) M_0 + \widehat{P}_n s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu^2\phi^2}{4!} + \frac{\mu^4\phi^4}{6!} \right) - P_t s^2 \left(\frac{\phi}{3!} - \frac{\mu^2\phi^3}{5!} \right) \quad (5.6е)
\end{aligned}$$