

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ И НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ І. СІКОРСЬКОГО»  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ И НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ І. СІКОРСЬКОГО»

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Донецький Сергій Вікторович**

УДК 517.9, 534.1

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**НОВІ ТИПИ АТРАКТОРІВ В НЕІДЕАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ**  
**СИСТЕМАХ**

111 - Математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання  
ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відпо-  
відне джерело \_\_\_\_\_ Донецький С.В.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор

**Швець Олександр Юрійович**

Київ – 2023

## Анотація

*Донецький С.В.* Нові типи атракторів в неідеальних динамічних системах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 - Математика. – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». – Україна, Київ, 2023.

Дисертація присвячена дослідженню регулярних та хаотичних граничних множин двох неідеальних за Зоммерфельдом-Кононенком динамічних систем: «LC-генератор – п'єзокерамічний випромінювач» та «сферичний маятник – електродвигун».

Одним із найважливіших елементів сучасного навігаційного обладнання є п'єзокерамічні випромінювачі. Різні види таких випромінювачів широко використовується в глибиномірах, далекомірах, приладах для сканування підводного середовища, системах прийому та передачі інформації під водою. Останнім часом, приладом для збудження коливань п'єзокерамічного випромінювача є електролампові LC-генератори. Це пов'язано з відродженням аналогових генераторів, що дозволяє значно підвищити метеорологічні характеристики вихідних сигналів у порівнянні з цифровими пристроями.

Маятникові системи є надзвичайно простими за своєю фізичною природою і дозволяють проводити фізичні експерименти, що підтверджують або спростовують теоретично встановлені коливальні властивості. Попри це, цікавість до вивчення різних аспектів динамічної поведінки маятникових систем загалом обумовлена тим фактом, що багато властивостей, вперше знайдених для маятникових систем, згодом були відкриті й в інших системах із значно складнішою фізичною природою. Зокрема, для таких систем як кільця, оболонки, пластини, резервуари, частково заповнені рідиною, тощо.

Будь-яка коливальна система, незважаючи на величезну

різноманітність таких систем, насправді, складається з двох основних елементів. Перший елемент – безпосередньо коливальна система, а другий – будь-яке джерело збудження коливань. Все різноманіття існуючих коливальних динамічних систем можна розділити на два класи. Ідеальні коливальні динамічні системи, що розуміються як системи в яких джерело збудження коливань має потужність, що значно перевищує потужність з якою коливальна система споживає енергію. У свою чергу, системи в яких потужність, споживана коливальним навантаженням є порівняною з потужністю джерела збудження зараз називають неідеальними за Зоммерфельдом (1902) Кононенком (1964), або системами з обмеженим збудженням. В останньому випадку робота джерела енергії залежить від режиму коливального навантаження, а вплив джерела не може бути виражено як заздалегідь визначену явну функцію часу. Тоді як при традиційному математичному моделюванні коливальної системи розглядаються ідеалізовані джерела збудження не обмеженої потужності. У багатьох випадках "ідеальний" підхід у корені неправильний, що на практиці призводить до значних помилок в описі динаміки як коливальної системи, так і джерела збудження. У реальних системах невідповідність очікуваної та реальної поведінки може призвести до катастрофи.

Вивченням системи «LC-генератор – п'єзокерамічний випромінювач» займались Т. Краснопольська, О. Швець (1990-1993, 2007-2009), В. Печерний, Ж. Балтазар, Р. Бразіл, Дж. Паласіос Фелікс та ін. (2007-2011). Ними було виведено математичну модель неідеальної системи «LC-генератор – п'єзокерамічний випромінювач» та виявлено деякі усталені граничні множини. Зокрема, положення рівноваги, хаотичні та гіперхаотичні аттрактори. Було встановлено, що існування детерміновано хаосу можливо лише при врахуванні нелінійної взаємодії генератора та випромінювача.

Чільне місце у дослідженнях резонанчних коливань сферичного маятника при ідеальному збудженні посідають роботи Дж. Майлза (1962, 1984).

Ним були вивчені випадки вимушених та параметричних резонансів та встановлена можливість існування хаотичних режимів коливань "ідеального" сферичного маятника. Дослідження Дж. Майлза були уточнені й продовжені у роботах Т. Краснопольської, О. Швеця, В. Печерного та ін. (1990-1994, 2007-2011). У цих роботах було виведено математичну модель неідеальної системи «сферичний маятник – електродвигун», де було враховано нелінійну взаємодію між маятником та джерелом збудження його коливань - електродвигуном обмеженої потужності. Крім того, було виявлено нові типи хаотичних атракторів такої системи і описано новий сценарій переходу до хаосу, так звана, узагальнена переміжність.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано, де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У першому розділі проведено детальний огляд розвитку досліджень із нелінійної динаміки та теорії динамічних систем. Висвітлено сучасний стан досліджень хаотичної динаміки в коливальних системах із обмеженим збудженням. Наведено деякі необхідні теоретичні відомості та результати попередників, які використовуються в дисертаційній роботі.

У другому розділі наведено основні поняття з теорії динамічних систем, розглянуто загальні підходи та методи дослідження хаотичної динаміки коливальних систем.

У третьому розділі було проведено дослідження системи «LC-генератор – п'єзокерамічний випромінювач». Для системи побудовано карту динамічних режимів на якій виявлено всі можливі типи граничних множин, які можуть



бути притаманні чотирьохвимірній системі диференціальних рівнянь. Виявлено атипове чергування сценаріїв Фейгенбаума та Манневілья-Помо при переходах від регулярних до хаотичних атракторів. Знайдено значення параметрів за яких у системі співіснують два атрактори. Для знайдених атракторів побудовано проєкції фазових портретів, фазо-параметричні характеристики та переріз Пуанкаре. Вперше було проведено класифікацію існуючих атракторів у термінах прихованості, рідкості та самозбудженості. Проаналізовано вплив запізнення на зазначену класифікацію.

У четвертому розділі було проведено дослідження системи «сферичний маятник – електродвигун». Для системи знайдено та побудовано як ізольовані та і неізольовані положення рівноваги. Доведено теореми про стійкість ізольованого положення рівноваги та існування сімейства неізольованих положень рівноваги. Показано, що неізольоване сімейство положень рівноваги може володіти притягувальними властивостями, що спонукало узагальнити поняттям «атрактор» для системи, що розглядається, поняттям «максимальний атрактор». Знайдено інші типи максимальних атракторів, зокрема періодичні та хаотичні. Для знайдених максимальних атракторів побудовано проєкції фазових портретів, фазо-параметричні характеристики та розподіл природної інваріантної міри. Показано, що незважаючи на те, що максимальні атрактори не є атракторами в традиційному розумінні цього терміну, перехід до хаосу максимальних атракторів відбувається за сценаріями, що є аналогічними до сценаріїв переходу до хаосу притаманним "класичним" атракторам.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертації. Для системи «генератор – п'єзокерамічний випромінювач»:

1. Виявлено нетипове чергування сценаріїв Фейгенбаума та Манневілья-

Помо при переходах від регулярних режимів до хаотичних.

2. Знайдено значення параметрів за яких у системі співіснують два аттрактори один із яких розташований в області локалізації іншого.
3. Встановлено співіснування таких усталених режимів: квазіперіодичний і періодичний; періодичний і періодичний; хаотичний і періодичний.
4. Проведено ідентифікацію співіснуючих атракторів цієї системи в термінах «рідкості» та «прихованості».
5. Проаналізовано вплив запізнення на класифікацію співіснуючих атракторів у термінах «рідкості» та «прихованості».

Для системи «сферичний маятник – електродвигун»:

1. Знайдено ізольовані та неізольовані положення рівноваги.
2. Знайдено регулярні та нерегулярні сімейства неізольованих граничних множин, що володіють притягувальними властивостями.
3. Показано, що сімейства неізольованих граничних множин, що володіють притягувальними властивостями, не є атракторами в "класичному" розумінні, але відповідають означенню максимального атрактора.
4. Встановлено, що сценарії переходу до хаосу максимальних атракторів відбувається за сценаріями, що є аналогічними до сценаріїв переходу до хаосу притаманним "класичним" атракторам.
5. Доведено теореми про стійкість ізольованого положення рівноваги та існування сімейства неізольованих положень рівноваги.

**Ключові слова:** система диференціальних рівнянь, неідеальна динамічна система, система з обмеженим збудженням, ефект Зоммерфельда-Кононенка, множина граничних точок, детермінований хаос, регулярний

атрактор, хаотичний аттрактор, рідкісний аттрактор, прихований аттрактор, максимальний аттрактор, асимптотичні розв'язки, усталені режими.

## Список публікацій здобувача

Статті в наукових фахових виданнях

1. Швець О. Ю., Донецький С. В. Приховані й рідкісні аттрактори в неідеальних електропружних системах // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 2. — С. 177—187. — ISSN 1815-2019. Періодичне фахове видання.
2. Shvets A., Donetskyi S. New Types of Limit Sets in the Dynamic System “Spherical Pendulum—Electric Motor” // Nonlinear Mechanics of Complex Structures: From Theory to Engineering Applications / ed. by H. Altenbach, M. Amabili, Y. V. Mikhlin. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 443–455. — DOI: 10.1007/978-3-030-75890-5\_25. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_25). Scopus, Q3.
3. Донецький С. В., Швець О. Ю. Узагальнення поняття аттрактора для маятникових систем з обмеженим збудженням // Нелінійні коливання. — 2021. — Т. 24, № 4. — С. 473—481. Фахове видання категорії А.  
Переклад англ. мовою:  
*Donetskyi V. S., Shvets A. Y. Generalization of the Concept of Attractor for Pendulum Systems with Finite Excitations* // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — June. — Vol. 273, no. 2. — P. 220–229. — ISSN 1573-8795. — DOI: 10.1007/s10958-023-06495-x. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06495-x>. Scopus, Q3.
4. Donetskyi S. V., Shvets A. Y. Bifurcations “Cycle–Chaos–Hyperchaos” in Some Nonideal Electroelastic Systems // Nonlinear Vibrations Excited by Limited Power Sources / ed. by J. M. Balthazar. — Cham : Springer International Publishing, 2022. — P. 43–51. — DOI: 10.1007/978-3-030-96603-4\_4. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4_4). Scopus.

5. *Донецький С., Швець О.* Біфуркації максимальних атракторів неідеальних маятникових систем // Доповіді Національної академії наук України. — 2022. — № 3. — С. 13–19. — DOI: 10.15407/dopovidi2022.03.013. — URL: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.03.013>. Фахове видання категорії Б.

#### Праці наукових конференцій

1. *Shvets A., Donetskyi S.* Transition to Deterministic Chaos in Some Electroelastic Systems // 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, I. Lubashevsky. — Cham : Springer International Publishing, 2019. — P. 257–264. — DOI: 10.1007/978-3-030-15297-0\_23. Scopus. The 11th CHAOS 2018 International Conference. Рим, Італія. 5-8 червня 2018. Зроблено доповідь.
2. *Shvets A., Donetskyi S.* Identification of Hidden and Rare Attractors in Some Electroelastic Systems with Limited Excitation // 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 865–878. — DOI: 10.1007/978-3-030-70795-8\_60. Scopus. The 13th CHAOS 2020 International Conference. Флоренція, Італія. 9-12 червня 2020. Зроблено доповідь.
3. *Donetskyi S., Shvets A.* Double Symmetry and Generalized Intermittency in Transitions to Chaos in Electroelastic Systems // 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — Cham : Springer International Publishing, 2022. — P. 135–142. — DOI: 10.1007/978-3-030-96964-6\_11. Scopus. The 14th CHAOS 2021 International Conference. Афіни, Греція. 8-11 червня 2021. Зроблено доповідь.

# Abstract

*Donetskyi S. V.* New types of attractors in nonideal dynamic systems. Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the academic degree Doctor of Philosophy in speciality 111 - Mathematics. – National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute». – Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis is devoted to the study of limit sets of two nonideal according to Sommerfeld-Kononenko dynamic systems: the «LC-generator - piezoceramic transducer» system and the «spherical pendulum - electric motor» system.

Piezoceramic transducers are considered to be one of the most important components in modern navigation equipment. They are widely used in various applications such as depth gauges, rangefinders, underwater scanning devices, and underwater information transmission systems. Recently, electrolamp LC-generators have been used as the device for exciting the oscillations of the piezoceramic transducer. This is due to the renaissance of analog lamps, which allow significantly higher meteorological characteristics of the output signals compared to digital devices.

Pendulum systems are inherently simple in their physical nature and can be used to conduct physical experiments that verify or challenge theoretically established oscillatory properties. However, the interest in studying different aspects of the dynamic behavior of pendulum systems stems from the fact that many properties initially observed in pendulum systems have been subsequently identified in other systems with significantly more complex physical characteristics. This holds true for systems such as rings, shells, plates, tanks partially filled with liquid, and so on.

Any oscillating system, despite the vast variety of such systems, consists of two main elements. The first element is the oscillating system itself, and the second is any source of oscillation excitation. All the variety of existing osci-

llatory dynamic systems can be divided into two classes. The first class includes ideal oscillating dynamic systems, which are understood as systems in which the source of oscillation excitation has a power that significantly exceeds the power consumed by the oscillating system. The second class consists of nonideal according to Sommerfeld (1902) and Kononenko (1964) systems or systems with limited excitation. In these systems, the power consumed by the oscillating load is comparable to the power of the excitation source. Consequently, the functioning of the energy source depends on the mode of the oscillating load, and the influence of the source cannot be expressed as a predetermined explicit function of time. In traditional mathematical modeling of an oscillating system, idealized excitation sources of unlimited power are often considered. However, this "ideal" approach is fundamentally incorrect in many cases, leading to significant errors in the description of the dynamics of both the oscillating system and the excitation source. In real systems, a mismatch between expected and actual behavior can lead to disaster.

The study of the system «LC-generator – piezoceramic transducer» was conducted by T. Krasnopolska, A. Shvets (1990-1993, 2007-2009), V. Pecherny, J. Baltazar, R. Brazil, J. Palacios Felix et al. (2007-2011). They developed a mathematical model for the non-ideal system and explored various aspects of it, including equilibrium positions, chaotic and hyperchaotic attractors. Their research revealed that the presence of deterministic chaos arises only when considering the nonlinear interaction between the generator and the transducer.

The works of J. Miles (1962, 1984) occupy a prominent place in the research on resonant oscillations of a spherical pendulum under ideal excitation. He studied the cases of forced and parametric resonances and established the possibility of the existence of chaotic regimes of oscillations, often referred to as "ideal" spherical pendulum oscillations. The studies by J. Miles were refined and continued in the works of T. Krasnopolska, A. Shvets, V. Pecherny, and others (1990-1994, 2007-2011). In these works, a mathematical model of the non-ideal system «spherical

pendulum – electric motor» was developed, taking into account the nonlinear interaction between the pendulum and the source of oscillation excitation. The latter is an electric motor with limited power. Furthermore, new types of chaotic attractors within the system were discovered, and a novel scenario for the transition to chaos, known as the «generalized intermittency», was described.

The thesis consists of the annotation in Ukrainian and in English, introduction, four sections of its main part, conclusions, the list of references, and appendix.

The introduction establishes the relevance of the research topic, outlines the goal, object, subject, tasks, and research methods. It highlights the scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the connection of the work with relevant scientific themes, and the applicant's personal contribution. Additionally, it specifies where the dissertation results have been discussed and published.

The first section provides a comprehensive overview of the evolution of research in nonlinear dynamics and the theory of dynamic systems. The current status of research on chaotic dynamics in oscillating systems with limited excitation is discussed. Essential theoretical insights and findings from earlier studies, which are utilized in the thesis, are presented.

The second section introduces fundamental concepts from the theory of dynamical systems. It explores general approaches and methods for investigating the chaotic dynamics of oscillating systems.

In the third section, a study of the «LC-generator – piezoceramic transducer» system is conducted. A map of dynamic regimes is built for the system, showing all possible types of limit sets that a four-dimensional system of differential equations can have. An atypical alternation between the Feigenbaum and Manneville-Pomeau scenarios during transitions from regular to chaotic attractors is observed. The parameter values for which two attractors coexist in the system have been determined. Projections of phase portraits, phase-parametric characteristics, and Poincaré sections are presented for the identified



attractors. For the first time, existing attractors are classified in terms of rare, hidden, and self-excited. The influence of delay on the aforementioned classification is analyzed.

In the fourth section, a study of the «spherical pendulum – electric motor» system is conducted. Both isolated and non-isolated equilibrium positions are revealed and analyzed for the system. Theorems regarding the stability of isolated equilibrium positions and the existence of a family of non-isolated equilibrium positions are proven. The study demonstrates that a non-isolated family of equilibrium positions can exhibit attractive properties. This observation led to the extension of the concept of an "attractor" for the discussed system, termed as a "maximal attractor". Various types of maximal attractors are discovered, including periodic and chaotic ones. Phase portraits, phase-parametric characteristics, and the distribution of the natural invariant measure are generated for the identified maximum attractors. Notably, it is revealed that even though maximal attractors do not adhere to the traditional sense of the term "attractor", their transition to chaos follows scenarios analogous to those seen in the transition to chaos of "classical" attractors.

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the dissertation results.

The main results that determine the scientific novelty of the thesis are as follows. For the «generator – piezoceramic transducer» system:

1. An atypical alternation of the Feigenbaum and Manneville-Pomeau scenarios during transitions from regular to chaotic regimes has been revealed.
2. The values of the parameters for which two attractors coexist in the system, with one attractor located in the area of localization of the other, have been found.
3. The coexistence of the following attractors has been established: quasi-periodic and periodic; periodic and periodic; chaotic and periodic.

4. The coexisting attractors of this system have been identified in accordance to «rare» and «hidden» classification.
5. The effect of delay on the classification of coexisting attractors in terms of «rare» and «hidden» has been analyzed.

For the «spherical pendulum – electric motor» system:

1. Isolated and non-isolated equilibrium positions have been revealed.
2. Regular and chaotic families of non-isolated limit sets with attractive properties have been discovered.
3. It has been shown that families of non-isolated limit sets with attractive properties are not attractors in the "classical" sense but correspond to the definition of a maximal attractor.
4. The scenarios of transition to chaos of maximal attractors have been found to follow similar patterns as the scenarios of transition to chaos observed for "classical" attractors.
5. The theorems regarding the stability of an isolated equilibrium position and the existence of a family of non-isolated equilibrium positions have been proven.

**Keywords:** system of differential equations, nonideal dynamical system, system with limited excitation, Sommerfeld–Kononenko effect, set of limit points, deterministic chaos, regular attractor, chaotic attractor, rare attractor, hidden attractor, maximal attractor, asymptotic solutions, steady-state regimes.

# ЗМІСТ

<b>Вступ</b>	<b>17</b>
<b>1. Напрямок детермінованого хаосу</b>	<b>25</b>
1.1. Розвиток нелінійної динаміки . . . . .	25
1.2. Розвиток теорії коливань систем з обмеженим збудженням . . . . .	31
<b>2. Основні поняття теорії динамічних систем</b>	<b>34</b>
2.1. Динамічна система . . . . .	34
2.2. Система звичайних диференціальних рівнянь як динамічна система	35
2.3. Перехідні та усталені процеси. Поняття хаотичного атрактора . . .	36
2.4. Типи стійкості траєкторій . . . . .	37
2.5. Теорема Ляпунова та ЛХП . . . . .	38
2.6. Дискретне відображення як динамічна система . . . . .	42
2.7. Фазо-параметрична характеристика . . . . .	43
2.8. Переріз та відображення Пуанкаре . . . . .	45
2.9. Приховані та рідкісні атрактори . . . . .	47
2.10. Максимальні атрактори . . . . .	48
2.11. Висновки за розділом . . . . .	49
<b>3. Система генератор – п'єзокерамічний випромінювач</b>	<b>50</b>
3.1. Математична модель та її положення рівноваги . . . . .	50
3.2. Карта динамічних режимів . . . . .	52
3.3. Ідентифікація типів атракторів системи . . . . .	56
3.4. Врахування запізнення . . . . .	73
3.5. Порівняння різних методів апроксимації запізнень . . . . .	74
3.6. Вплив запізнення на атрактори системи . . . . .	78
3.7. Висновки за розділом . . . . .	81
<b>4. Система сферичний маятник – електродвигун</b>	<b>82</b>

4.1. Математична модель . . . . .	82
4.2. Положення рівноваги . . . . .	86
4.3. Максимальні атрактори системи . . . . .	94
4.4. Сценарії переходу до хаосу максимальних атракторів . . . . .	98
4.5. Висновки за розділом . . . . .	106
<b>Висновки</b>	<b>107</b>
<b>Список використаних джерел</b>	<b>109</b>
<b>Додаток 1. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації</b>	<b>122</b>

## Вступ

Дисертація присвячена дослідженню поведінки двох динамічних систем: «ЛС-генератор – п'єзокерамічний випромінювач» та «сферичний маятник – електродвигун».

**Актуальність теми.** Маятник є провідним об'єктом вивчення ще з часів Г. Галілея і залишається таким дотепер. Безліч ефектів та явищ, що вперше були встановлені в маятникових системах, згодом були знайдені й у системах зовсім іншої природи. Маятникові системи є простими за своєю фізичною природою, що дозволяє проводити експериментальне підтвердження коливальних ефектів, які встановлені теоретично.

Одним із найдивовижніших відкриттів у маятникових системах стало відкриття можливості стабілізації верхнього, нестійкого, положення рівноваги. М. Боголюбов за допомогою методу усереднення теоретично довів можливість стабілізації верхнього положення рівноваги при високочастотних вертикальних коливаннях із малою амплітудою точки підвису. Аналогічні М. Боголюбову результати щодо стабілізації нестійкого положення рівноваги отримав і П. Капіца. Дослідження ефектів динамічної стабілізації маятників проводились В. Челомеем та знайшли широке застосування у вібраційній стабілізації ракет на стартових площадках.

У відносно нескладних нелінійних маятникових системах можливо спостерігати велике різноманіття можливих динамічних процесів. Протягом останніх десятиліть було зроблено суттєвий прогрес у розумінні природи цих процесів. З'ясувалось, що динаміки детермінованої (повністю визначеної) динамічної системи може мати непередбачувану (хаотичною), тобто мала зміна початкового стану призводить до зовсім іншого стану динамічної системи. Причому ця непередбачуваність є властивістю самої динамічної системи, а не результатом зовнішнього хаотичного впливу.

Надзвичайна розповсюдженість явищ детермінованого хаосу в оточу-

ючому нас світі привело до усвідомлення того, що математичне моделювання різних динамічних процесів і явищ неможливо без розуміння хаотичної динаміки. Бурхливий розвиток теорії динамічних систем, а саме теорії детермінованого хаосу, знаходить своє успішне застосування практично в усіх областях знань, замінивши лінійний підхід в прикладних задачах на нелінійні принципи. Суттєвий внесок у розвиток нелінійної динаміки та теорії динамічних систем внесли А. Андронов, В. Аніщенко, В. Арнольд, В. Астахов, А. Борисов, Б. Ван дер Поль, О. Вітт, М. Ено, Г. Заславський, Дж. Йорк, А. Кузнєцов, С. Кузнєцов, Л. Ландау, Е. Лоренц, Л. Мандельштам, Н. Магніцький, П. Манневілл, Ю. Неймарк, Е. Отто, І. Помо, Д. Рюель, А. Самойленко, Ф. Такенс, І. Тюкін, М. Фейгенбаум, С. Хайкін, Е. Хопф, Л. Чуа, О. Шарковський та інші.

Будь-яка коливальна система, незважаючи на величезну різноманітність таких систем, насправді, складається з двох основних елементів. Перший елемент – безпосередньо коливальна система, а другий – будь-яке джерело збудження коливань. Все різноманіття існуючих коливальних динамічних систем можна розділити на два класи. Ідеальні (за Зоммерфельдом-Кононенком) коливальні динамічні системи, що розуміються як системи в яких джерело збудження коливань має потужність, що значно перевищує потужність з якою коливальна система споживає енергію. У свою чергу, системи в яких потужність, споживана коливальним навантаженням є порівняною з потужністю джерела збудження зараз називають неідеальними за Зоммерфельдом [10–12] Кононенком [13], або системами з обмеженим збудженням. В останньому випадку робота джерела енергії залежить від режиму коливального навантаження, а вплив джерела не може бути виражено як заздалегідь визначену явну функцію часу. Тоді як при традиційному математичному моделюванні коливальної системи розглядаються ідеалізовані джерела збудження необмеженої потужності. У багатьох випадках "ідеальний" підхід у корені неправильний, що на практиці

призводить до значних помилок в описі динаміки як коливальної системи, так і джерела збудження.

Серед іншого, актуальність дослідження неідеальних динамічних систем також зумовлено розвитком сучасних енергоефективних та енергозберігаючих технологій, метою яких є мінімізація потужностей джерел збудження коливань. Це є неможливим без врахування неідеального підходу, тобто підходу де по потужність джерела збудження коливань порівняна з потужністю, яка споживається коливальним навантаженням. А в такому випадку принципово необхідно врахувати зворотній вплив коливального навантаження на джерело збудження коливань.

Вивченням системи «LC-генератор – п'єзокерамічний випромінювач» займались Т. Краснопольська, О. Швець, В. Печерний, Ж. Балтазар, Р. Бразіл, Дж. Паласіос Фелікс та ін. у роботах [14–20], у яких було виведено математичну модель неідеальної системи «LC-генератор – п'єзокерамічний випромінювач» та виявлено деякі усталені граничні множини. Зокрема, положення рівноваги, хаотичні та гіперхаотичні атрактори. Було встановлено, що існування детерміновано хаосу можливо лише при врахуванні нелінійної взаємодії генератора та випромінювача.

Чільне місце у дослідженнях резонанчних коливань сферичного маятника при ідеальному збудженні посідають роботи Дж. Майлза [21–23]. Ним були вивчені випадки вимушених та параметричних резонансів та встановлена можливість існування хаотичних режимів коливань "ідеального" сферичного маятника. Дослідження Дж. Майлза були уточнені й продовжені у роботах Т. Краснопольської, О. Швеця, В. Печерного та ін. у роботах [24–26]. У цих роботах було виведено математичну модель неідеальної системи «сферичний маятник – електродвигун», де було враховано нелінійну взаємодію між маятником та джерелом збудження його коливань - електродвигуном обмеженої потужності. Крім того, було виявлено нові типи хаотичних атракторів такої системи і описано новий сценарій переходу до хаосу, так звана,

узагальнена переміжність.

В останньому десятилітті інтенсивно почали досліджуватися нові типи як регулярних, так і хаотичних граничних множин динамічних систем. Почала створюватися нова понятійна база для опису таких граничних множин, зокрема атракторів. Так у роботах М. Закржевського та його учнів [27] були класифіковані так звані рідкісні атрактори і почалося систематичне дослідження таких атракторів. Подібні дослідження проводились у роботах А. Чуджика, Т. Капітаняка та ін. [28]. Ще одним новим науковим напрямком досліджень є вивчення прихованих атракторів та атракторів, що самозбуджуються. Класифікація таких атракторів запропонована у роботі Г. Леонова, М. Кузнецова та ін. [29]. Виявлення та класифікація таких атракторів є суттєвим для реальних динамічних систем, тому кількість публікацій за цим напрямком збільшилась за останній час. Зокрема, П. Рех вивчає приховані та самозбуджені атрактори в мультистабільній ривковій системі [30]. К. Ю, Г. Льв та Ї. Женґ вивчають рідкісні та приховані атрактори в періодично вимушеній системі Дуффінга з абсолютною нелінійністю [31]. Н. Ванґ, Д. Ксу, Н. Кузнецов та ін. знаходять приховані атрактори в системі Чуа [32].

Також у сучасних дослідженнях спостерігається невідповідність класичного терміну "атрактор" та притягувальних множин, що спостерігаються в системі. Це спонукає науковців шукати підходящу термінологію та математичний апарат для дослідження таких притягувальних множин динамічних систем. Серед інших, у деяких роботах використовують поняття максимального атрактора вперше запропонованого у роботі Дж. Мілнора для опису поведінки динамічних систем [33]. Зокрема, Ц. Юмінґ та С. Джінґпінґ використовують поняття максимального атрактора при дослідженні рівнянь Нав'є-Стокса для в'язкої та теплопровідної рідини, що може стискатись [34]. П. да Сілва та Ж. Болдріні вивчають максимальні атрактори для Оствальдівської моделі визрівання [35]. Я. Лі та Ї. Ма знайшли максимальні атрактори класичного розв'язку для рівняння реакційно-дифузійної моделі з дисперсією [36].



### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційну роботу виконано на кафедрі математичної фізики та диференціальних рівнянь Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» згідно із загальним планом роботи у рамках науково-дослідної теми «Хаос і солітони коливальних систем», державний реєстраційний номер 0117U 003172.

**Мета і завдання дослідження.** *Метою роботи є дослідження поведінки двох неідеальних динамічних систем, а саме системи «LC-генератор – п'єзокерамічний випромінювач» та системи «сферичний маятник – електродвигун».*

*Об'єктом дослідження є математичні моделі, що описують поведінку неідеальних динамічних систем «LC-генератор – п'єзокерамічний випромінювач» та «сферичний маятник – електродвигун».*

*Предметом дослідження виступають усталені режими (положення рівноваги, граничні цикли, квазіперіодичні режими, хаотичні та гіперхаотичні аттрактори) відповідних динамічних систем, а також інші граничні множини, що не є аттракторами.*

*Завдання дослідження:*

1. Розробити програмне забезпечення для комп'ютерного моделювання відповідних систем;
2. Дослідити систему «генератор – п'єзокерамічний випромінювач»:
  - (а) Проаналізувати положень рівноваги системи;
  - (б) Виявити та детально описати регулярні та хаотичні аттрактори;
  - (в) Розробити алгоритм пошуку рідкісних та прихованих аттракторів;
  - (г) Класифікувати аттрактори в термінах «рідкісні» та «приховані»;
  - (д) Дослідити вплив фактору запізнення на класифікацію в термінах «рідкісні» та «приховані».

### 3. Дослідити систему «сферичний маятник – електродвигун»:

- (а) Проаналізувати положень рівноваги системи;
- (б) Встановити існування максимальних атракторів у системі;
- (в) Дослідити сценарії переходу до хаосу для максимальних атракторів.

*Методи дослідження.* При проведенні дослідження використовувалися методи математичного та комп'ютерного моделювання динамічних систем, зокрема метод Рунге-Кутти зі змінним кроком чисельного інтегрування, алгоритм Бенеттіна-Гальяні, метод Ено, методи візуалізації розподілів природних інваріантних мір і карт динамічних режимів тощо.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Результати дисертації, що запропоновані до захисту, є новими та полягають у наступному: Для системи «генератор – п'єзокерамічний випромінювач»:

1. Виявлено нетипове чергування сценаріїв Фейгенбаума та Манневілья-Помо при переходах від регулярних режимів до хаотичних.
2. Знайдено значення параметрів за яких у системі співіснують два атрактори один із яких розташований в області локалізації іншого.
3. Встановлено співіснування таких усталених режимів: квазіперіодичний і періодичний; періодичний і періодичний; хаотичний і періодичний.
4. Проведено ідентифікацію співіснуючих атракторів цієї системи в термінах «рідкості» та «прихованості».
5. Проаналізовано вплив запізнення на класифікацію співіснуючих атракторів у термінах «рідкості» та «прихованості».

Для системи «сферичний маятник – електродвигун»:

1. Знайдено ізольовані та неізольовані положення рівноваги.

2. Знайдено регулярні та нерегулярні сімейства неізолюваних граничних множин, що володіють притягувальними властивостями.
3. Показано, що сімейства неізолюваних граничних множин, що володіють притягувальними властивостями, не є атракторами в "класичному" розумінні, але відповідають означенню максимального атрактора.
4. Встановлено, що сценарії переходу до хаосу максимальних атракторів відбувається за сценаріями, що є аналогічними до сценаріїв переходу до хаосу притаманним "класичним" атракторам.
5. Доведено теореми про стійкість ізолюваного положення рівноваги та існування сімейства неізолюваних положень рівноваги.

**Практичне значення одержаних результатів.** У реальних системах невідповідність очікуваної та реальної поведінки може призвести до катастрофи. А тому детальне вивчення поведінки системи є суттєвим для практичного застосування приладів, що використовують цю систему.

**Особистий внесок здобувача.** Визначення загального плану дисертації та постановка задач належать науковому керівнику доктору фізикоматематичних наук, професору О. Ю. Швецю. Основні наукові результати, які винесено на захист, отримано здобувачем особисто. Зі статей опублікованих у співавторстві, до дисертації включено лише ті результати, що належить дисертанту.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на

- [7] The 11th CHAOS 2018 International Conference. Рим, Італія. 5-8 червня 2018.
- [8] The 13th CHAOS 2020 International Conference. Флоренція, Італія. 9-12 червня 2020.

- [9] The 14th CHAOS 2021 International Conference. Афіни, Греція. 8-11 червня 2021.

**Публікації.** Основні результати дослідження опубліковано в 5 наукових працях. Три з них [2; 4; 5] входять до наукометричних баз Scopus, причому праці [2; 4] належать квартілю Q3. Праці [1; 3] є науковими фаховими виданнями України.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел, додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи складає 124 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел налічує 97 найменувань. Дисертація містить 34 рисунки та 1 таблицю.

# 1. Напрямок детермінованого хаосу

## 1.1. Розвиток нелінійної динаміки

Задачі опису явищ, що змінюються з часом, відомі ще з часів Ньютона. Власне сам Ньютон досліджував явища, які можна відтворити експериментально, за допомогою математичних моделей. Розвиток ідей, що стан системи однозначно визначається у будь-який момент часу на підставі початкових даних призвів до появи напрямку теорії динамічних систем.

Цей математичний апарат виявився успішним для опису багатьох реальних систем. І найбільший його успіх припав на першу половину XX століття, коли була описана теорія коливання двовимірних систем. Подальші були спрямовані на опис багатовимірних динамічних систем, проте до другої половини XX століття було не зрозуміло на скільки складними можуть бути поведінки таких динамічних систем.

Вперше зі складної поведінкою динамічних систем зустрівся Бальтазар Ван дер Поль під час дослідження коливання електролампових генераторів [37; 38]. Досліджуючи такі генератори, він регулював їх поведінку на підставі звуку в навушниках. Під час одного з експериментів, при переході між періодичними коливаннями, він помітив нерегулярні шумоподібні коливання. Вважається, що це було перше спостереження хаосу. Роботу Ван дер Поля продовжили М. Картрайт та Д. Літвуд [39] та встановили виключну складність досліджуваної системи. Більш того, вони встановили існування нескінченної кількості нестійких періодичних траєкторій.

Взагалі, першою сформульованою задачею зі складною динамікою та можливістю виникнення хаосу була, напевно, ще задача трьох тіл сформульована ще Ньютоном. Але, вперше можливу складність вказаної задачі механіки усвідомив видатний французький математик Анрі Пуанкаре [40]. Серед іншого, він описав так звану гомоклінічну траєкторію, яка стала предме-

том ретельних досліджень 60-ти років потому.

Варто відмітити школу Л. Мандельштама, яка охоплювала питання радіофізики, оптики та коливальних процесів різної природи. Вважається, що очільник школи став першим, хто прийшов до напрямку теорії нелінійних коливань. До того часу вважалось, що нелінійні явища мають досліджуватись для кожної системи окремо. В середині 30-х ХХ століття учень Л. Мандельштама, А. Андронов встановив виникнення автоколивань при зміні параметрів, результат, який зараз називають біфуркацією Андронова-Хопфа. Трохи згодом, виходить книга А. Андронова, С. Вітта та Е. Хайкіна «Теорія коливань» (1937), де були розвинуті методи А. Пуанкаре та М. Ляпунова для дослідження прикладних динамічних систем зі складними коливаннями. Фактично в цій книзі вперше були застосовані методи якісної теорії диференціальних рівнянь для дослідження складних інженерних проблем. На жаль один з авторів книги був репресований і ця видатна наукова робота більш ніж на двадцять років була виключена зі світового наукового процесу. У бібліографічному списку наведена книга [41] – одне з перевидань оригіналу 1937 року.

Складна поведінка динамічних систем спостерігалась і в гідродинамічних системах при дослідженнях проблем турбулентності. Однією з перших робіт цього напрямку це робота О. Рейнольдса [42], де, при дослідженні динаміки в'язкої рідини в трубці за допомогою рівнянь Нав'є-Стокса, Рейнольдс встановив, що турбулентність чи ламінарність руху рідини в трубці залежить від деякого безрозмірного параметра, який зараз називають числом Рейнольдса.

Однією з визначних подій у розвитку детермінованого хаосу, та нелінійної динаміки загалом, стала публікація Едварда Лоренца [43], в якій за допомогою чисельного інтегрування аналізувалась поведінка трьохвимірної динамічної системи, що описувала динаміку рідини при конвекції в підігрітому знизу шарі. Вперше було встановлено ключовий факт хаотичної

динаміки, що мала зміна в початкових даних може призвести до кардинально іншої поведінки динамічної системи. Пізніше, цю властивість хаотичної динаміки він назвав «ефектом метелика». Своє відкриття Лоренц ілюстрував за допомогою метелика, який змахом крила в Бразилії, міг спричинити ланцюг кліматичних змін, що зрештою спричинить ураган у Техасі. На жаль, праця Лоренца, що була висвітлена в метеорологічному журналі, не була помічена своєчасно.

Початок 70-их років став поворотним: кількість публікацій з хаотичної динаміки різко зросла. Окремою увагою варто відзначити роботу Д. Рюеля та Ф. Такенса [44], в якій вони вперше запропонували термін "дивний атрактор", що наразі є широко вживаним.

Наступними ключовими подіями є дослідження сценаріїв переходу до хаосу. Зокрема, відкриття М. Фейгенбаума, де автор досліджував однопараметричні відображення одиничного відрізка в себе аби зрозуміти як відбувається перехід від регулярних динамік до хаотичних [45; 46]. Він помітив, що при збільшенні значення параметра відбувається біфуркація і стійка періодична траєкторія стає нестійкою, а на її місці народжується стійка періодична траєкторія вдвічі більшого періоду. Продовжуючи збільшувати значення параметру, ця ситуація повторюється й існуючий стійкий цикл з подвоєнним періодом знову стає нестійким, а на його з'являється нова періодична траєкторія, період якої знову вдвічі перевищує зниклий. Цей ланцюг біфуркацій продовжується аж до появи в системі циклу "нескінченного періоду", що, власне, є хаотичним атрактором. Описана ситуація і є сценарієм переходу до хаосу, який носить назву сценарія каскаду біфуркацій подвоєння періоду, або сценарія Фейгенбаума за ім'ям відкривача.

Варто відмітити, що наведений вище результат вкладається в теорему українського математика Шарковського про неперервні відображення одиничного відрізка в себе [47], яка була однією з перших загальних результатів теорії динамічних систем.

Іншим важливим сценарієм переходу від регулярної до хаотичної поведінки в динамічних системах є сценарій переміжності, який досліджували французькі вчені П. Манневілль та І. Помо [48; 49]. У своїх роботах вони описали кілька можливих сценаріїв переходу до хаосу, але ключовою особливістю всіх було те, що перехід відбувався лише за одну біфуркацію. Крім того, новоутворена хаотична траєкторія завжди складалась з двох фаз – ламінарної та турбулентної. Під час ламінарної фази, траєкторія здійснює рухи в околі атрактора, що існував до біфуркації. Під час турбулентної фази, траєкторія зривається з околу зниклого атрактора та рухається у віддалені області фазового простору. Це чергування фаз відбувається нескінченну кількість разів і, загалом, ламінарна фаза триває помітно довше. Але тривалість фаз, рівно як і моменти часів зміни фаз є непередбачуваними.

Ще одним внеском українських учених, а саме Т. Краснопольської та О. Швеця, є відкриття ще одного сценарію узагальненої переміжності [50; 51] типу "хаос-хаос". Цей сценарій реалізується за одну біфуркацію, і на місці зниклого хаотичного атрактора з'являється хаотичний атрактор нового типу. Перехід за цим сценарієм супроводжується двома фазами руху новоутвореної хаотичної траєкторії: грубо-ламінарної та турбулентної. Під час грубо-ламінарної фази, траєкторія здійснює рухи в околі зниклого хаотичного атрактора. Під час турбулентної фази, траєкторія зривається з околу зниклого атрактора та рухається у віддалені області фазового простору. Це чергування фаз відбувається нескінченну кількість разів і, загалом, ламінарна фаза триває помітно довше. Але тривалість фаз, рівно як і моменти часів зміни фаз є непередбачуваними.

Останніми роками в роботах О. Швеця та В. Сіренка [52–55] був встановлений ряд нових сценаріїв переходу до хаосу. Всі ці сценарії є подальшими узагальненнями класичних сценаріїв Фейгенбаума й Манневілля-Помо.

Крім зазначених сценаріїв існують ще ряд інших, зокрема перехід через руйнування квазіперіодичних атракторів у роботах Л. Ландау та Е. Хопфа



[56; 57], біфуркації Афраймовича-Неймарка [58; 59] тощо.

Відомо, що дивні (хаотичні) атрактори можуть існувати лише в нелінійних математичних моделях. Останні, в переважній більшості, не можуть бути розв'язані аналітично. Тому важливого значення набула розробка чисельних методів та алгоритмів для дослідження хаосу. Зокрема, велике застосування в ідентифікаціях траєкторій та хаосу знайшли спектри ляпуновських характеристичних показників (ЛХП), які було введено А. Ляпуновим [60]. А після теореми про ергодичність І. Оселедця [61] стало зрозумілим, що спектри ЛХП це властивість не окремої траєкторії на атракторі, а всього атрактора. Тому важливим є чисельний алгоритм для обрахунку спектру ляпуновських характеристичних показників, який було запропоновано у роботах Г. Бенеттіна та ін. [62–64], завдяки чому спектри ЛХП почали використовувати як основний критерій хаотичності та ряду інших характеристик поведінки динамічних систем.

Проте іншим, напевно, ключовим напрямком дослідження чисельних методів нелінійної динаміки є сімейство методів Рунге-Кутти. Зокрема, дуже ефективним є модифікація методу чисельного інтегрування, що включає корекцію кроку інтегрування, яку розробили Ж. Дорман та П. Прінс [65–68]. Серед інших видатних досягнень чисельних методів, варто також згадати про метод М. Ено для побудови перетинів і відображень Пуанкаре [69].

Останні роки вчені переважно досліджували поведінку положень рівноваги та поведінку їх околу, що залишало переважну більшість областей фазового простору недослідженою. У реальних динамічних системах це може призвести до катастрофічних наслідків. Тому природньо виникають класифікації атракторів аби окреслити як вірогідно можна зустріти той чи інший атрактор. Зокрема, класифікація на приховані та ті, що самозбуджуються у роботі Г. Леонова, М. Кузнєцова та ін. [29]; класифікація на рідкісні у роботах М. Закржевського та ін. [27], А. Чуджика, Т. Капітаняка та ін. [28]. Виявлення та класифікація таких атракторів є суттєвим для реальних ди-

намічних систем тому кількість публікацій за цим напрямком збільшилась за останній час. Зокрема, П. Рех вивчає приховані та самозбуджені атрактори в мультистабільній ривковій системі [30]. К. Ю, Г. Ль та Ї. Женґ вивчають рідкісні та приховані атрактори в періодично вимушеній системі Дуффінга з абсолютною нелінійністю [31]. Н. Ванґ, Д. Ксу, Н. Кузнецов та ін. знаходять приховані атрактори в системі Чуа [32].

Також у сучасних дослідженнях спостерігається невідповідність класичного терміну "атрактор" та притягувальних множин, що спостерігаються в системі. Це спонукає науковців шукати підходящу термінологію та математичний апарат для дослідження таких притягувальних множин динамічних систем. Серед інших, у деяких роботах використовують поняття максимального атрактора вперше запропонованого у роботі Дж. Мілнора для опису поведінки динамічних систем [33]. Зокрема, Ц. Юмінґ та С. Джінґпінґ використовують поняття максимального атрактора при дослідженні рівнянь Нав'є-Стокса для в'язкої та теплопровідної рідини, що може стискатись [34]. П. да Сілва та Ж. Болдріні вивчають максимальні атрактори для Оствальдівської моделі визрівання [35]. Я. Лі та Ї. Ма знайшли максимальні атрактори класичного розв'язку для рівняння реакційно-дифузійної моделі з дисперсією [36].

Кількість публікацій з детермінованого хаосу зростають починаючи з 70-их років минулого століття і по сьогоднішній день. Дослідження доводять, що хаос не є екзотикою, а навпаки він є більш природнім, ніж будь-який інший тип поведінки динамічних систем. Хаос спостерігається у багатьох динамічних системах, зокрема механіці, біології, хімії, економіці тощо. Це робить теорію динамічних систем та детермінованого хаосу міждисциплінарною, яка стає провідним напрямком сучасної науки.

## 1.2. Розвиток теорії коливань систем з обмеженим збудженням

Першими роботами, що заклали фундамент теорії коливань систем з обмеженим збудженням можна вважати роботи німецького фізика Арнольда Зоммерфельда [10–12]. Він досліджував умови появи резонансних коливань фундаментів збуджених малопотужними електродвигунами, а також керуваність функціонування цих двигунів. Зоммерфельд експериментально довів ефект впливу не тільки електродвигуна (джерела збудження) на фундамент (коливальну систему), а й вплив коливальної системи на джерело збудження. Причиною цього феномену була в тому, що коливальна система споживала енергію на своєму внутрішньому демпфуванні, а двигун витрачав  $2/3$  потужності на підтримку резонансних коливань високої амплітуди.

Пізніше, цей експеримент повторив С. Тимошенко [70]. Він використовував невеликий електродвигун, що був закріплений на гнучкій балці на двох опорах. Під час резонансу спостерігались коливання балки з сильним згинанням. Запобігаючи цим коливанням, скажімо за допомогою фізичної сили людини, кількість обертів у генератора стрімко зростала. Тимошенко назвав цей феномен взаємодії коливальної системи та двигуна ефектом Зоммерфельда.

У роботі І. Рокара вперше було встановлено існування нестійких установлених динамічних режимів взаємодії електродвигуна та коливальної системи [71]. Він розглядав сукупну систему: електродвигун, що обертає деяку масу та коливальна підсистема.

І. Блехманом досліджувалось питання самосинхронізації вібраційних машин [72]. Він розглядав вібраційні машини з невірноваженими масами обертання. За допомогою коливань фундаменту може здійснюватись процес синхронізації окремих, не пов'язаних між собою, роторних вібротомашин. Тобто, фундамент є істотним фактором в питаннях самосинхронізації. Задачі,

що розглядав Блехман, є не що іншим як задачами взаємодії вібротомашин та коливань фундаменту. Блехманом було отримано рівняння, що описують процес взаємодії валів електродвигунів та коливань фундаменту, і знайдено розв'язок для випадків і резонансної і нерезонансної взаємодії, а також отримано умови їх стійкості. Крім того, Блехман отримав аналітичне співвідношення, що описує взаємозв'язок потужності двигуна та потужністю, яку споживають коливання фундаменту. Це дозволило пояснити ефект Зоммерфельда.

Згодом, після виходу праці Віктора Кононенка [13], теорія коливань систем з обмеженим збудженням сформулась в окремий напрямок. У своїй роботі, Кононенко розробив методологію розв'язку задач взаємодії джерел збудження та коливальних систем, ввів основні означення та термінологію. Він розглядав системи у яких джерело збудження мало порівняну потужність до коливальної системи. Такі системи було названо системами з обмеженим збудженням, а джерело їх збудження – неідеальним джерелом збудження. В серіях своїх робіт, Кононенко побудував теорію взаємодії джерел збудження та коливальних систем різного типу (лінійних, нелінійних, параметричних, автоколивальних), більш того теоретично та аналітично обґрунтував ефект Зоммерфельда [13; 73; 74].

У сучасній науці випадок взаємодії джерела збудження та коливальної системи, а також випадок коли потужність джерела збудження є порівняною з потужністю коливальної системи, називають неідеальними за Зоммерфельдом-Кононенком системами. Джерело збудження називається ідеальним, якщо воно не зазнає впливу від коливальної системи. В реальних динамічних системах, це можуть бути випадки, коли вплив коливальної системи на джерело збудження є незначним, або мають місце додаткові пристрої, що компенсують цей вплив. Джерело збудження називається неідеальним, якщо воно зазнає впливу від коливальної системи, тобто коли потужність джерела збудження є співставною до потужності, що споживає

коливальна система.

У дослідженнях коливальних динамічних систем типу «джерело збудження – коливальна система» набуває розвитку напрямок дослідження установлених хаотичних режимів. Вперше, новий клас хаотичних режимів знайшли українські вчені Т. Краснопольська та О. Швець у роботі [75]. Далі, в низці своїх робіт [15–17; 24; 76–79], вони встановили існування детермінованого хаосу в коливальних, електропружних та гідродинамічних системах. В цих роботах показано, що основною причиною виникнення хаотичних режимів є зворотній вплив коливальної підсистеми на джерело збудження коливань.

Також, увагу бразильських учених Дж. Балтазар, І. Калдас, Р. Вівна та ін привернула поведінка неідеальних динамічних систем. У своїх роботах [80–85], вони вивчають специфіку хаотичних коливань, а також можливість керування хаосом у таких системах.

Серед інших напрямків вивчення неідеальних динамічних систем варто відзначити дослідження резонансів та нормальних мод, якими займається інший український вчений Ю. Міхлін [86; 87]. Оберненою задачею, тобто пошуком динамічної системи, яка має наперед задачу граничну множину, займається В. Городецький [88].

Отже, поведінка неідеальних динамічних систем цікавить людство як із практичної точки зору, так і з наукової. Але, чимало питань щодо цих систем залишається відкритим.

## 2. Основні поняття теорії динамічних систем

### 2.1. Динамічна система

**Означення 1.** Динамічною системою називається об'єкт, що складається з трьох компонентів:

- 1) Метричного простору  $(\mathbb{D}, \rho)$ , який називається фазовим простором. Зокрема, фазовий простір може збігатись із усім  $n$ -вимірним евклідовим простором  $\mathbb{R}^n$ ;
- 2) часу  $t \in \mathbb{T}$ , який може бути неперервним ( $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ), або дискретним ( $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ );
- 3) закону (оператора) еволюції  $\varphi : \mathbb{T} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , який задовольняє такі теоретико-групові властивості:
  - а)  $\varphi(0, x) = x$ ;
  - б)  $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$ ;
  - в)  $\varphi(t, x)$  неперервне за  $(t, x)$ .

**Означення 2.** Для початкової точки  $x_0 \in D$ , множина

$$\mathcal{K}(x_0) := \{x \in \mathbb{D} \mid \exists (\{t_n\} \subset \mathbb{T}) : t_n \rightarrow \infty \wedge \varphi(t_n, x_0) \rightarrow x\}$$

називається граничною множиною.

**Означення 3.** Гранична множина  $\mathcal{A} \subset \mathbb{D}$  називається аттрактором, якщо

$$\exists (\mathcal{B} : \mathcal{B} \supset \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \text{ відкрита множина}) : \forall (x \in \mathcal{B}) \implies \mathcal{K}(x) = \mathcal{A}.$$

Множина  $\mathcal{B}$  називається басейном притягання атрактора  $\mathcal{A}$ .

**Означення 4.** Гранична множина  $V \subset \mathbb{D}$  називається репелером, якщо

$$\forall (\mathcal{B} : \mathcal{B} \supset V \wedge \mathcal{B} \text{ відкрита множина}) \implies (\forall (x_0 \in \mathcal{B} \setminus V) \implies \mathcal{K}(x_0) \neq V).$$

**Означення 5.** Відображенням множини  $V \subset \mathbb{D}$  у момент часу  $t \in \mathbb{T}$  називається сукупність точок фазового простору

$$\varphi(t, V) := \{\varphi(t, x) \mid x \in V\}.$$

**Означення 6.** Динамічна система називається дисипативною, якщо

$$\forall (V \subset \mathbb{D} : \mu(V) < \infty) \implies \mu(\varphi(t, V)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

де  $\mu$  – міра над простором  $D$ .

**Зауваження 1.** У загальній теорії динамічних систем встановлено, що аттрактори існують тільки у дисипативних системах.

## 2.2. Система звичайних диференціальних рівнянь як динамічна система

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -ого порядку в нормальному вигляді:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор невідомих функцій;  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$  – неперервно диференційовна вектор-функція  $n$ -змінних.

Припустимо, що будь-який розв'язок  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  рівняння (2.1), такий що  $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \in U$ , існує при всіх  $t \in [0, +\infty)$ , є єдиним і не залишає множини  $U$ . В такому випадку відображення  $\varphi : [0, +\infty) \times U \rightarrow U$ , таке що

$$\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0),$$

задає динамічну систему з метрикою

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

де  $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  – евклідова норма.

Розглядаючи систему диференціальних рівнянь, під мірою будь-якої множини будемо розуміти її фазовий об'єм.

## 2.3. Перехідні та усталені процеси. Поняття хаотичного атрактора

Рух у дисипативних системах доцільно розділити на два класи: клас перехідних, нестационарних рухів, які відповідають процесу переходу від початкових станів до граничних множин (атракторів), і клас усталених, стационарних рухів, фазові траєкторії яких вже належать граничним множинам (атракторам).

У загальній теорії динамічних систем встановлено, що дисипативна динамічна система може мати наступні типи атракторів [59; 89; 90]:

1. положення рівноваги (точки у фазовому просторі);
2. граничні цикли (замкнені лінії у фазовому просторі);
3. квазіперіодичні атрактори (тороїдальні поверхні у фазовому просторі).

Вищеперераховані атрактори називаються регулярними. Їм відповідають повністю передбачувані у часі рухи дисипативних динамічних систем.

Існують також і інші типи атракторів крім регулярних. Виявилося, що рух траєкторій, що прямують до таких граничних множин є зовсім непередбачуваним (хаотичним). Причому важливо, що ця непередбачуваність пояснюється властивостями самої динамічної системи, а не будь-яким зовнішнім впливом. Однак, при всій своїй непередбачуваності, такі рухи мають ряд чітких кількісних і якісних закономірностей, що суттєво відрізняє їх від класичних стационарних випадкових процесів. Тому для позначення таких типів рухів динамічних систем став уживатися парадоксальний термін «детермінований хаос». У свою чергу, для рухів, що описуються регулярними аттракторами став уживатися термін «порядок».



Математичним образом детермінованого хаосу у фазовому просторі є складним чином улаштовані притягувальні множини, фазові траєкторії яких не належать до жодного типу регулярних атракторів. Фазові траєкторії представляються у вигляді нескінченної лінії, яка ніде не перетинається, не залишає при  $t \rightarrow +\infty$  замкненої області й не притягається до регулярних атракторів. Зображуюча точка траєкторії час від часу повертається в окіл довільно обраного на траєкторії початкового стану, однак ці повернення непередбачувані і мають вигляд випадкової послідовності. Такі атрактори називаються хаотичними (дивними).

**Зауваження 2.** Було зазначено, що атрактори існують тільки у дисипативних динамічних системах, але обернене не є вірним, тобто не в кожній дисипативній системі існує атрактор і це демонструє наступний приклад:

$$\dot{x} = \frac{1}{x}.$$

Для будь-якої початкової умови  $x_0$ , що належить  $(0, +\infty)$ , розв'язок  $x(t, x_0)$  існує, є єдиним і визначеним при  $t \in [0, +\infty)$ . Зокрема,

$$x(t, x_0) = \sqrt{x_0^2 + 2t}.$$

1. Покажемо, що ця система є дисипативною:  $\forall \{x_0, x'_0\} \subset (0, +\infty)$ , маємо

$$|x(t, x_0) - x(t, x'_0)| = \left| \sqrt{x_0^2 + 2t} - \sqrt{x_0'^2 + 2t} \right| = \frac{|x_0 - x'_0|}{\sqrt{x_0^2 + 2t} + \sqrt{x_0'^2 + 2t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

2. У цій системі немає жодного атрактора, тому що немає жодної граничної множини.

## 2.4. Типи стійкості траєкторій

**Означення 7.** Розв'язок  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  системи диференціальних рівнянь (2.1) називається стійким за Лагранжем, якщо

$$\exists(M > 0) \forall(t \geq 0) : \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| < M.$$

Тобто траєкторія  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  увесь час знаходиться в обмеженій області фазового простору.

**Означення 8.** Траєкторія  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  називається *стійкою за Ляпуновим*, якщо

$$\forall(\varepsilon > 0) \exists(\delta > 0) \forall(\mathbf{x}'_0 : \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0\| < \delta) \implies \forall(t > 0) : \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}'_0)\| < \varepsilon.$$

Геометрично це означає, що два близькі у початковий момент часу розв'язки назавжди залишаються близькими.

Встановлено, що кожна траєкторія, яка належить одному з регулярних атракторів (положення рівноваги, граничні цикли й квазіперіодичні аттрактори), є стійкою за Ляпуновим. У свою чергу, всі хаотичні аттрактори динамічних систем є нестійкими за Ляпуновим.

**Означення 9.** Траєкторія  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  називається *асимптотично стійкою*, якщо

$$\exists(\delta > 0) \forall(\mathbf{x}'_0 : \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0\| < \delta) \implies \left( \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}'_0)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \right).$$

Надалі будемо припускати, що система диференціальних рівнянь (2.1) є дисипативною, а кожна розглянута траєкторія є стійкою за Лагранжем.

## 2.5. Теорема Ляпунова та ЛХП

Розглянемо динамічну систему у вигляді системи диференціальних рівнянь (2.1). Нехай  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  – деякий розв'язок цієї системи, який ми будемо називати незбуреним.

Збуреним ми будемо називати розв'язок системи (2.1)  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$ , де  $\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| < \varepsilon$ .

За даних позначень еволюція збурення  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  у лінійному наближенні описується рівнянням першого наближення:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = F(t)\tilde{\mathbf{x}}, \tag{2.2}$$

де матриця коефіцієнтів  $F(t)$  визначається наступним чином:

$$F(t) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_n} \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)}$$

Для системи (2.2) є вірною наступна теорема [59; 60; 89; 90]:

**Теорема** (Ляпунова). *Нехай існує така константа  $M$ , що для всіх елементів  $F_{ij}$  матриці  $F$  і для довільного  $T$ ,*

$$\frac{1}{T} \int_0^T |F_{ij}(t)| dt \leq M,$$

*тоді*

1. *Для будь-якого нетривіального розв'язку  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  рівняння (2.2) існує ляпуновський характеристичний показник - дійсне число, відмінне від  $\pm\infty$ , яке визначається за формулою:*

$$\lambda_{\tilde{\mathbf{x}}(t)} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}(T)\|; \quad (2.3)$$

2. *При множенні розв'язку на константу  $C$ , що не дорівнює нулю, ляпуновський характеристичний показник не змінюється*

$$\lambda_{C\tilde{\mathbf{x}}(t)} = \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}(t)}; \quad (2.4)$$

3. *Ляпуновський характеристичний показник лінійної комбінації двох розв'язків не перевищує більшого з показників цих розв'язків*

$$\lambda_{C_1\tilde{\mathbf{x}}_1(t)+C_2\tilde{\mathbf{x}}_2(t)} \leq \max(\lambda_{\mathbf{x}_1(t)}, \lambda_{\mathbf{x}_2(t)}); \quad (2.5)$$

4. Існує  $n$  лінійно незалежних розв'язків  $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$  (фундаментальна система розв'язків) рівняння (2.2), яким відповідає  $n$  ляпуновських характеристичних показників, які нумеруються в порядку спадання  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

Набір чисел  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  називається спектром ляпуновських характеристичних показників (ЛХП). Найбільше із цих чисел  $\lambda_1$  називається старшим ляпуновським показником. Спектр ЛХП слід розглядати як характеристику лінійної системи рівнянь (2.2) у цілому, а не якого-небудь одного розв'язку  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ , оскільки розв'язок не залежить від вибору фундаментальної системи  $\{\tilde{\mathbf{x}}_i(t)\}$ . А тому з (2.4), (2.5) слідує, що для будь-якого розв'язку  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  ляпуновським характеристичним показником обов'язково буде одне з чисел  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

**Зауваження 3.** Отже, кожному розв'язку  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  вихідної системи (2.1) рівняння першого наближення (2.2) ставить у відповідність повністю визначений спектр ЛХП.

Для траєкторії  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  присутність в її спектрі ЛХП числа  $\lambda_i$  має такий геометричний сенс: існує така збурена траєкторія  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}'_0)$ , що

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0\| < \varepsilon,$$

а еволюція збурення, у лінійному наближенні, описується як

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}'_0)\| \sim \varepsilon \cdot e^{\lambda_i t}.$$

Таким чином, присутність в спектрі хоча б одного додатного показника означає нестійкість за Ляпуновим розглянутої траєкторії, тобто дві близькі траєкторії будуть з часом віддалятися одна від одної, незважаючи на те, як близько вони були в початковий момент часу. Проте, вони не можуть необмежено віддалятися одна від одної, оскільки вони є стійкими за Лагранжем, зокрема, після проходження деякого часу  $t^*$ , який буде означати завершення

перехідних процесів, для  $t > t^*$  буде вірною наступна оцінка:

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}'_0)\| \leq \text{diam}(\mathcal{A}),$$

де  $\mathcal{A}$  – аттрактор, до якого вони прямують;  $\text{diam}(\mathcal{A}) := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – діаметр множини  $\mathcal{A}$ .

Випадок, коли всі показники від'ємні, свідчить про асимптотичну стійкість траєкторії.

Кожний розв'язок  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  рівняння (2.1) має цілком визначений спектр ЛХП, а тому і аттракторам, що складаються тільки з однієї траєкторії (положення рівноваги та граничні цикли), можна приписати цей же спектр ЛХП. Якщо ж аттрактор складається з множини траєкторій (інваріантний тор або хаотичний аттрактор), то виникає питання, чи можна приписати усьому аттрактору спектр деякої однієї траєкторії цього аттрактора. Відповідь на це запитання дає теорема В. Оселедця [61], яка стверджує, що типова, взята навмання, траєкторія на аттракторі, з одиничною ймовірністю буде мати цілком визначений спектр ЛХП, який можна приписати усьому аттрактору.

Спектр ЛХП аттрактора дисипативної динамічної системи повинен задовольняти наступним умовам:

1. Сума всіх  $n$  показників повинна бути від'ємною:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k < 0.$$

Це умова дисипативності, завдяки якій аттрактор є притягувальною граничною множиною нульової міри у фазовому просторі;

2. У будь-якого аттрактора, крім положення рівноваги, необхідним чином повинен бути присутній у спектрі хоча б один нульовий показник.

Справді, нехай траєкторія  $\mathbf{x}(t)$  знаходиться на аттракторі, який не є положенням рівноваги. Розглянемо іншу траєкторію  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t + \Delta t)$ , де часовий зсув  $\Delta t$  є малим. Зрозуміло, що обидві зображуючі точки належать

одному атрактору, оскільки відрізняються тільки часовим зсувом, а тому

$$\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) \approx \dot{\mathbf{x}}(t)\Delta t = f(\mathbf{x})\Delta t.$$

Оскільки кожна розглянута траєкторія рівняння (2.1) є стійкою за Лагранжем, то знайдеться таке число  $M > 0$ , що  $\|f(\mathbf{x})\| < M$ , а тому  $\|f(\mathbf{x})\Delta t\| < M|\Delta t|$ . Таким чином, ляпуновський характеристичний показник для такого збурення дорівнює:

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \ln \|\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t)\| = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \ln M|\Delta t| = 0.$$

Нехай маємо визначений спектр ЛХП, тоді будемо позначати додатний показник знаком  $'+''$ , від'ємний – знаком  $'-'$ , а нульовий – знаком  $'0'$ . Таким чином атрактору динамічної системи у фазовому просторі розмірності  $n$  буде відповідати набір з  $n$  знаків, який ми будемо називати сигнатурою спектра ЛХП.

## 2.6. Дискретне відображення як динамічна система

Розглянемо дискретне відображення:

$$\mathbf{x}_{k+1} = g(\mathbf{x}_k), \quad g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U, \quad (2.6)$$

де  $\{\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})\}_{k=0}^{\infty}$  – послідовність точок фазового простору;  $g(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x}))$  – неперервна вектор-функція  $n$ -змінних.

Нехай послідовність точок  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$  є розв'язком дискретного рівняння (2.6), тоді, за даних припущень, відображення  $\varphi : \mathbb{N}_0 \times U \rightarrow U$ , таке що

$$\varphi(k, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_k,$$

задає динамічну систему з метрикою

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

де  $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  - евклідова норма;  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  - множина цілих невід'ємних чисел.

Під мірою будь-якої множини у фазовому просторі будемо розуміти її фазовий об'єм.

Як і у випадку системи диференціальних рівнянь, для дискретного відображення можна ввести аналогічні поняття спектру ЛХП, стійкості за Ляпуновим, стійкості за Лагранжем та інші. Проте, нас буде цікавити наочний спосіб візуалізації динамічних режимів, притаманний дискретним відображенням, оскільки він є корисним і для дослідження поведінки систем диференціальних рівнянь.

## 2.7. Фазо-параметрична характеристика

Роглянемо дискретне відображення:

$$\mathbf{x}_{k+1} = g(\mathbf{x}_k, \alpha), \quad (2.7)$$

де  $\alpha$  - деякий параметр.

Припустимо, що для параметра  $\alpha$  із деякого інтервалу в системі (2.7) існує аттрактор. Виберемо координату, на яку будемо робити проєкцію (наприклад першу координату, тобто  $x_1$ ). Тоді фазо-параметричною характеристикою (або біфуркаційним деревом) ми будемо називати координатну площину  $(\alpha, x_1)$ , де на осі абсцис відкладено деякий інтервал значень параметра  $\alpha$ , а на осі ординат – проєкцію точок граничної множини. Таким чином, ми можемо прослідкувати за біфуркаціями, що відбуваються з граничними множинами, тобто за якісними змінами поведінки динамічної системи.

Для прикладу роглянемо одновимірне дискретне відображення:

$$x_{k+1} = 1 - \alpha x_k^2, \quad (2.8)$$

де  $\alpha$  – параметр.

Відображення (2.8) носить назву логістичного відображення [45]. На рис. 2.1 зображена його фазо-параметрична характеристика, тобто площина  $(\alpha, x)$ , де в залежності від значення параметра  $\alpha$  зображено точки, що належать аттрактору.

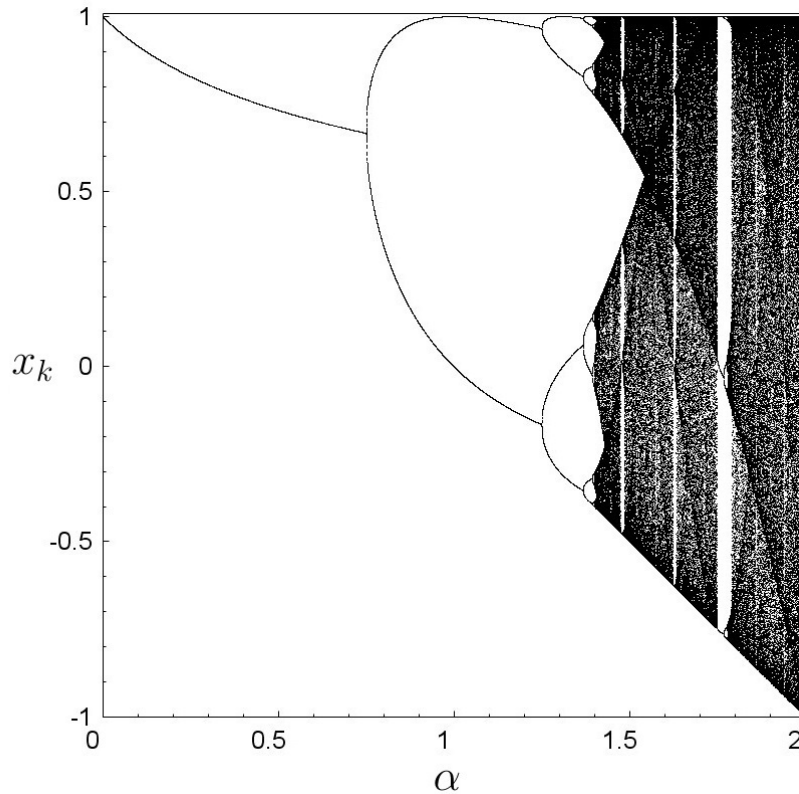


Рис. 2.1: Фазо-параметрична характеристика логістичного відображення.

Відомо, що в системі (2.8) існують граничні цикли будь-яких періодів. Зокрема, цикл періоду 1 (або положення рівноваги) можна спостерігати на рис. 2.1 при  $\alpha \in (0; 0.75)$ ; цикл періоду два – при  $\alpha \in (0.75; 1.25)$  [45].

Також у цьому дискретному відображенні присутній хаотичний аттрактор, який можна спостерігати, наприклад, при  $\alpha = 2$  [45].

Зауважимо, що кількість точок у випадку граничного циклу є скінченною і, до того ж, кожна точка повторюється строго через період. Кількість точок хаотичного аттрактора, у свою чергу, збільшується зі збільшенням кількості ітерацій і передбачити появу тієї чи іншої точки на такому аттракторі неможливо.

В цій системі не було знайдено жодного квазіперіодичного аттрактора



(інваріантного тора). Проте, у випадку присутності такого типу атрактора на фазо-параметричній характеристиці, ми будемо спостерігати безліч точок, кількість яких буде збільшуватися зі збільшенням числа ітерацій. Проте, навідміну від хаотичного атрактора, появу кожної наступної точки ми можемо передбачити.

## 2.8. Переріз та відображення Пуанкаре

Розглянемо динамічну систему з неперервним часом, яка описується за допомогою системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Далі розглянемо деякий розв'язок системи (2.1), якому відповідає траєкторія  $\Gamma$  у фазовому просторі. Помістимо у фазовому просторі деяку площину  $S$ , рівняння якої має вигляд:

$$S(\mathbf{x}) = 0.$$

Вибір такої площини є довільним, однак вона повинна розміщатися так, щоб траєкторія  $\Gamma$  перетинала її нескінченне число разів і дотик траєкторії до площини був неможливий (трансверсальне перетинання). Так вибрана площина  $S$  називається січною Пуанкаре фазової траєкторії  $\Gamma$ .

Через  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \dots$  позначимо точки перетину траєкторії  $\Gamma$  із січною  $S$  (рис. 2.2). Зазначимо, що послідовність точок  $\{\mathbf{y}_k\}$  будується перетинами  $\Gamma$  із  $S$  лише в одному напрямку перетину (наприклад, у напрямку із  $S > 0$  у  $S < 0$ ). Отримана послідовність точок  $\{\mathbf{y}_k\}_{k=0}^{\infty}$  на січній Пуанкаре називається перерізом Пуанкаре для траєкторії  $\Gamma$ .

Переріз Пуанкаре також породжує дискретне відображення наступним чином: нехай  $\mathbf{y}_k$  – точка деякого перетину  $\Gamma$  із  $S$ , поставимо їй у відповідність точку  $\mathbf{y}_{k+1}$ , що наступною перетинає площину при русі по траєкторії  $\Gamma$ . Так

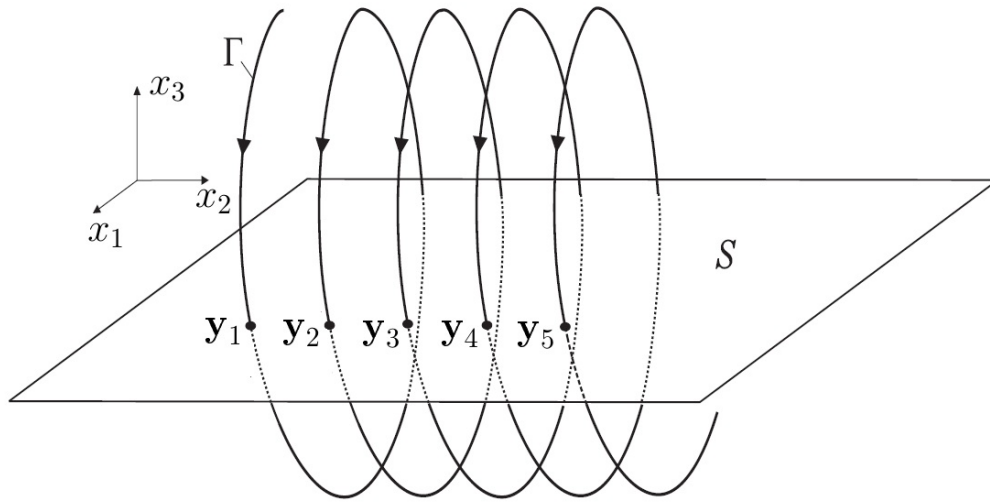


Рис. 2.2: Тривимірний переріз Пуанкаре.

вибраний закон відповідності між попередньою й наступною точками Перерізу Пуанкаре називається відображенням Пуанкаре. Для розглянутої  $n$ -вимірної системи (2.1) це відображення вже буде  $(n - 1)$ -вимірним

$$\mathbf{y}_{k+1} = g(\mathbf{y}_k), \quad g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \quad (2.9)$$

тому що точки перерізу Пуанкаре розташовуються на площині й останню координату завжди можна виразити через перші  $n - 1$  координат.

Таким чином, задача вивчення динамічної системи (2.1) може бути зведена до задачі вивчення відповідного відображення Пуанкаре, яке має розмірність на одиницю меншу, ніж вихідна система. При цьому структура динамічної системи (2.1) однозначно (але не взаємно однозначно) визначає структуру породженого нею дискретного відображення (2.9), для якого ми вже ввели поняття фазо-параметричної характеристики. А тому фазо-параметричною характеристикою деякого розв'язку (2.1) ми будемо називати фазо-параметричну характеристику будь-якого відображення Пуанкаре цього розв'язку.

## 2.9. Приховані та рідкісні атрактори

Наразі, математичний апарат за допомогою якого можна було б встановити кількість існуючих атракторів (або, хоча б граничних множин) є досить нерозвиненим. Годі вже й казати про математичний апарат, що може локалізувати такі множини.

Проте, найрозвиненішою є теорія вивчення положень рівноваги. Існують аналітичні та чисельні методи знаходження положень рівноваги для окремих класів диференціальних рівнянь. А тому вивчення автономних систем зазвичай починається із розгляду та аналізу її положень рівноваги. Подальші ж дослідження поведінки динамічних систем супроводжуються вивченням околу цих положень рівноваги. З огляду на це, виникла нова класифікація атракторів, яка була запропонована в [29]:

**Означення 10.** *Атрактор називається таким, що самозбуджується (self-excited attractor), якщо існує положення рівноваги таке, що будь-який його окіл перетинається з басейном притягання атрактора.*

**Означення 11.** *Атрактор називається прихованим (hidden attractor), якщо він не є таким, що самозбуджується.*

Як вже зазначалось, задача знаходження всіх можливих атракторів системи є досить складною задачею у загальному випадку. Попри це, будь-який атрактор, що самозбуджується, може бути знайдений, оскільки ми можемо знайти всі положення рівноваги автономної динамічної системи, а тому можемо дослідити їх окіл. Проте атрактори динамічних систем не вичерпуються лише такими, що самозбуджуються, а тому вихід траєкторії на такі граничні множини, що є прихованими, може призвести до ряду негативних наслідків у випадку реальної системи. Це пов'язано із тим, що реалізація досліджуваної системи може вийти на приховану граничну множину, про поведінку якої ми не знаємо нічого. Більше того, ми навіть можемо і не мати уявлення про те, що маємо справу із прихованим атрактором.

Оскільки невідомо загальних методів локалізації всіх атракторів системи, то кращою стратегією пошуку граничних множин є вибір початкових умов навмання. Таким чином всі атрактори доцільно поділити на рідкісні (rare attractor) та інші. Під рідкісним атрактором у широкому сенсі розуміють атрактор, який має малий басейн притягання.

Останнім часом з'явилося багато статей присвячених цьому поняттю, зокрема, ряд вчених вперше дали більш строге означення рідкісного атрактора [27; 28]:

Розглянемо динамічну систему  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \omega)$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  та  $\omega \in \mathbb{R}$  – параметр системи. Нехай  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  – множина всіх можливих початкових умов і  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$  – множина допустимих значень параметра. Припустимо, що атрактор  $\mathcal{A}$  існує при  $\omega \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}$  та має басейн притягання  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ . Припускаючи, що початкові умови і параметр системи вибираються незалежно, ймовірність того, що траєкторія вийшла на атрактор  $\mathcal{A}$  рівна

$$p(\mathcal{A}) = \frac{\mu(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})}{\mu(\mathcal{C})} \frac{\mu(\mathcal{B}_{\mathcal{A}})}{\mu(\mathcal{B})}.$$

Якщо значення  $p(\mathcal{A})$  є малим (тобто  $p(\mathcal{A}) \ll 1$ ), то атрактор  $\mathcal{A}$  є рідкісним.

## 2.10. Максимальні атрактори

Наведене раніше означення атрактора не є загальноприйнятим та універсальним. Універсальним воно не є, зокрема, і тому, що існують динамічні системи в яких граничні множини не є ізольованими одна від одної, тобто для граничної множини  $\mathcal{K}_1$  та для будь-якого  $\varepsilon > 0$ , знайдеться гранична множина  $\mathcal{K}_2 \neq \mathcal{K}_1$  така, що

$$\rho(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) < \varepsilon,$$

де  $\rho(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \inf_{\substack{x \in \mathcal{K}_1 \\ y \in \mathcal{K}_2}} \rho(x, y)$ .

За таких умов зрозуміло, що для будь-якої відкритої множини  $\mathcal{B} \supset \mathcal{K}_1$ , знайдеться гранична множина  $\mathcal{K}_2 \neq \mathcal{K}_1$  така, що  $\mathcal{B} \cap \mathcal{K}_2 \neq \emptyset$ . А тому гранична

множина  $\mathcal{K}_1$ , навіть теоретично, не може бути атрактором, оскільки для будь-якої початкової точки  $x_0 \in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}_2$ , гранична множина цієї початкової точки  $\mathcal{K}(x_0) = \mathcal{K}_2 \neq \mathcal{K}_1$ .

Незважаючи на це, такі динамічні системи в яких існують неізолювані граничні множини можуть бути і дисипативними і стійкими за Лагранжем одночасно. А це означає, що в таких динамічних системах існують притягувальні граничні множини, які не відповідають означенню атрактора. Для таких випадків доцільно розглядати інші концепти атракторів та притягувальних множин. Одним з таких концептів є поняття максимального атрактора [33; 91].

**Означення 12.** Область  $\mathcal{B} \subset \mathbb{D}$  називається поглинаючою, якщо

$$\forall(t > 0) : \varphi(t, \mathcal{B}) \subset \mathcal{B}.$$

**Означення 13.** Максимальним атрактором поглинаючої області  $\mathcal{B}$  називається множина

$$\mathcal{A}_{\max} := \bigcap_{t>0} \varphi(t, \mathcal{B}).$$

З означення зрозуміло, що максимальний атрактор – це об'єднання, можливо, нескінченної кількості граничних множин. Тому поняття максимального атрактора також не є універсальним, оскільки можливо, що в максимальний атрактор увійдуть репелери. З означення граничних множин, які є репелерами зрозуміло, що траєкторії навпаки віддаляться від такої граничної множини. А тому, поняття максимального атрактора не завжди співпадає з усталеними поведінками динамічних систем.

## 2.11. Висновки за розділом

У розділі викладено основні поняття і результати теорії динамічних систем та детермінованого хаосу, які використовуються при дисертаційному дослідженні.

### 3. Система генератор – п'єзокерамічний випромінювач

#### 3.1. Математична модель та її положення рівноваги

Розглянемо стержневий п'єзокерамічний випромінювач, до електродів якого прикладається електрична напруга, збуджена LC-генератором (рис. 3.1) [17].

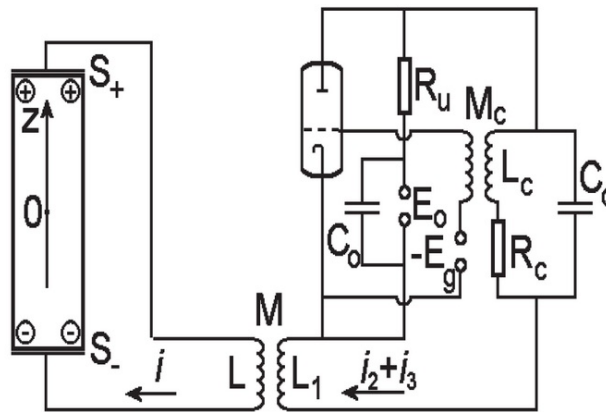


Рис. 3.1: Схема розглянутої системи [15; 17; 79].

Позначимо через  $\phi(t)$  значення, пропорційне електричній напрузі сітки генератора та через  $V(t)$  - електричну різницю потенціалів на електродах генератора. Тоді математичну модель системи «п'єзокерамічний випромінювач – генератор» можна описати такою системою диференціальних рівнянь [15–19]:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = a_1 \dot{\phi} + a_2 \dot{\phi}^2 - a_3 \dot{\phi}^3 - a_4 V(t); \quad (3.1)$$

$$\ddot{V}(t) + \omega_1^2 V(t) = a_5 \phi + a_6 \dot{\phi} - a_7 \dot{V}(t),$$

де

$$a_0 = a_1 - \frac{M^2 R_c}{L_c C_c L R_a^2}, \quad a_1 = \frac{M_c}{L_c C_c} \left[ I_1 - \frac{R_c R_a C_c - L_c}{R_a (M_c - D L_c)} + \frac{R_c L_1}{R_a^2 M_c} - 3 I_{c3} (E_g)^2 \right],$$

$$a_2 = 3 \frac{M_c I_3 E_g}{L_c C_c}, \quad a_3 = \frac{M_c I_3}{L_c C_c}, \quad a_4 = \frac{2 M M_c}{L R_a L_c C_c},$$

$$a_5 = -\frac{M\omega_1^2(R_a + R_c)}{2M_c R_a L_c}, \quad a_6 = -\frac{M\omega_1^2 R_c}{2M_c R_a}, \quad a_7 = \frac{k^2}{\eta_0 h S(1 - k^2)},$$

$$\omega_1^2 = \frac{2h}{LS\epsilon_{33}(1 - k^2)}, \quad \omega_0^2 = \frac{R_a + R_c}{R_a L_k C_k}.$$

Введемо безрозмірні змінні:

$$\tau = \omega_0 t, \quad \xi = \frac{\phi\omega_0}{E_g}, \quad \zeta = \frac{d\xi}{d\tau}, \quad \beta = \frac{V}{E_g}, \quad \gamma = \frac{d\beta}{d\tau}.$$

Після переходу до нових змінних система (3.1) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \zeta; \\ \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\xi + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_3\zeta^3 + \alpha_4\beta; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma; \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= -\alpha_0\beta + \alpha_5\xi + \alpha_6\zeta - \alpha_7\gamma, \end{aligned} \tag{3.2}$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}, & \alpha_1 &= \frac{a_0}{\omega_0}, & \alpha_2 &= \frac{a_2 E_g}{\omega_0}, & \alpha_3 &= \frac{a_3 E_g^2}{\omega_0}, \\ \alpha_4 &= -\frac{a_4}{\omega_0}, & \alpha_5 &= \frac{a_5}{\omega_0^3}, & \alpha_6 &= \frac{a_6}{\omega_0^2}, & \alpha_7 &= \frac{a_7}{\omega_0}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Спочатку розглянемо положення рівноваги системи п'єзокерамічний випромінювач – генератор.

У роботах [15–19] встановлено, що при виконанні співвідношення  $\alpha_0 = \alpha_4\alpha_5$  ця система має нескінченну кількість положень рівноваги:

$$\zeta = 0; \quad \xi = \alpha_4 r; \quad \gamma = 0; \quad \beta = r,$$

де  $r \in \mathbb{R}$ .

У випадку, коли  $\alpha_0 \neq \alpha_4\alpha_5$ , маємо єдине положення рівноваги:

$$\zeta = 0; \quad \xi = 0; \quad \gamma = 0; \quad \beta = 0.$$

Достатні умови асимптотичної стійкості нульового положення рівноваги, будуть мати наступний вигляд [15–19]:

$$\alpha_7 - \alpha_1 > 0 \quad (3.4)$$

$$1 + \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_7 > 0 \quad (3.5)$$

$$\alpha_7 - \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_0 \alpha_1 > 0 \quad (3.6)$$

$$\alpha_6 - \alpha_4 \alpha_5 > 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &(\alpha_7 - \alpha_1)(1 + \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_7)(\alpha_7 - \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_0 \alpha_1) - \\ &(\alpha_7 - \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_0 \alpha_1)^2 - (\alpha_7 - \alpha_1)^2(\alpha_6 - \alpha_4 \alpha_5) > 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отже, при виконанні умов (3.4)–(3.8) єдине тривіальне положення рівноваги буде стійким. При невиконанні хоча б однієї з цих нерівностей положення рівноваги втрачає свою стійкість, а тому всі траєкторії, що мають початкові умови в околі рівноваги залишають цей окіл із плином часу.

Оскільки система (3.2) є нелінійною системою диференціальних рівнянь четвертого порядку, то всі подальші дослідження проводились за допомогою чисельних методів.

### 3.2. Карта динамічних режимів

Наочна демонстрація типової поведінки системи може бути подана за допомогою карти динамічних режимів. Карта динамічних режимів – діаграма на площині на осях якої відкладено значення параметрів, а на перетині різними кольорами зображено типовий усталений режим динамічної системи. Для побудови такої карти, площина із обраними параметрами розбивається на вузли за допомогою квадратної сітки. У цих вузлах обчислюється спектр ляпуновських характеристичних показників. Тип динамічного режиму (тип атрактора) визначається сигнатурою спектру ЛХП. Після ідентифікації усталеного режиму у всіх точках сітки кожному режиму присвоюється відповідний колір (позначку). Нарешті отримуємо багатокольорову



діаграму на площині.

Покладемо  $\alpha_0 = 0.995$ ,  $\alpha_1 = 0.0535$ ,  $\alpha_4 = -0.103$ ,  $\alpha_5 = -0.0604$ ,  $\alpha_6 = -0.12$ ,  $\alpha_7 = 0.01$ , а параметри  $\alpha_2$  та  $\alpha_3$  виберемо в якості біфуркаційних. На рис. 3.2 побудовано карту динамічних режимів для цих параметрів. Відповідності атрактора, його кольору та сигнатури спектра представлені в табл. 3.1.

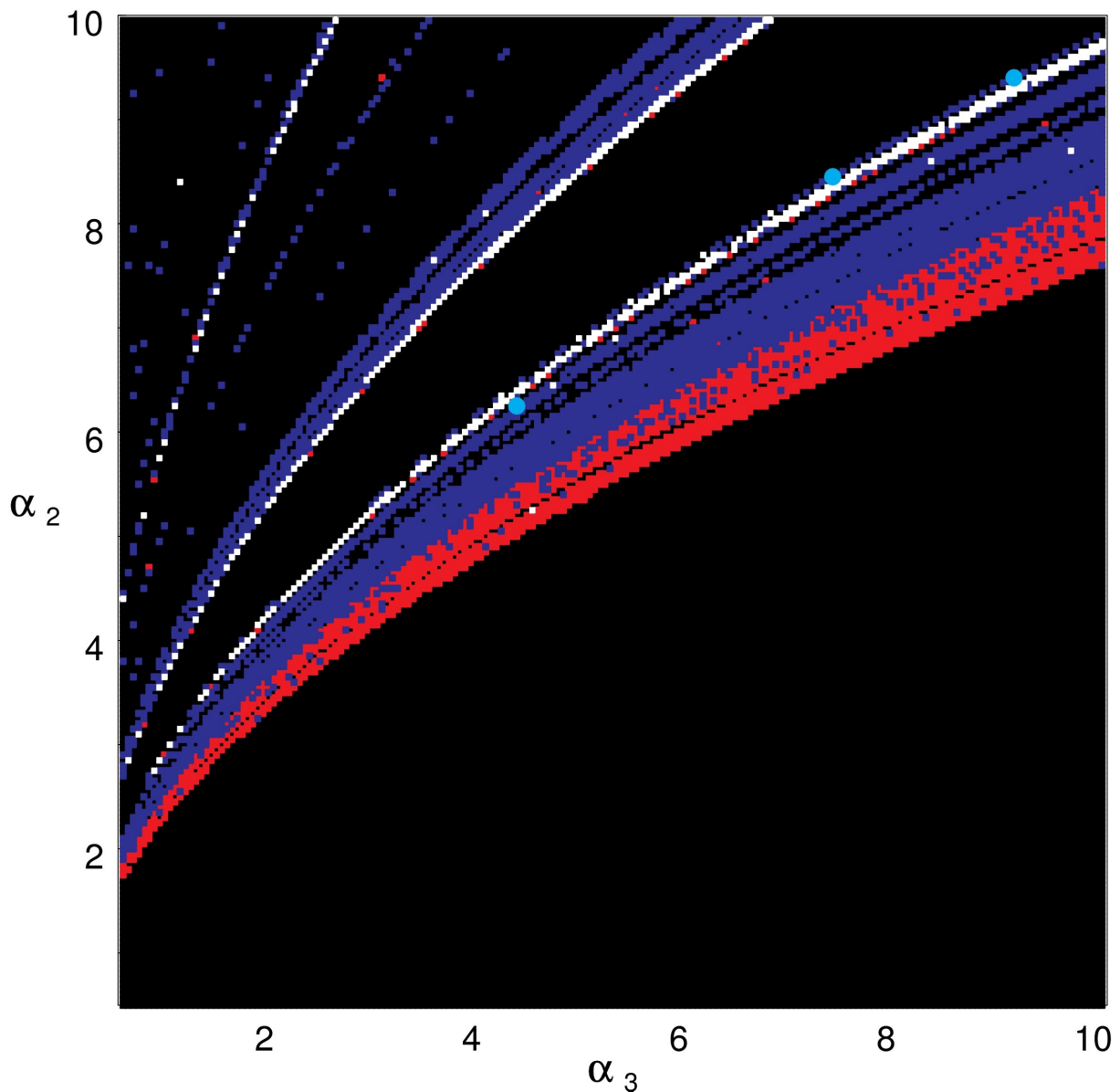


Рис. 3.2: Карта динамічних режимів.

Зауважимо спочатку, що карта динамічних режимів ілюструє лише найбільш типовий для динамічної системи усталений режим і нічого не каже

Табл. 3.1: Тлумачення карти динамічних режимів.

Позначка	Тип атрактора	Сигнатура спектра ЛХП
●	Положення рівноваги	$\langle -, -, -, - \rangle$
■	Граничний цикл	$\langle 0, -, -, - \rangle$
■	Інваріантний тор	$\langle 0, 0, -, - \rangle$
■	Хаотичний аттрактор	$\langle +, 0, -, - \rangle$
□	Гіперхаотичний аттрактор	$\langle +, +, 0, - \rangle$

про існування чи не існування в системі інших видів атракторів, а тим більше, до якого типу вони належать. У нашому випадку початкові умови були взяті із малого околу єдиного положення рівноваги ( $\zeta = 0$ ;  $\xi = 0$ ;  $\beta = 0$ ;  $\gamma = 0$ ), а тому кожен із атракторів, який представлено на рис. 3.2 є таким, що само-збуджується.

Як видно із карти динамічних режимів, система «п'єзокерамічний випромінювач – генератор» має все різноманіття динамічних режимів, що можуть бути притаманні чотиривимірній системі. А саме, при змінах параметрів  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  у межах, зазначених на рис. 3.2, у системі (3.2) існують положення рівноваги ( $\xi = 0$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$ ) (позначені через ●), які є найбільш нетиповими атракторами цієї системи, а також інші регулярні атрактори, такі як, граничні цикли (■) та інваріантні тори (■). Крім того існують хаотичні (■) та гіперхаотичні (□) атрактори.

Відмітимо, що аттрактор називається гіперхаотичним, якщо у його спектрі ЛХП присутні два додатні показники, у той час хаотичний аттрактор, має лише один додатний показник. Таким чином, сигнатури спектра будуть  $\langle +, +, 0, - \rangle$  та  $\langle +, 0, -, - \rangle$  для гіперхаотичного та хаотичного атракторів відповідно. Це, у свою чергу, означає, що у гіперхаотичного атрактора існує два напрямки розбігання двох близьких траєкторій.

Для подальших досліджень покладемо  $\alpha_3 = 9.95$ , а параметр  $\alpha_2$  за-

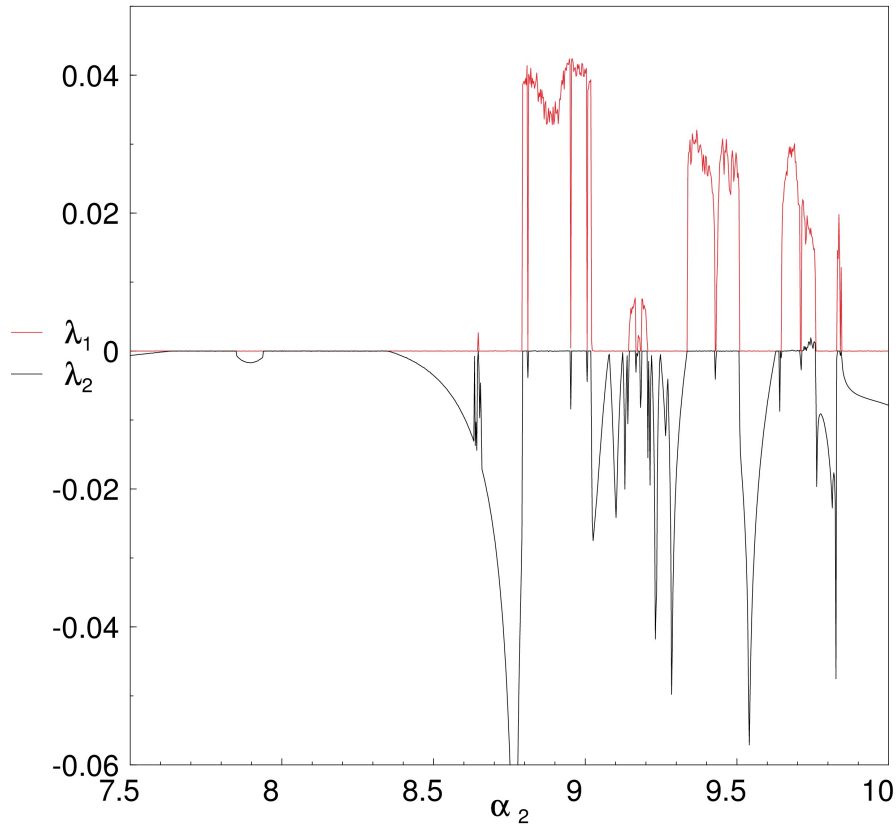


Рис. 3.3: Залежність двох старших ляпуновських характеристичних показників  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  від значень параметра  $\alpha_2$ .

лишимо біфуркаційним і дослідимо поведінку системи «п'єзокерамічний випромінювач – генератор» при його зміні.

Розглянемо детально залежність двох старших ляпуновських характеристичних показників  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  від параметра  $\alpha_2$ , яка представлена на рис. 3.3. Нагадаємо, що ляпуновські характеристичні показники впорядковані за спаданням, тобто  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ . Крім того, вони задовольняють умову, що свідчить про дисипативність системи:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 < 0. \quad (3.9)$$

Як видно із рисунку, існують наступні комбінації сигнатури двох старших ЛХП:

- 1)  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ , що відповідає періодичному аттрактору;
- 2)  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ , що відповідає квазіперіодичному аттрактору (заува-

жимо, що у цьому випадку можливі дві сигнатури спектра ЛХП  $\langle 0, 0, -, - \rangle$  та  $\langle 0, 0, 0, - \rangle$ , які будуть відповідати траєкторіям, що щільно заповнюють 2-та 3-вимірну тороїдальну поверхню відповідно);

3)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ , що відповідає хаотичному атрактору (як і у попередньому випадку можливі дві сигнатури  $\langle +, 0, -, - \rangle$  та  $\langle +, 0, 0, - \rangle$ );

4)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , що відповідає гіперхаотичному атрактору.

Крім названих вище існує ще одна комбінація, якої на рис. 3.3 не зображено, це  $\langle -, -, - \rangle$ , що відповідає асимптотично стійкому положенню рівноваги. Всі інші комбінації виключаються або умовою дисипативності (3.9), або умовою присутності нульового показника у спектрі атрактора, відмінного від положення рівноваги.

Для подальшого дослідження, розглянемо які атрактори виникають у системі при зміні параметра  $\alpha_2$ , та спробуємо класифікувати ці атрактори та описати можливий вплив на реальну динамічну систему.

### 3.3. Ідентифікація типів атракторів системи

Спираючись на карту динамічних режимів, почнімо дослідження системи зі значення  $\alpha_2 = 7.6$ , де у системі існує граничний цикл. При збільшенні значення параметра до  $\alpha_2 = 7.65$  із граничним циклом відбувається біфуркація і у системі з'являється інваріантний тор, що є зовсім іншим типом усталеного режиму динамічної системи. Проекції фазових портретів до та після біфуркації атрактора, представлені на рис. 3.4а та рис. 3.4б відповідно.

За подальшого збільшення значення біфуркаційного параметра до  $\alpha_2 = 7.847$ , у системі (3.2) з'являється новий атрактор, після чого в системі починають співіснувати два атрактори. Цей новонароджений атрактор є граничним циклом, який має надзвичайно малий басейн притягання, а тому він відповідає ознаці рідкісного атрактора, що наведена в першому розділі. Додатково зауважимо, що оскільки існуючий у системі інваріантний тор є таким,

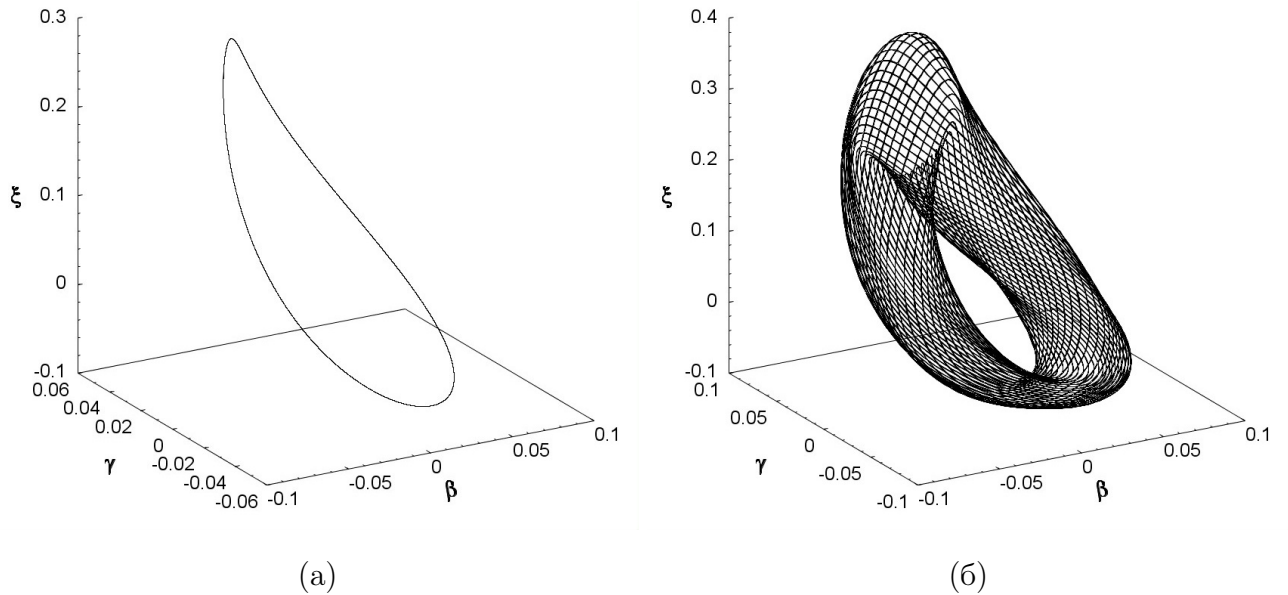


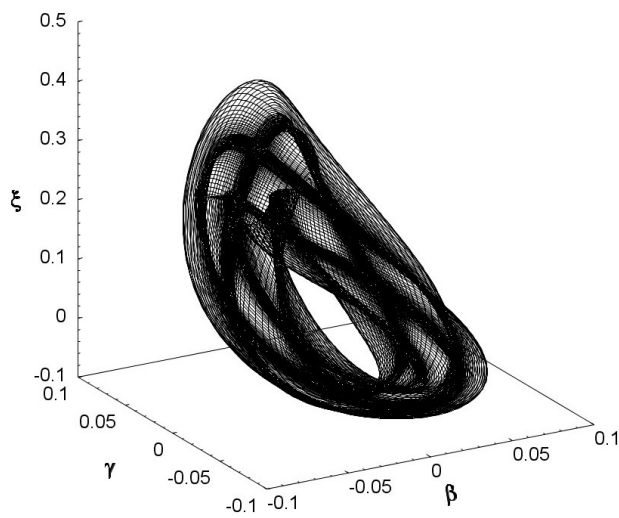
Рис. 3.4: Проекції фазових портретів: граничного циклу при  $\alpha_2 = 7.6$  (а); інваріантного тора при  $\alpha_2 = 7.8$  (б).

що самозбуджується, то новий періодичний атрактор є прихованим.

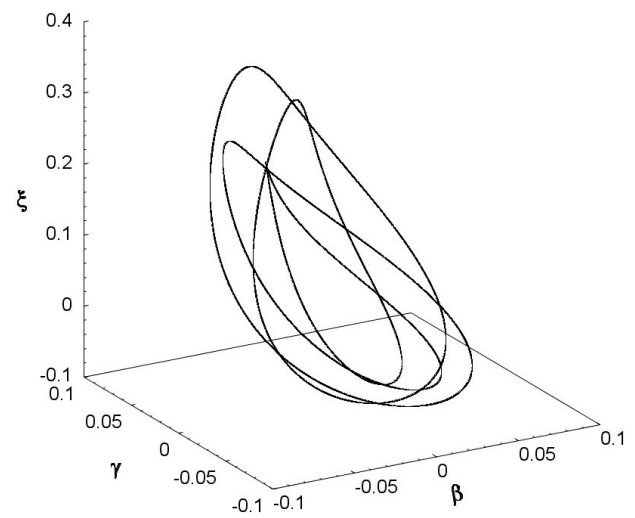
Так як у системі встановлено існування принаймні двох атракторів, то, для зручності, будемо називати новонароджений атрактор (граничний цикл) та всі подальші біфуркації пов'язані з ним формально «червоним атрактором». А вже існуючий атрактор (інваріантний тор) та всі подальші його біфуркації – формально «чорним атрактором». Чорний та червоний атрактори за значення  $\alpha_2 = 7.847$  представлені на рис. 3.5а та рис. 3.5б відповідно, а обидва разом на рис. 3.5в.

Для встановлення факту співіснування в системі «п'єзокерамічний випромінювач – генератор» принаймні двох атракторів було зроблено ряд кроків, що є унікальними для цієї системи та які є пов'язані з її поведінкою. Ці кроки були модифіковані, оптимізовані та використанні для знаходження пар співіснуючих атракторів для інших сегментів значень параметра  $\alpha_2$ . Розглянемо більш детально як відбувався пошук співіснуючих атракторів для  $\alpha_2 = 7.847$ , що, як ми побачимо згодом, дало змогу встановити весь хід їхньої еволюції на цілому сегменті значень параметра  $\alpha_2$ .

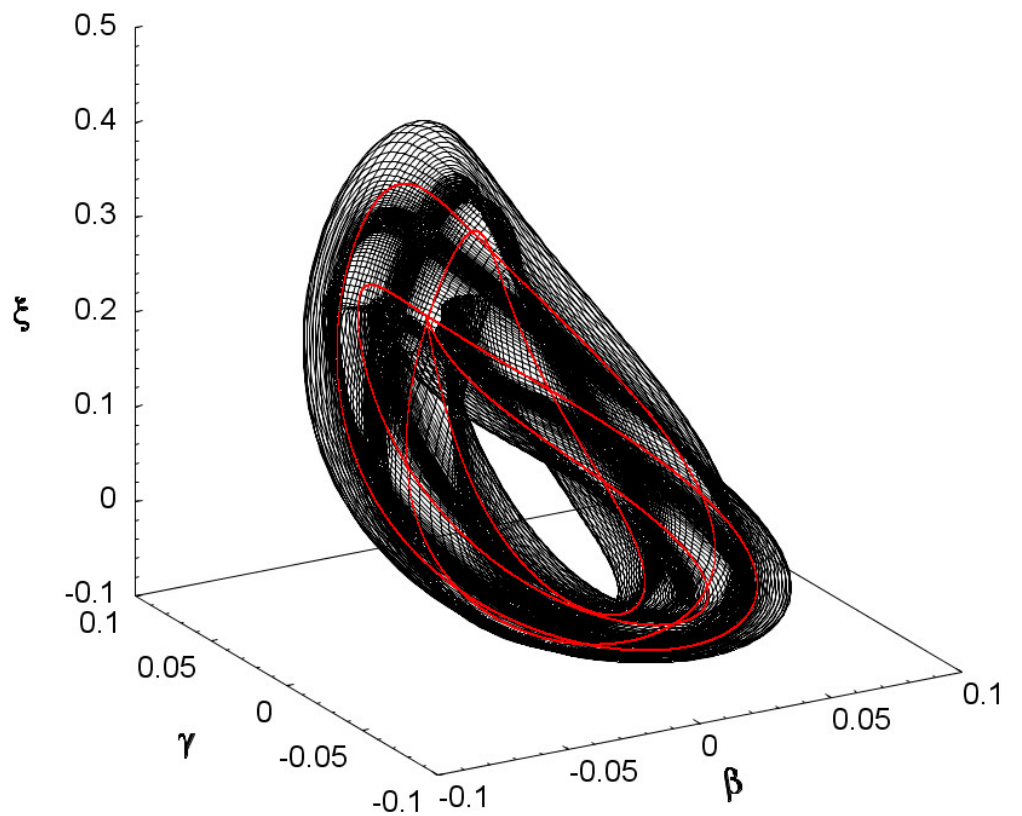
Отже, при значенні  $\alpha_2 = 7.847$  чорний атрактор почав себе поводи-



(a)



(б)



(в)

Рис. 3.5: Проекції фазових портретів при  $\alpha_2 = 7.847$ : інваріантного тора (чорного атрактора) (а); граничного циклу (червоного (рідкісного) атрактора) (б); чорного та червоного одночасно (в).

ти і як хаотичний і як квазіперіодичний. Зокрема, фазова траєкторія такої граничної множини здебільшого нагадувала квазіперіодичну, проте, інколи,

траєкторія «зривалась» і здавалось ніби перехідний процес починався заново. Крім цього, підраховані ляпуновські характеристичні показники такого «атрактора» суперечили теорії, оскільки сигнатура їх спектру мала вигляд  $\langle +, -, -, - \rangle$ . Як з'ясувалось, така поведінка була пов'язана з великою похибкою локального кроку інтегрування, оскільки після її зменшення з  $O(10^{-5})$  до  $O(10^{-8})$  стало зрозуміло, що у системі існує квазіперіодичний атрактор. Але це не пояснювало атипову поведінку траєкторії. Поясненням для цього феномену стало існування іншого атрактора «всередині» квазіперіодичного (рис. 3.5в) та їх «близьке» розташування, через що у деякі моменти часу траєкторія «зривалась» з одного атрактора та прямувала до другого, потім зривалась та прямувала до першого, потім зривалась і прямувала до другого і т.д.

Додатково зазначимо, що атрактори «ділили» внутрішній простір інваріантного тора своїми басейнами притягання. У той час як, згідно з чисельними експериментами, «зовнішній» простір займав байсен притягання лише інваріантного тора.

Розглянемо фазо-параметричну характеристику (рис. 3.6) на якій зображено значення параметра  $\alpha_2$ , які охоплюють існування червоного атрактора. Фазо-параметрична характеристика була побудована за допомогою січної гіперплощини  $S = \{(\xi, \zeta, \beta, \gamma) \mid \zeta = 0\}$ . За кожного фіксованого значення параметра  $\alpha_2$ , ми маємо скінченну кількість точок перетину з періодичним (червоним) атрактором. У той час як квазіперіодичний (чорний) атрактор має нескінченну кількість точок перетину із січною  $S$ . Але, з рис. 3.6 не є очевидним, що чорний атрактор є квазіперіодичним, а не хаотичним. Проте, це наглядно видно з перерізу Пуанкаре, зображеного на рис. 3.7, що побудований за тієї самої січної  $S$ .

Додатково зазначимо, що після зменшення локальної похибки чисельного інтегрування до  $O(10^{-8})$  спектри ЛХП чорного та червоного атракторів мають вигляд  $\langle 0, 0, -, - \rangle$  та  $\langle 0, -, -, - \rangle$  відповідно.



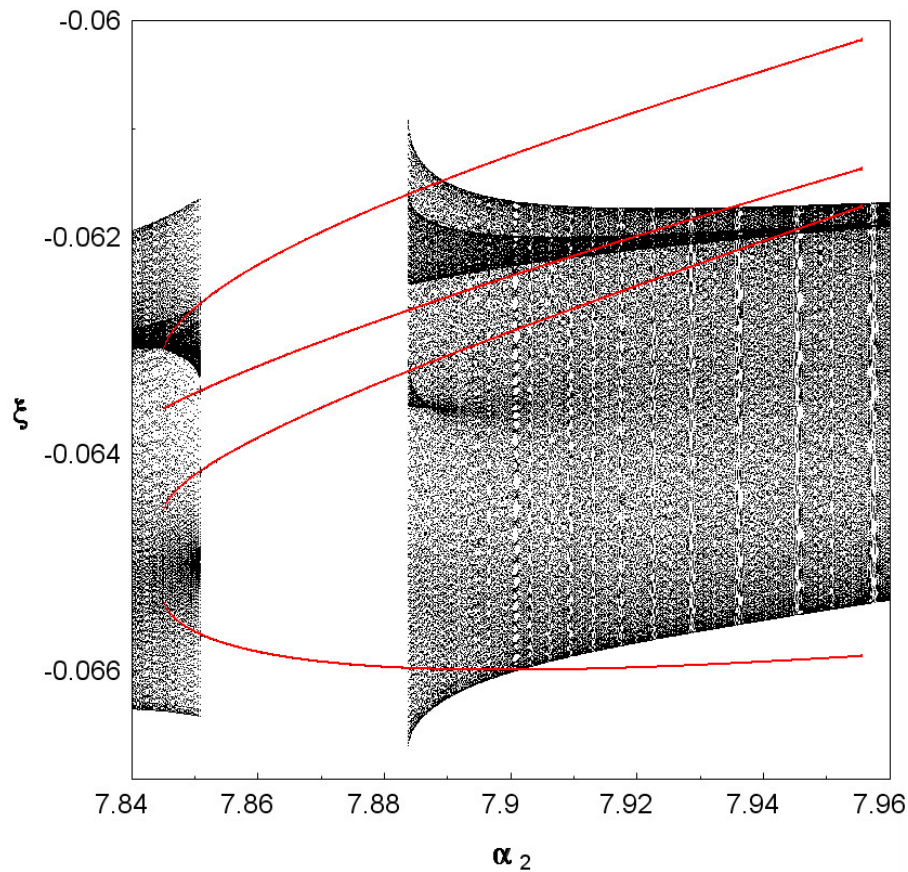


Рис. 3.6: Фазо-параметрична характеристика  $\alpha_2 \in [7.84; 7.96]$ .

На рис. 3.6 можна бачити область значень параметра  $\alpha_2$  за якої відсутня біфуркаційна діаграма для чорного атрактора. Пов'язано це з тим, що зазначений аттрактор не існує за вказаних значень. Тобто, червоний аттрактор стає єдиним аттрактором, що існує в системі. А тому, він втрачає ознаку рідкісного атрактора та не є більше прихованим, оскільки будь-яка траєкторія з околу положення рівноваги прямувати саме до червоного граничного циклу (тобто він є аттрактором, що самозбуджується).

Після проходження біфуркаційним параметром значення  $\alpha_2 = 7.883$  чорний аттрактор знову існує в системі в якості квазіперіодичного режиму. Проте, чорний інваріантний тор, згідно з чисельними експериментами, є приховим. Не зважаючи на це, жоден з атракторів не варто вважати рідкісним, оскільки, згідно з чисельними експериментами, обидва аттрактори мають співрозмірні басейни притягання в околі положення рівноваги (хоч басейн притягання червоного атрактора окупує більшу область).



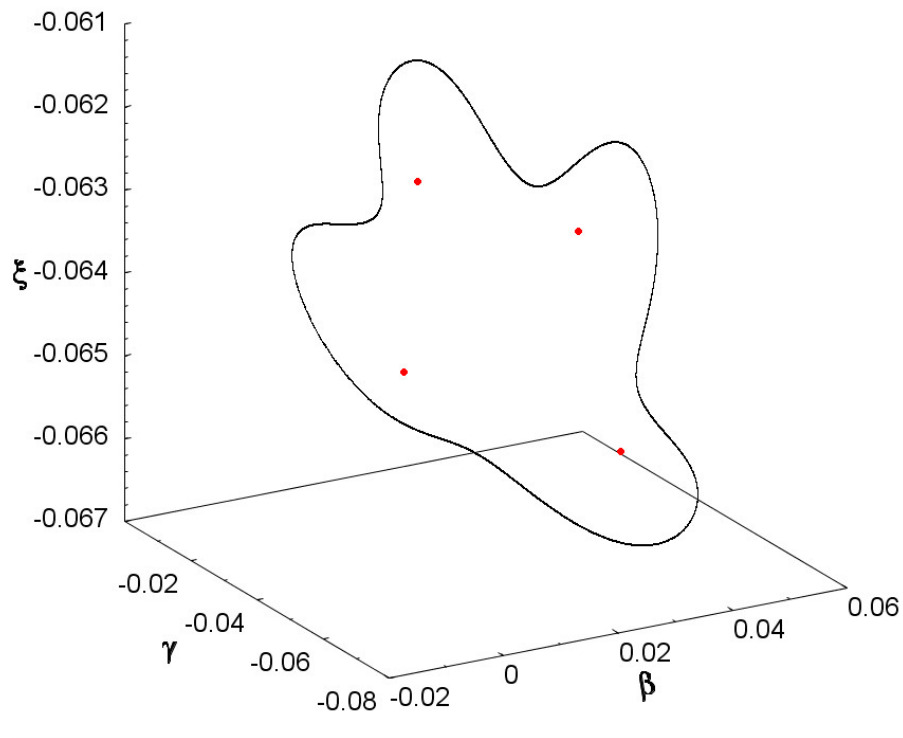
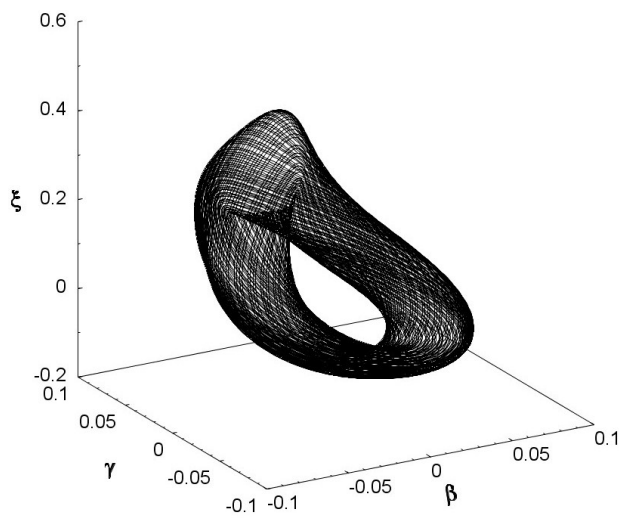


Рис. 3.7: Переріз Пуанкаре чорного квазіперіодичного та червоного періодичного атракторів при  $\alpha_2 = 7.847$ .

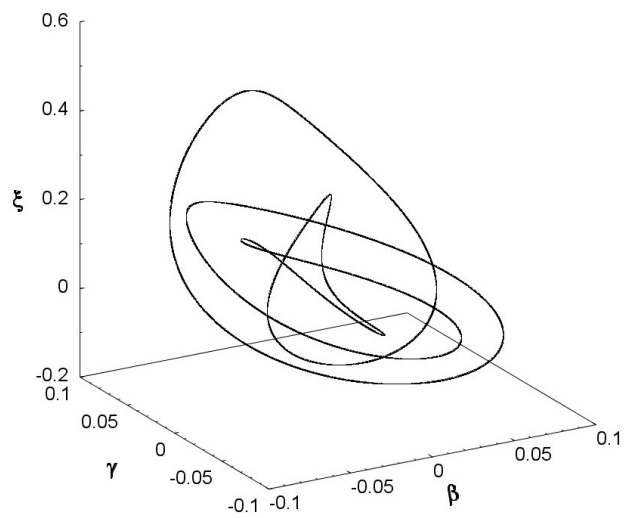
Ситуація змінюється при  $\alpha_2 > 7.893$ , після чого чорний атрактор знову є таким, що самозбуджується. А червоний, у свою чергу, є прихованим та рідкісним.

На проміжку  $\alpha_2 \in (7.883; 7.893)$  чорний атрактор переходить з прихованого атрактора у такий, що самозбуджується. А червоний, відповідно, навпаки. Тому, має сенс гіпотеза про існування такого значення біфуркаційного параметра, за якого басейни притягання чорного та червоного атракторів одночасно перетинають окіл положення рівноваги, а тому чорний та червоний атрактори одночасно є такими, що самозбуджуються.

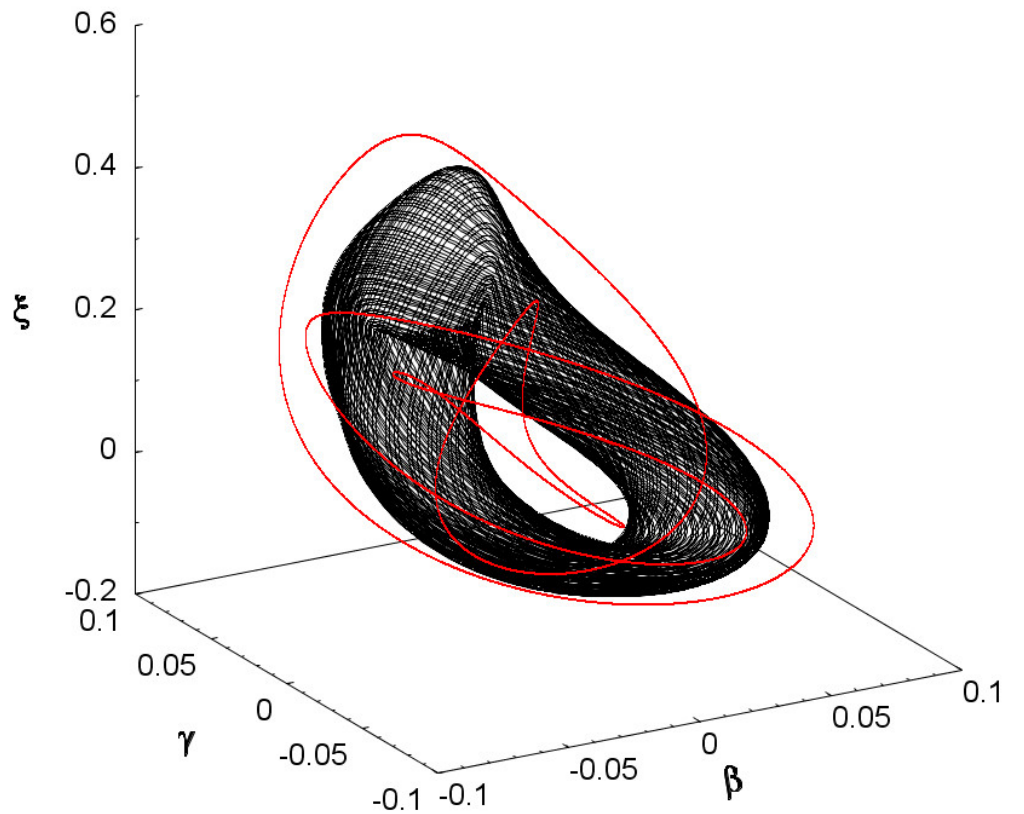
При  $\alpha_2 = 7.9557$  червоний граничний цикл припиняє своє існування як атрактор, тому єдиною притягувальною множиною в околі положення рівноваги є чорний інваріантний тор. Чорний атрактор буде залишатись єдиним атрактором системи на усьому проміжку  $\alpha_2 \in (7.9557; 8.624)$ . Проте, в середині цього проміжку, в околі значення  $\alpha_2 = 8.35$  із чорним атрактором відбувається біфуркація, через що в системі з'явиться чорний граничний



(a)



(б)



(в)

Рис. 3.8: Проекції фазових портретів при  $\alpha_2 = 7.95$ : інваріантного тора (чорного атрактора) (а); граничного циклу (червоного (рідкісного) атрактора) (б); чорного та червоного одночасно (в).

цикл на торі.

В околі значення  $\alpha_2 = 8.624$  в системі знову починають співіснувати

два атрактори. До вже існуючого чорного граничного циклу на торі, додається червоний граничний цикл. Новонароджений червоний атрактор має значну більшу амплітуду коливань. Ця тенденція разом із проєкціями фазових портретів існуючих атракторів при  $\alpha_2 = 8.625$  представлена на рис. 3.9.

Дослідимо атрактори на прихованість та рідкісність. В околі значення  $\alpha_2 = 8.624$  новонароджений червоний атрактор є прихованим і, крім того, відповідає ознаці рідкісності. Але, за незначного збільшення значення біфуркаційного параметра до  $\alpha_2 = 8.625$ , – збільшується і басейн притягання червоного атрактора через що червоний атрактор втрачає ознаку рідкісності. Крім того, його басейн притягання тепер охоплює і положення рівноваги, тобто він є атрактором, що самозбуджується. Чорний атрактор, у свою чергу, набуває ознаки рідкісності і стає прихованим та залишається таким майже на всьому інтервалі зміни біфуркаційного параметра на якому існує червоний атрактор окрім малого околу правого кінця цього інтервалу ( $\alpha_2 = 8.659$ ). Область значень параметрів за яких існує червоний атрактор, разом із еволюцією чорного та червоного атракторів наведено на фазо-параметричній характеристиці (рис. 3.10).

Дана пара співіснуючих атракторів є ще цікавою і тим, що червоний атрактор переходить до хаосу. Як відомо [45; 48; 49; 59; 79; 90], основними сценаріями переходу до хаосу є сценарії Фейгенбаума та Помо-Манневілля. За першим сценарієм перехід до хаосу відбувається через каскад біфуркацій подвоєння періоду, а за другим – через переміжність. Більше того, при збільшенні (зменшенні) деякого біфуркаційного параметра відбуваються послідовні переходи до хаосу за сценарієм Фейгенбаума, а у зворотному напрямі, при зменшенні (збільшенні) значення параметра послідовні переходи до хаосу відбуваються за сценарієм Помо-Манневілля.

Натомість, як видно з рис. 3.10, у нашому випадку порушується чітка послідовність переходів до хаосу виключно за одним сценарієм при збільшенні чи зменшенні параметра  $\alpha_2$ . Таким чином, ми спостерігаємо деяку

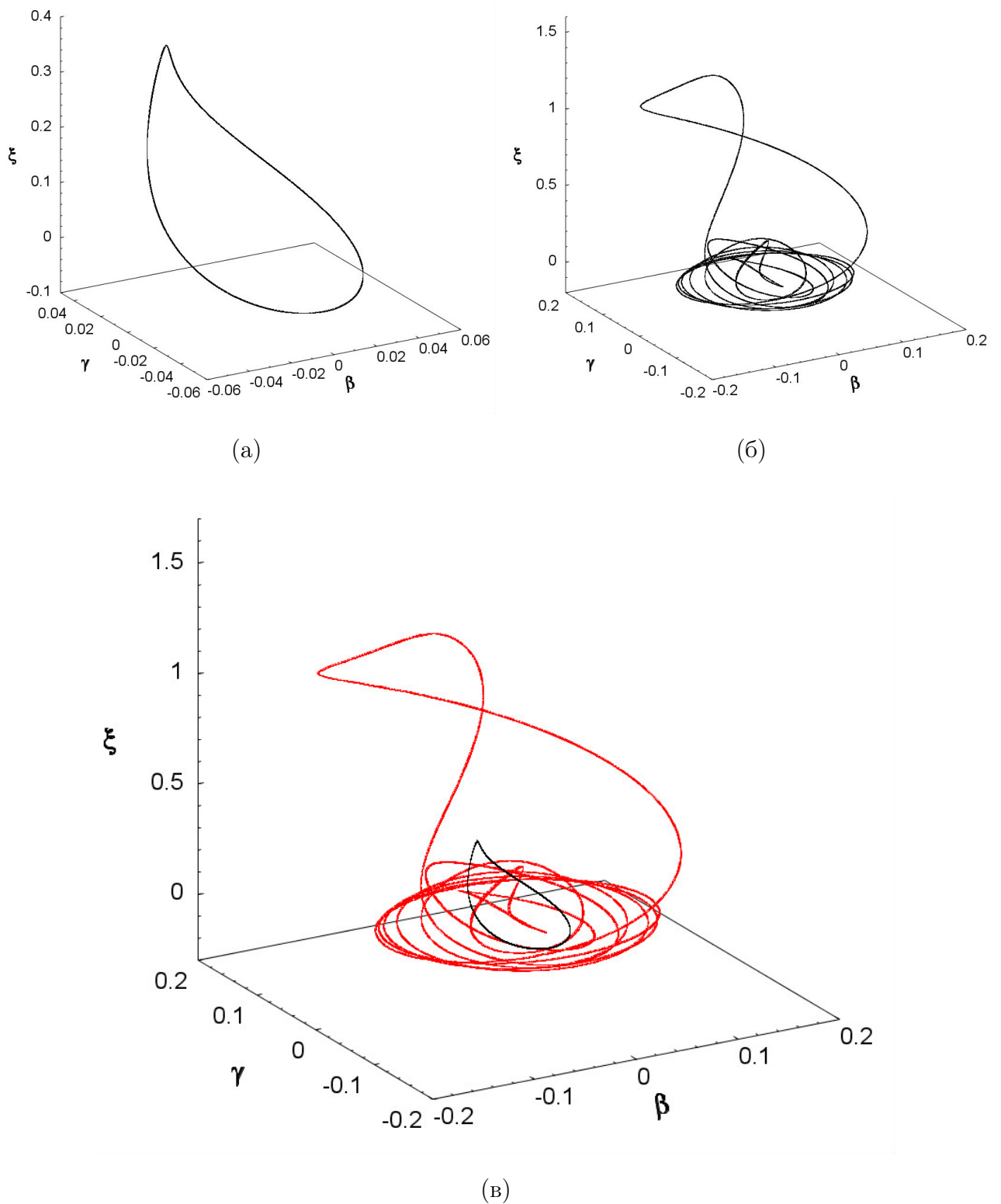


Рис. 3.9: Проекції фазових портретів при  $\alpha_2 = 8.625$ : резонансного циклу на торі (чорного (рідкісного) атрактора) (а); граничного циклу (червоного атрактора) (б); чорного та червоного одночасно (в).

симетрію сценаріїв, оскільки у деякому okolí зміни біфуркаційного параметра відбувається перехід до хаосу за сценарієм Фейгенбаума з обох сторін

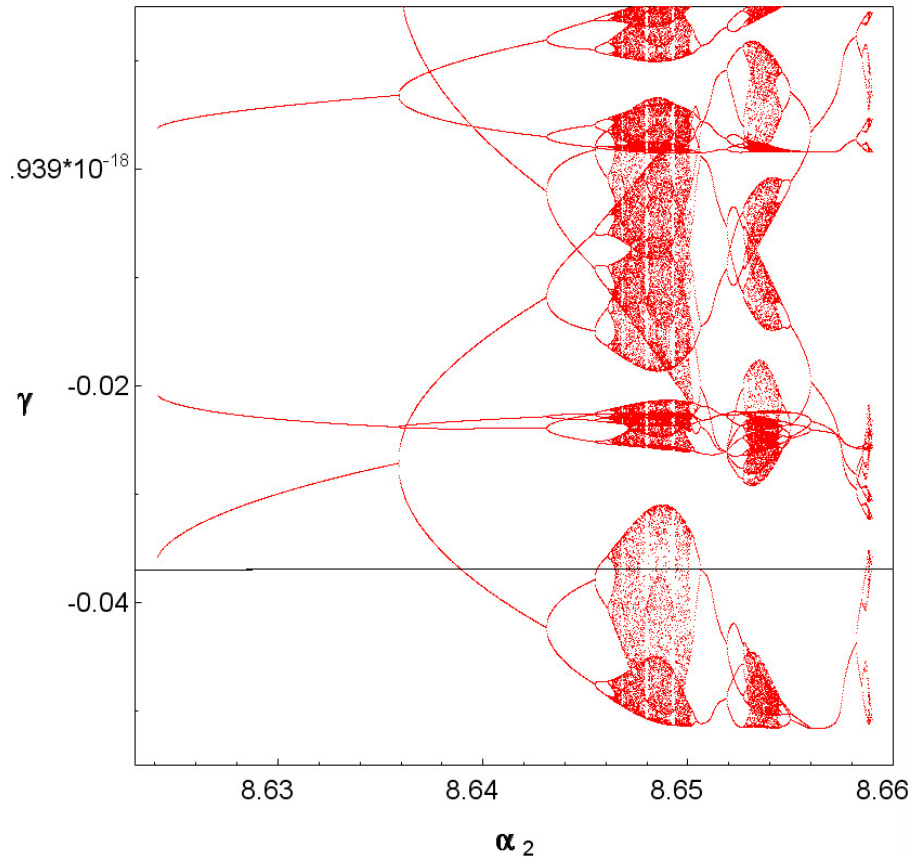


Рис. 3.10: Фрагмент фазо-параметричної характеристики чорного та червоного атракторів  $\alpha_2 \in [8.623; 8.66]$ .

– і зі збільшенням, і зі зменшенням біфуркаційного параметра. Аналогічну ситуацію ми спостерігаємо і для сценарію Помо-Манневілля. Зауважимо, що такий ефект симетрії сценаріїв переходів до хаосу також був виявлений для неідеальних систем у роботі [92].

На рис. 3.11 зображено проєкцію фазових портретів червоного хаотичного атрактора, який є таким, що самозбуджується, та чорного граничного циклу, який є як прихованим, так і рідкісним атрактором.

Розглянемо переріз Пуанкаре при  $\alpha_2 = 8.647$  (чорний граничний цикл + червоний хаотичний аттрактор), який зображено на рис. 3.12 та виконано для двох атракторів одночасно. На рис. 3.12 видно, що єдину точку, що відповідає одній точці перетину чорного періодичного атрактора з січною, яка строго повторює себе рівно через період. У свою чергу, червоний хаотичний аттрактор має безліч точок перетину із січною і, зі збільшенням ча-

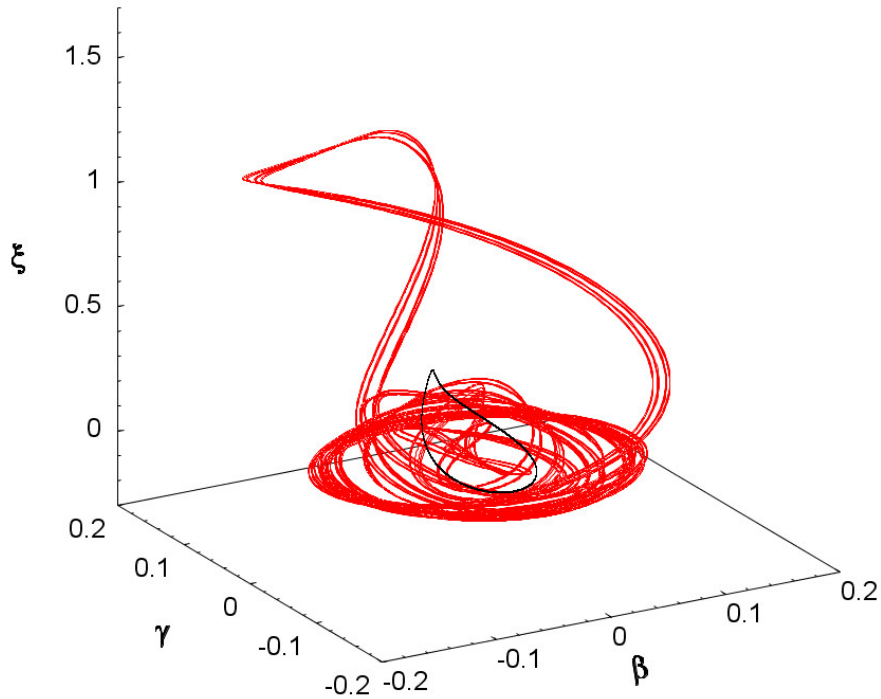


Рис. 3.11: Проекція фазових портретів граничного циклу (чорним) та хаотичного атратора (червоним) разом при  $\alpha_2 = 8.647$ .

су інтегрування, кількість точок перетину також буде необмежено зростати. Крім цього, неможливо передбачити ні появу тієї чи іншої точки на січній, ні момент часу, в який цей атрaktor перетне гіперплощину. Також перетин червоного хаотичного атратора має квазістрічкову структуру, що свідчить про принципову можливість звести дослідження до вивчення одновимірного дискретного відображення замість чотиривимірної системи диференціальних рівнянь.

В околі значення  $\alpha_2 = 8.659$  червоний атрaktor припиняє своє існування, а тому єдиною притягувальною множиною в околі положення рівноваги системи (3.2) залишиться резонансний цикл на торі, що стане атрктором, який самозбуджується. Чорний атрaktor буде залишатись єдиним атрктором системи на усьому проміжку  $\alpha_2 \in (8,659; 8.94)$ . Проте, в середині цього проміжку, в околі значення  $\alpha_2 = 8.793$  із чорним атрктором відбувається жорстка біфуркація типу «граничний цикл - хаос» (переміжність), внаслідок якої чорний атрaktor стає хаотичним.

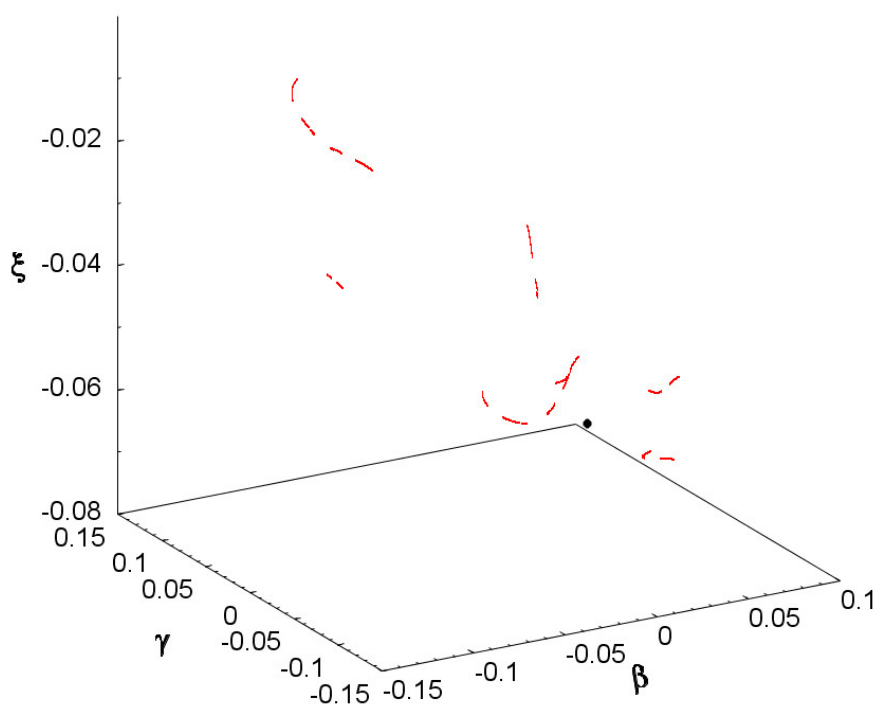


Рис. 3.12: Переріз Пуанкаре чорного граничного циклу та червоного хаотичного атрактора при  $\alpha_2 = 8.647$ .

При  $\alpha_2 = 8.94$ , вже втретє, в системі (3.2) з'являється ще один атрактор. І в системі співіснують чорний хаотичний атрактор та червоний граничний цикл. Проекції фазових портретів чорного та червоного атракторів представлені на рис. 3.13а та рис. 3.13б відповідно.

Порівнюємо хаос чорного атрактора за значення  $\alpha_2 = 8.94$  та червоного при  $\alpha_2 = 8.647$  (рис. 3.11). Хаос чорного атрактора є більш розвиненим ніж хаос червоного у тому сенсі, що старший ляпуновський показник чорного  $\lambda_1 \sim 4 \cdot 10^{-2}$  є на порядок більшим, ніж відповідний показник червоного  $\lambda_1 \sim 2 \cdot 10^{-3}$  (рис. 3.3). Це свідчить про те, що дві близькі траєкторії швидше розбігаються одна від одної з плином часу. Крім того, чорний хаотичний атрактор має більш складну структуру про що свідчить складним чином улаштований фазовий портрет, проекція якого зображена на рис. 3.13а, та переріз Пуанкаре на рис. 3.14. Додатково зауважимо, що переріз Пуанкаре чорного атрактора схожий на хмару хаотичних точок, що свідчить про неможливість звести дослідження до одновимірному дискретного відображення

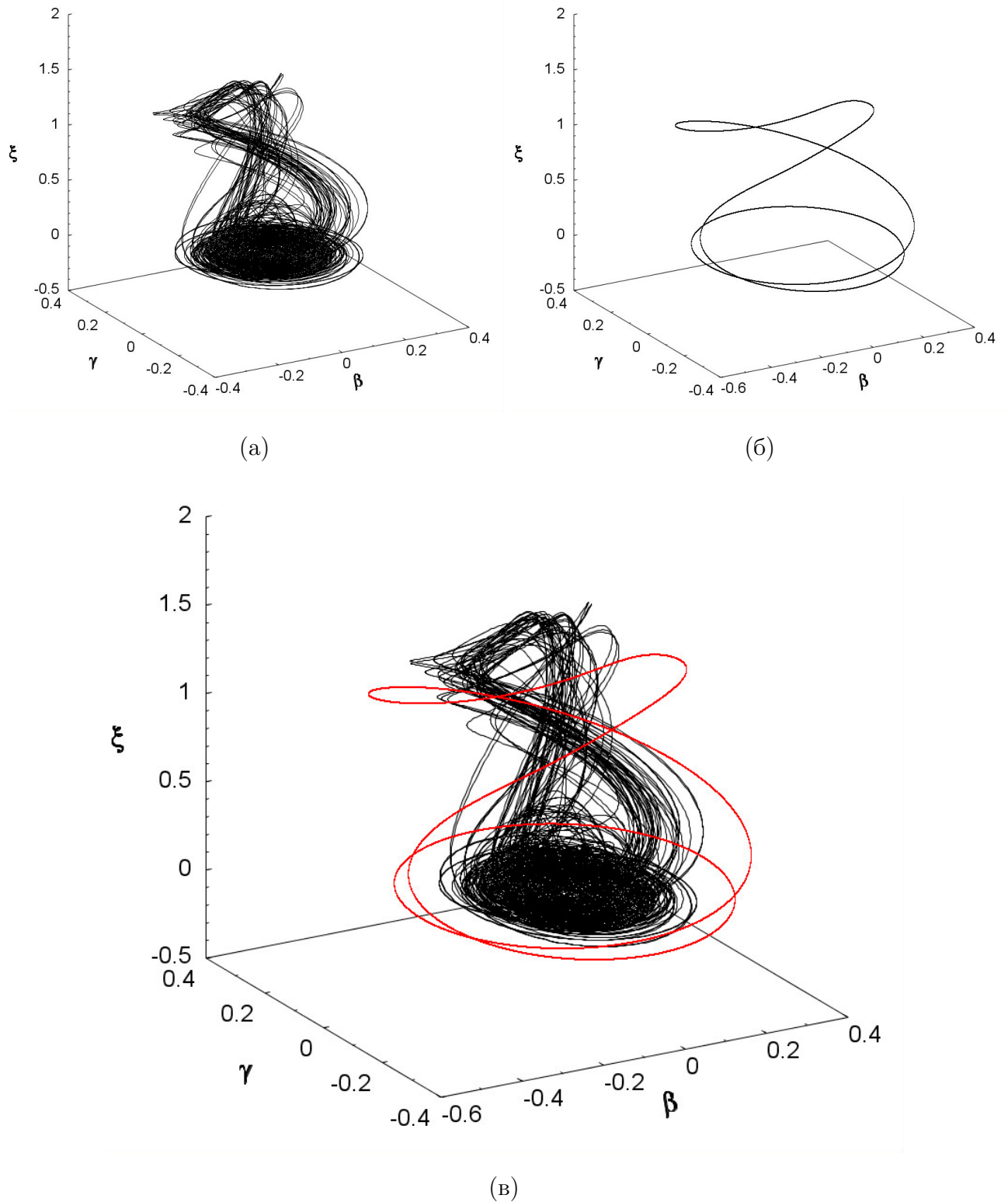


Рис. 3.13: Проекції фазових портретів при  $\alpha_2 = 8.958$ : хаотичного атрактора (чорний) (а); граничного циклу (червоний) – рідкісного атрактора (б); чорного та червоного одночасно (в).

як це було на рис. 3.12.

Переріз Пуанкаре на рис. 3.14 побудований за значення біфуркаційного



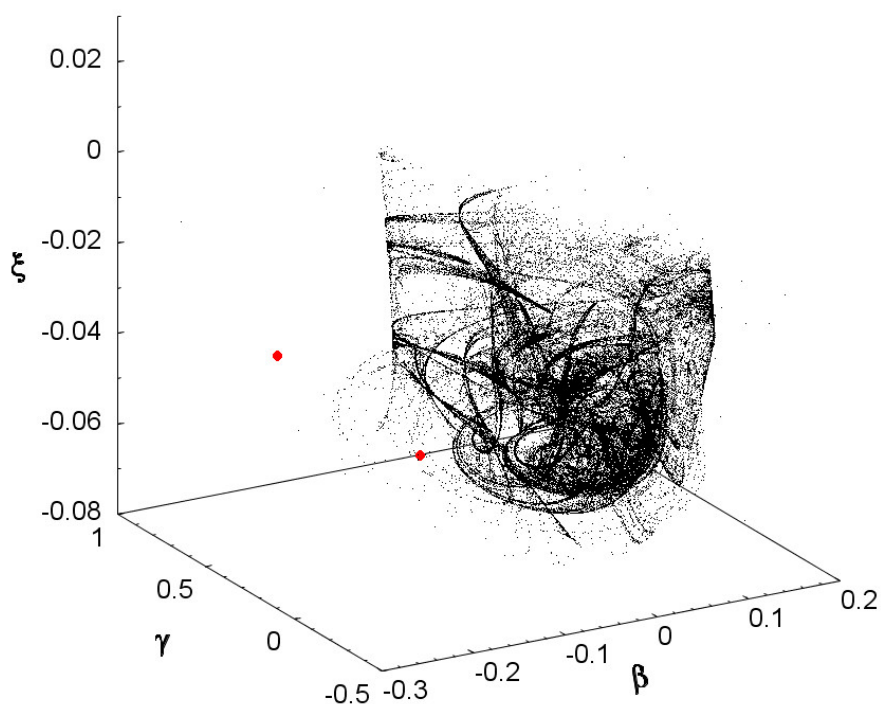
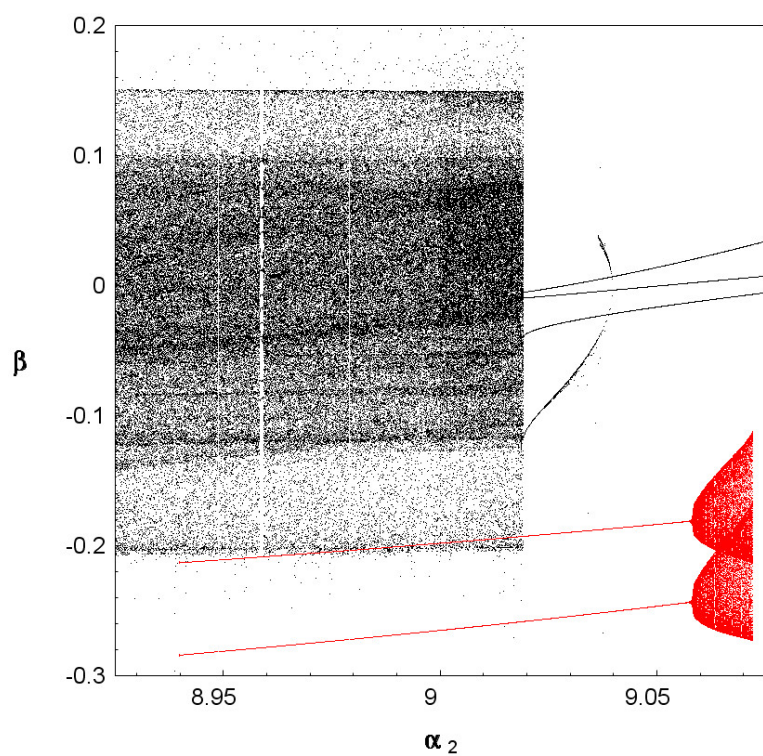


Рис. 3.14: Переріз Пуанкаре чорного хаотичного атрактора та червоного граничного циклу при  $\alpha_2 = 8.958$ .

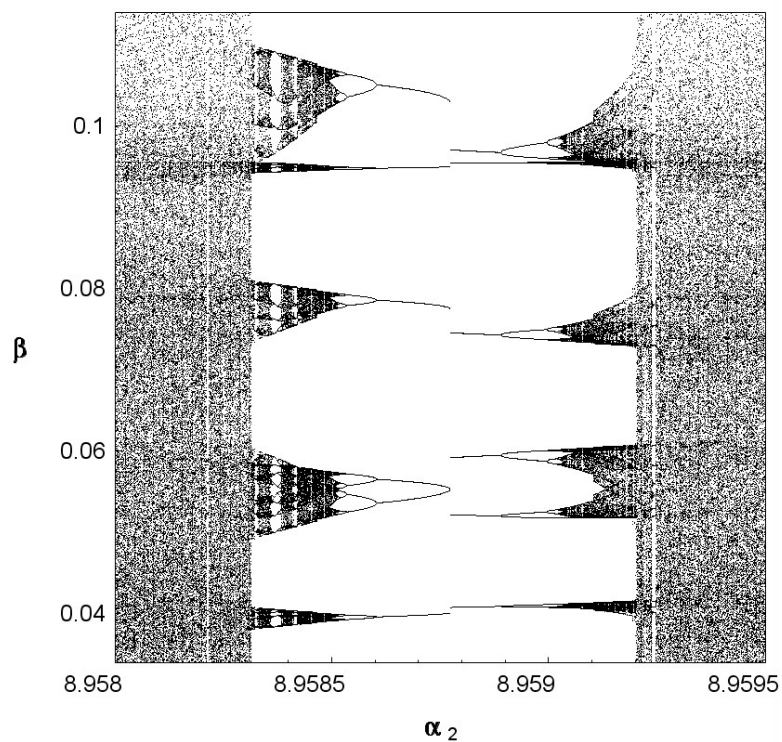
параметра  $\alpha_2 = 9.958$  для пари чорний хаотичний атрактор + червоний граничний цикл. На рис. 3.14 присутні чорна хаотична хмара, яка відповідає точкам перетину чорного атрактора з січною, та пара червоних точок, які відповідають точка перетину червоного граничного циклу з січною. Кількість точок перетину чорного хаотичного з січною буде нескінченно зростати зі збільшенням часу інтегрування та є неможливим передбачити ні точки перетину з січною ні моменти часу в які ці перетини відбувається. У той час як кількість точок перетину червоного періодичного атрактора з січною є обмеженою і кожна точка повторюється строго через період.

Область значень біфуркаційного параметра  $\alpha_2$  за якої співіснують аттрактори, а також їх фазо-параметрична характеристика представлена на рис. 3.15а.

Поведінка пари співіснуючих аттракторів у термінах рідкості та прихованості є, у цьому випадку, досить скудою, оскільки чорний атрактор є таким, що самозбуджується. І, крім того, його басейн притягання займає значну



(a)



(б)

Рис. 3.15: Фазо-параметрична характеристика  $\alpha_2 \in [8.925; 9.075]$  (a); вікно періодичності чорного атрактора  $\alpha_2 \in [8.958; 9.9595]$  (б).

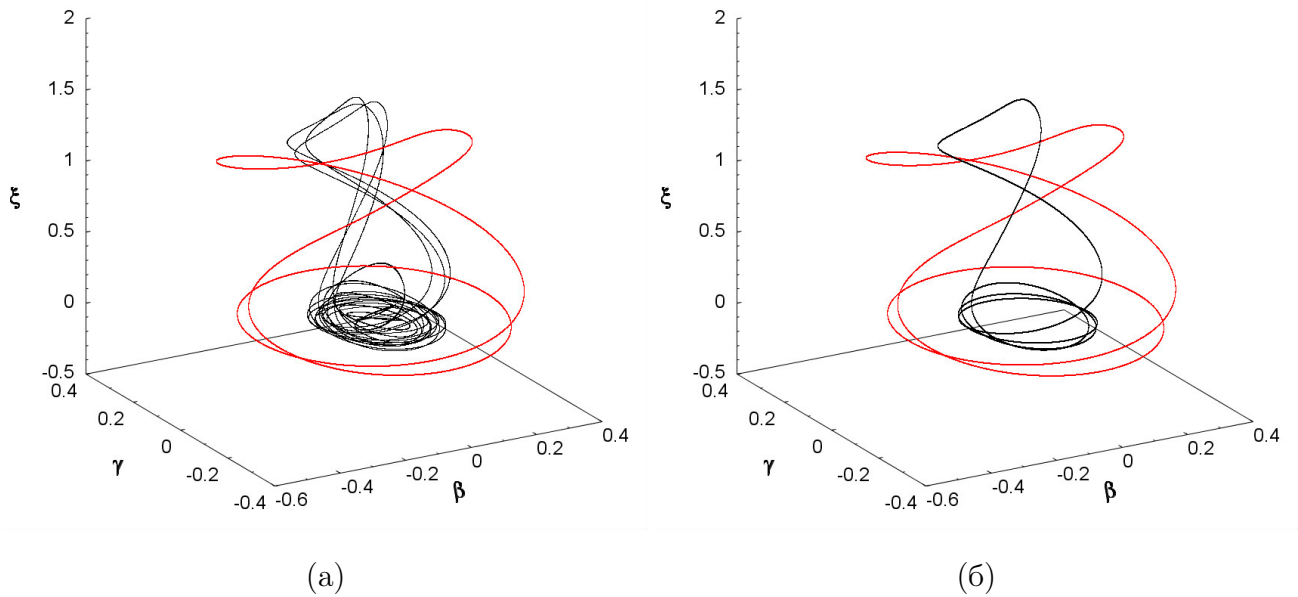


Рис. 3.16: Проекція фазових портретів чорного та червоного (рідкісного та прихованого) граничних циклів разом: у вікні періодичності при  $\alpha_2 = 8.959$  (а); поза вікном періодичності при  $\alpha_2 = 9.04$  (б).

більшість фазового простору у порівнянні з червоним атрактором, що робить останній як рідкісним так і прихованим атрактором. Але, на відмінну від попередніх випадків, ця пара співіснуючих атракторів не змінює своєї поведінки на всьому проміжку співіснування. Тобто, на всьому проміжку співіснування чорний атрактор є таким, що самозбуджується, а червоний, у свою чергу, є прихованим та відповідає ознаці рідкісного атрактора.

Серед іншого, ця пара співіснуючих атракторів є цікавою і тим, що обидва атрактори зазнають біфуркацій в області співіснування рис. 3.15а.

Почнімо з того, що розглянемо вікно періодичності чорного атрактора. Як видно з фрагмента фазо-параметричної характеристики на рис. 3.15б, що представляє відповідне вікно, у сценаріях переходу до хаосу чорного атрактора є симетрія. Цього разу перехід до хаосу відбувається за сценарієм Помо-Манневілья у напрямках до центрів симетрії, і за сценарієм Фейгенбаума у напрямках від центрів симетрії. На відмінну від сценарію переходу до хаосу червоного хаотичного атрактора попередньої пари співіснуючих атракторів (рис. 3.10), де була серія сценаріїв Фейгенбаума до центрів симетрії та серія

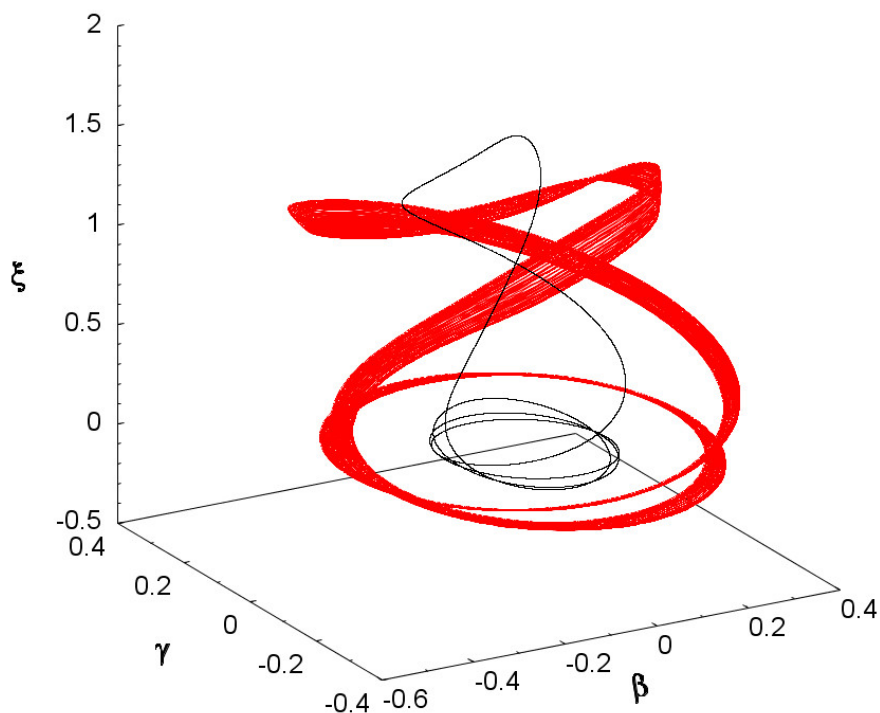


Рис. 3.17: Проекція фазових портретів чорного граничного циклу та червоного (рідкісного) інваріантного тора разом при  $\alpha_2 = 9.07$ .

сценаріїв Помо-Манневілля від центра симетрії.

Після проходження всієї низки вікон періодичності чорний хаотичний аттрактор за одну жорстку біфуркацію в околі значення  $\alpha_2 = 9.02$  перетворюється у граничний цикл, залишаючись таким до кінця досліджуваного інтервалу. Проекція фазових портретів пар граничний цикл + граничний цикл всередині та зовні вікон періодичності чорного аттрактора зображені на рис. 3.16а та рис. 3.16б відповідно.

Червоний аттрактор, у свою чергу, також має біфуркацію в околі  $\alpha_2 = 9.06$  в результаті якої граничний цикл, який збільшує свою область локалізації разом зі збільшенням біфуркаційного параметра, перетворюється на інваріантний тор. Проекція фазових портретів пари аттракторів інваріантний тор + граничний цикл представлено на рис. 3.17.

За значення біфуркаційного параметра  $\alpha_2 = 9.075$  басейн притягання червоного аттрактора вироджується у порожню множину, тобто червоний аттрактор припиняє існувати. І в системі п'єзокерамічний ви-

промінювач – генератор існує єдиний чорний граничний цикл в околі положення рівноваги.

### 3.4. Врахування запізнення

Усі проведені вище дослідження не враховували важливий фактор як запізнення впливу генератора на випромінювач та навпаки. Зазначимо, що запізнення завжди присутнє в реальних динамічних системах через обмеження швидкості передачі сигналів: швидкість струму, механічного стискання і розтискання тощо. В одних випадках врахування запізнення не призводить до суттєвих змін характеристик динамічних систем. В інших випадках таке врахування може призвести до якісної зміни існуючих, а також появи нових поведінок досліджуваної динамічної системи.

Повернемося до системи генератор – п'єзокерамічний випромінювач. Припустимо, що в цій системі наявне постійне запізнення сигналу впливу генератора на випромінювач та позначимо його через  $\rho$ . Будемо також вважати, що запізнення сигналу впливу випромінювача на генератор також рівне  $\rho$ . Тоді система диференціальних рівнянь, що описує взаємодію системи генератор – п'єзокерамічний випромінювач (3.1) буде мати вигляд [16; 78; 93]:

$$\ddot{\phi}(t) + \omega_0^2 \phi(t) = a_1 \dot{\phi}(t) + a_2 \dot{\phi}^2(t) - a_3 \dot{\phi}^3(t) - a_4 V(t - \rho); \quad (3.10)$$

$$\ddot{V}(t) + \omega_1^2 V(t) = a_5 \phi(t - \rho) + a_6 \dot{\phi}(t) - a_7 \dot{V}(t).$$

Параметри системи (3.10) аналогічні тим, що були введені при розгляді системи рівнянь (3.1).

Знову перейдемо до безрозмірних змінних:

$$\begin{aligned} \tau = \omega_0 t, \quad \xi(\tau) = \frac{\phi(\tau)\omega_0}{E_g}, \quad \zeta(\tau) = \frac{d\xi(\tau)}{d\tau}, \\ \beta(\tau) = \frac{V(\tau)}{E_g}, \quad \gamma(\tau) = \frac{d\beta(\tau)}{d\tau}. \end{aligned}$$

Отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь [16]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} &= \zeta(\tau); \\
\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} &= -\xi(\tau) + \alpha_1\zeta(\tau) + \alpha_2\zeta^2(\tau) - \alpha_3\zeta^3(\tau) + \alpha_4\beta(\tau - \delta); \\
\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} &= \gamma(\tau); \\
\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= -\alpha_0\beta(\tau) + \alpha_5\xi(\tau - \delta) + \alpha_6\zeta(\tau) - \alpha_7\gamma(\tau),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

де значення коефіцієнтів  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_7$  визначаються формулами (3.3), а безрозмірне запізнення  $\delta = \omega_0\rho$ .

### 3.5. Порівняння різних методів апроксимації запізнень

Розглянемо методи перетворення систем диференціальних рівнянь із запізненням у системи звичайних диференціальних рівнянь. Перший метод базується на припущення, що фактор запізнення  $\delta$  достатньо малий аби мало сенс наступне співвідношення.

$$\begin{aligned}
\beta(\tau - \delta) &\approx \beta(\tau) - \delta \cdot \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} = \beta(\tau) - \delta \cdot \gamma(\tau); \\
\xi(\tau - \delta) &\approx \xi(\tau) - \delta \cdot \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \xi(\tau) - \delta \cdot \zeta(\tau).
\end{aligned}$$

Підставивши отримані співвідношення у (3.11), матимемо

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} &= \zeta(\tau); \\
\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} &= -\xi(\tau) + \alpha_1\zeta(\tau) + \alpha_2\zeta^2(\tau) - \alpha_3\zeta^3(\tau) + \alpha_4[\beta(\tau) - \delta \cdot \gamma(\tau)]; \\
\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} &= \gamma(\tau); \\
\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= -\alpha_0\beta(\tau) + \alpha_5[\xi(\tau) - \delta \cdot \zeta(\tau)] + \alpha_6\zeta(\tau) - \alpha_7\gamma(\tau).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Система рівнянь (3.12) є системою звичайних диференціальних рівнянь. Фактор запізнення  $\delta$  зараз входить в отриману систему як додатковий параметр.

Зауважимо, що цей метод можна застосовувати як до систем із постійним запізненням, так і до систем із змінним запізненням (тобто, фактор запізнення може бути якоюсь функцією від часу  $\delta = \delta(\tau)$ ).

Інший, точніший метод апроксимації запізнення може бути застосований лише до систем з постійним запізненням  $\delta$ . Поділимо сегмент  $[-\delta; 0]$  на  $m$  рівних частин і введемо нові функції:

$$\beta_i(\tau) = \beta\left(\tau - \frac{i\delta}{m}\right), \quad \xi_i(\tau) = \xi\left(\tau - \frac{i\delta}{m}\right), \quad i \in \{0, \dots, m\}.$$

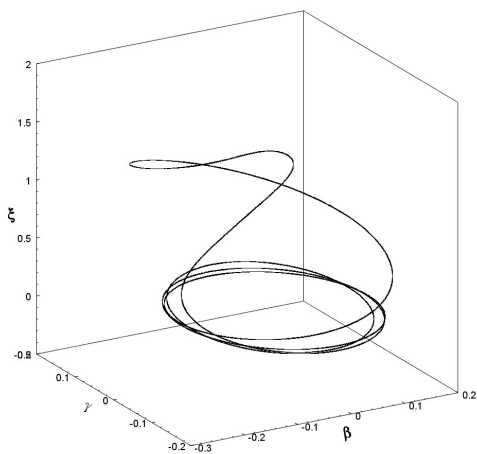
Використовуючи метод скінченних різниць для апроксимації похідної, система (3.11) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_0(\tau)}{d\tau} &= \zeta_0(\tau); \\ \frac{d\zeta_0(\tau)}{d\tau} &= -\xi_0(\tau) + \alpha_1\zeta_0(\tau) + \alpha_2\zeta_0^2(\tau) - \alpha_3\zeta_0^3(\tau) + \alpha_4\beta_m(\tau); \\ \frac{d\beta_0(\tau)}{d\tau} &= \gamma_0(\tau); \\ \frac{d\gamma_0(\tau)}{d\tau} &= -\alpha_0\beta_0(\tau) + \alpha_5\xi_m(\tau) + \alpha_6\zeta_0(\tau) - \alpha_7\gamma_0(\tau); \\ \frac{d\xi_i(\tau)}{d\tau} &= \frac{m}{\delta}[\xi_{i-1}(\tau) - \xi_i(\tau)], \quad i \in \{1, \dots, m\}; \\ \frac{d\beta_i(\tau)}{d\tau} &= \frac{m}{\delta}[\beta_{i-1}(\tau) - \beta_i(\tau)], \quad i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

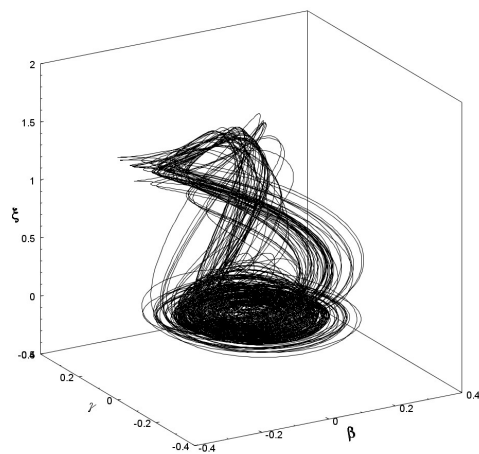
Система (3.13) є системою звичайних диференціальних рівнянь  $(2m + 4)$ -ого порядку. Фактор запізнення  $\delta$  входить як додатковий параметр системи.

Варто зазначити, що розв'язки  $\xi, \zeta, \beta, \gamma$  системи (3.11) апроксимуються розв'язками  $\xi_0, \zeta_0, \beta_0, \gamma_0$  системи (3.13) відповідно. І  $\xi_0 \rightarrow \xi$ ,  $\zeta_0 \rightarrow \zeta$ ,  $\beta_0 \rightarrow \beta$ ,  $\gamma_0 \rightarrow \gamma$  при  $m \rightarrow \infty$ .

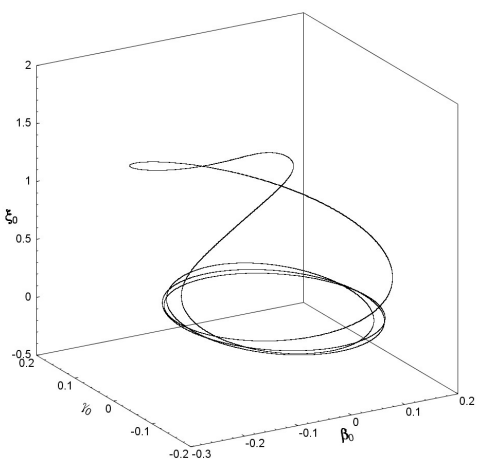
Таким чином, ми можемо дослідити вплив запізнення на поведінку динамічної системи генерато-п'єзокерамічний випромінювач використовуючи як систему рівнянь (3.12) так і систему (3.13). Використання другого методу апроксимації запізнення, що зводить систему диференціальних рівнянь



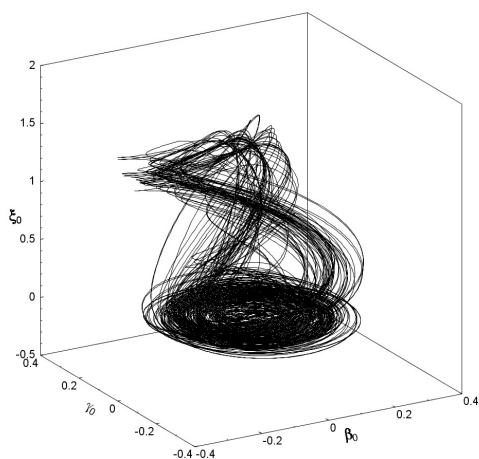
(а) Система (3.12),  $\delta = 0.01$ .



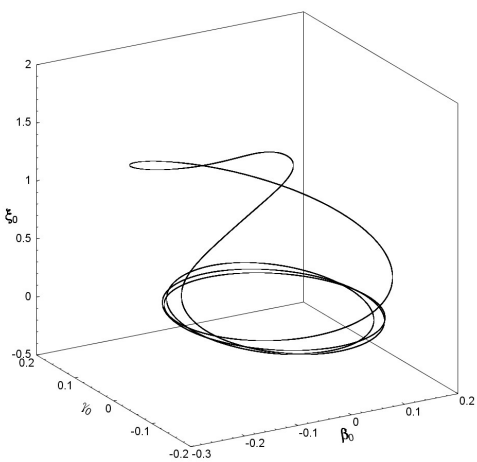
(б) Система (3.12),  $\delta = 0.04$ .



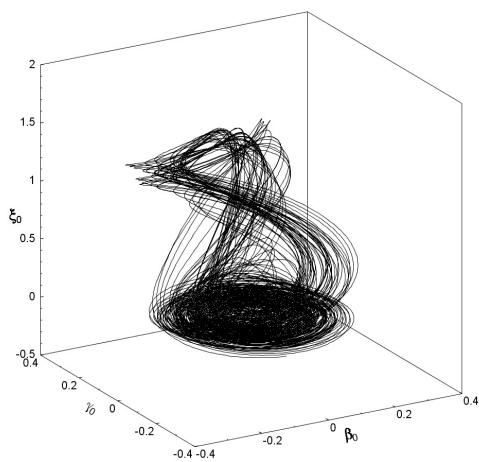
(в) Система (3.13),  $m = 3$ ,  $\delta = 0.01$ .



(г) Система (3.13),  $m = 3$ ,  $\delta = 0.04$ .



(д) Система (3.13),  $m = 30$ ,  $\delta = 0.01$ .



(е) Система (3.13),  $m = 30$ ,  $\delta = 0.04$ .

Рис. 3.18: Проекції фазових портретів.



із запізненням до системи звичайних диференціальних рівнянь дозволяє, вцілому, отримати точніші результати при вивченні поведінки динамічної системи. Але, з іншого боку, його використання збільшує час комп'ютерних обчислень. Тому має бути баланс між швидкістю обчислень та їх точністю.

Ми будемо шукати цей баланс на конкретних прикладах. Покладемо  $\alpha_0 = 0.995$ ,  $\alpha_1 = 0.0535$ ,  $\alpha_2 = 9.075$ ,  $\alpha_3 = 9.95$ ,  $\alpha_4 = -0.103$ ,  $\alpha_5 = -0.0604$ ,  $\alpha_6 = -0.12$ ,  $\alpha_7 = 0.01$ . В якості біфуркаційного залишимо параметр  $\delta$ .

На рис. 3.18 представлено результати порівняння різних методів. Зокрема, на рис. 3.18а зображена проєкція фазового портрету граничного циклу для системи (3.12) при  $\delta = 0.01$ . Відповідно, на рис. 3.18в та рис. 3.18д представлено проєкції фазового портрету граничного циклу за тих самих значень параметрів, але для системи (3.13). На рис. 3.18в обчислення проводились за значення  $m = 3$ , у той час як на рис. 3.18д побудований за значення  $m = 30$ . Відповідно, на рис. 3.18б, рис. 3.18г, рис. 3.18е наведено проєкції фазового портрету хаотичного атрактора при  $\delta = 0.04$ , для системи (3.12) для системи (3.13) ( $m = 3$ ), для системи (3.13) ( $m = 30$ ) відповідно.

Зауважимо, що визначення типу атрактора (граничного циклу або хаотичного атрактора) було проведено на основі розрахунку та аналізу спектра ляпуновських характеристичних показників. Як видно на рис. 3.18, усі побудовані фазові портрети майже збігаються. Однак тривалість комп'ютерних обчислень значно збільшується при застосуванні другого методу перетворення системи з запізненням (3.11) на систему без запізнення (3.13). При  $m = 30$  тривалість комп'ютерних обчислень за другим методом більша за тривалість комп'ютерних обчислень за першим методом більше ніж в 5000 разів. Крім того, побудовані фазові портрети та характеристичні показники ляпунова практично збігаються. Тому всі подальші аналізи впливу запізнення були проведені використовуючи перший метод апроксимації системи з запізненням (3.12).

### 3.6. Вплив запізнення на атрактори системи

Дослідимо вплив фактора запізнення на появу чи зникнення різних типів атракторів системи генератор–п'єзокерамічний випромінювач.

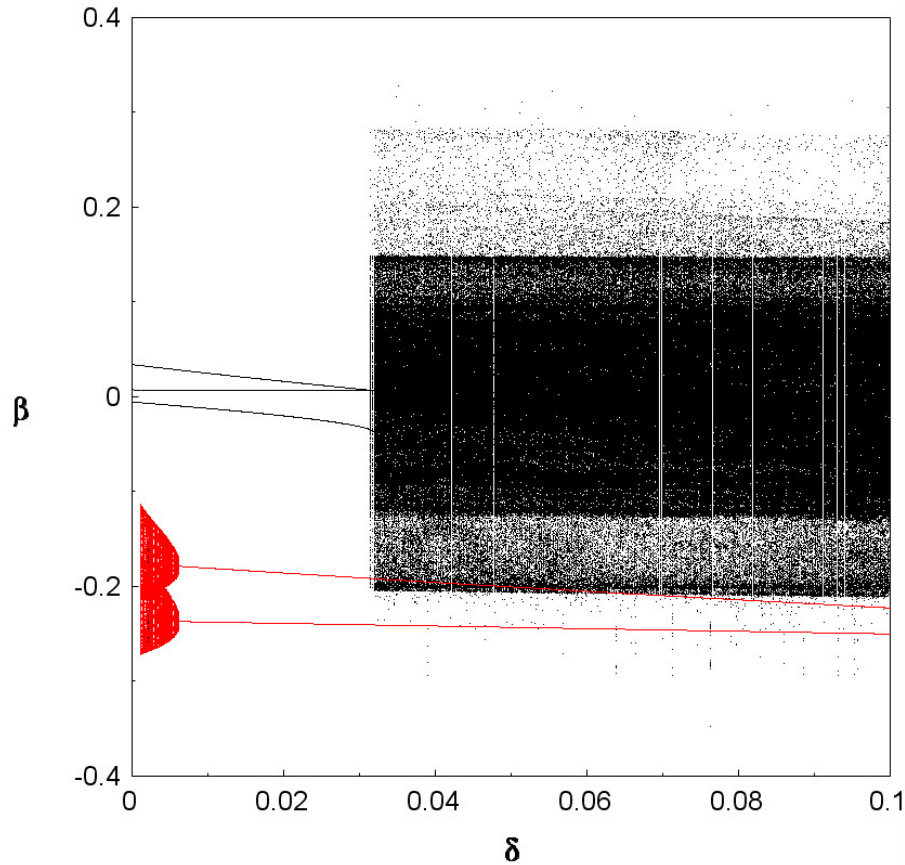
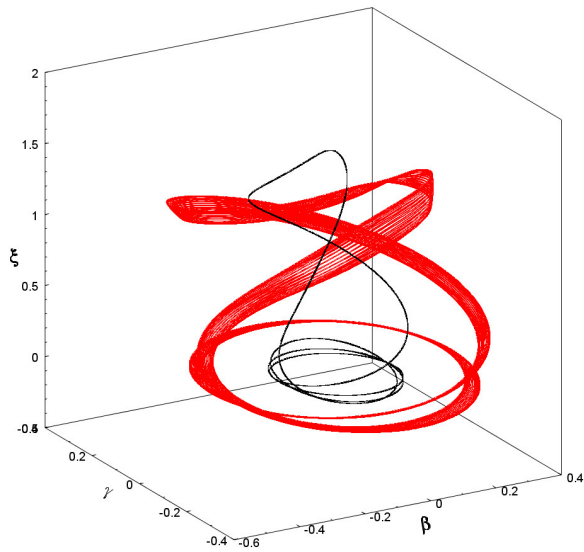


Рис. 3.19: Фазо-параметрична характеристика при  $\delta \in [0; 0.1]$ .

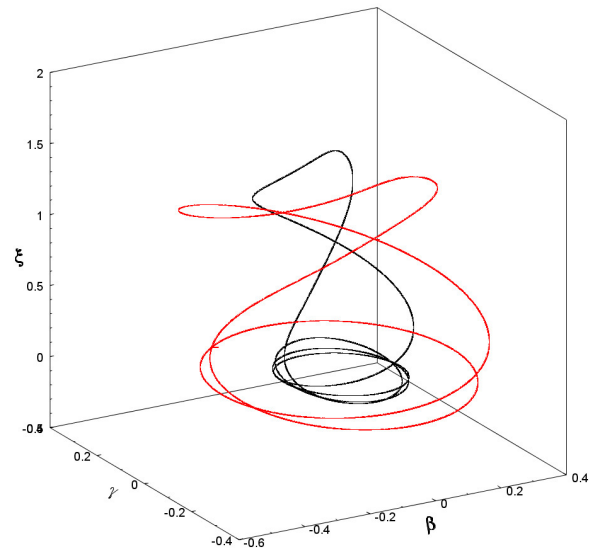
На рис. 3.19 показані фазові параметричні характеристики пари атракторів, які співіснують у системі (3.11).

За відсутності запізнення ( $\delta = 0$ ) в системі існує лише один чорний атрактор, який представляє собою стійкий граничний цикл та є таким, що самозбуджується.

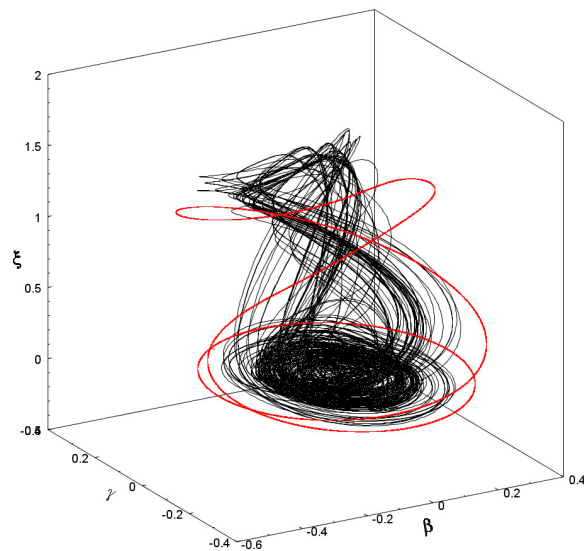
Однак, навіть при дуже малих значеннях запізнення ( $\delta = 0.0015$ ), в системі з'являється ще один атрактор - інваріантний тор (червона область на рис. 3.19). Цей інваріантний тор є прихованим та рідкісним атрактором. При подальшому збільшенні затримки до  $\delta = 0.005$ , відбувається біфуркація червоного атрактора типу «тор – цикл». Інваріантний тор руйнується, а в си-



(a)



(б)



(в)

Рис. 3.20: Проекції фазових портретів при:  $\delta = 0.0015$  (а);  $\delta = 0.01$  (б);  $\delta = 0.035$  (в).

стемі народжується резонансний граничний цикл. За подальшого збільшення запізнення в обраному діапазоні, біфуркації червоного атрактора вже не відбуваються.

Розглянемо біфуркації чорного атрактора. Як можна побачити на

рис. 3.19 при значенні фактора запізнення  $\delta = 0.032$  за одну жорстку біфуркацію чорний граничний цикл зникає і в системі з'являється чорний хаотичний атрактор. Цей хаотичний атрактор існує для більшості значень  $\delta > 0.032$ . Цьому атрактору відповідає щільна чорна область на рис. 3.19, крім того цей атрактор є таким, що самозбуджується в цій області.

Проте, цікавою є поведінка співіснуючих атракторів при  $\delta > 0.032$  у областях де на фазо-параметричній характеристиці чорного атрактора (рис. 3.19) присутні "вікна". Як правило, ці вікна відповідають вікнам періодичності фазо-параметричної характеристики хаотичного атрактора. Але в нашому випадку хаотичний атрактор не перетворюється на періодичний режим у більшості цих вікон. Чорний атрактор все ще залишається хаотичним у цих вікнах, але, натомість, він втрачає статус такого, що самозбуджується. Тобто, він перетворюється на прихований хаотичний атрактор, оскільки траєкторії, які стартують з околу положення рівноваги прямують до червоного атрактора. Що, в свою чергу, означає, що червоний граничний цикл стає таким, що самозбуджується в цих вікнах. Крім того, фазові портрети прихованого чорного хаотичного атрактора не відрізняються від фазових портретів хаотичного чорного атрактора, що самозбуджується. Тому на рис. 3.20в наводиться проєкції фазових портретів пари співіснуючих атракторів, що відповідають одному з цих вікон "прихованості".

Проєкції фазових портретів співіснуючих атракторів, що відповідають всім біфуркаціям останніх (граничний цикл – інваріантний тор; граничний цикл – граничний цикл; граничний цикл – хаотичний атрактор) представлено на рис. 3.20.

Додатково відмітимо, що поведінка динамічної системи при врахуванні фактора запізнення нагадує поведінку системи без фактору запізнення, яку ми спостерігали на рис. 3.15а, але у зворотному напрямку. І цього разу хаотичний атрактор вперше набув стану прихованості.

### 3.7. Висновки за розділом

У розділі було проведено дослідження системи «LC-генератор – п'єзокерамічний випромінювач». Для системи побудовано карту динамічних режимів на якій виявлено всі можливі типи граничних множин, які можуть бути притаманні чотирьохвимірній системі диференціальних рівнянь. Виявлено атипове чергування сценаріїв Фейгенбаума та Манневілля-Помо при переходах від регулярних до хаотичних атракторів. Знайдено значення параметрів за яких у системі співіснують два атрактори.

Для знайдених атракторів побудовано проєкції фазових портретів, фазо-параметричні характеристики та переріз Пуанкаре. Вперше було проведено класифікацію існуючих атракторів у термінах прихованості, рідкісності та самозбудженості. Проаналізовано вплив запізнення на зазначену класифікацію.

## 4. Система сферичний маятник – електродвигун

### 4.1. Математична модель

Розглянемо систему, зображену на рис. 4.1. Кривошипно-повзунний механізм з'єднує ротор електродвигуна з точкою підвісу фізичного маятника, який може здійснювати просторові коливання. Як відомо, такий маятник називається сферичним.

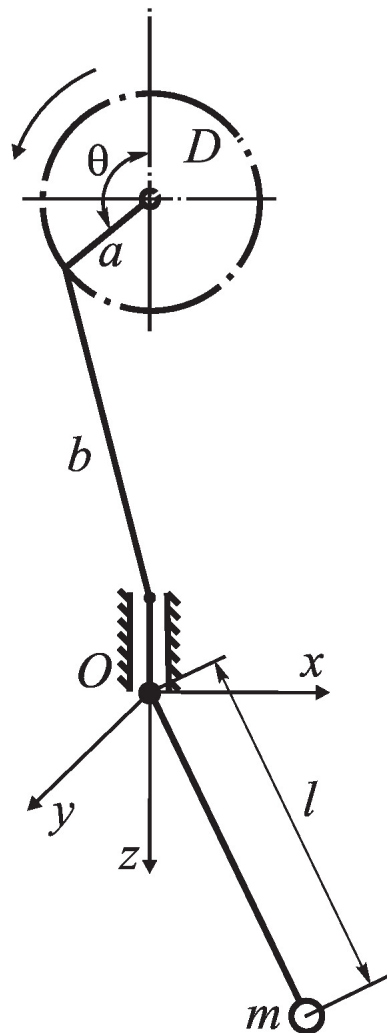


Рис. 4.1: Система маятник – електродвигун.

Введемо декартову систему координат  $Oxyz$ , як показано на рис. 4.1. Позначимо через  $a$ ,  $b$  довжини та повзуна відповідно. Припустимо, що  $b \gg a$

і введемо нові змінні  $\alpha, \beta$  за формулами

$$x = l \sin \alpha, \quad y = l \sin \beta.$$

Рівняння руху системи сферичний маятник – електродвигун обмеженої потужності отримано в [24; 25]. Зауважимо, що при виведенні цих рівнянь використано деякі результати робіт [21–23], в яких сферичний маятник розглядався без урахування взаємодії з джерелом збудження коливань. Отже, рівняння руху системи маятник – електродвигун обмеженої потужності можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} I\ddot{\Theta} = L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) - mla \left[ \ddot{\Theta} \frac{a}{l} \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2 \frac{a}{l} \sin \Theta \cos \Theta + \frac{g}{l} \sin \Theta - \right. \\ \left. - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \sin \Theta - (\alpha \ddot{\alpha} + \beta \ddot{\beta}) \sin \Theta \right]; \\ \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha \beta^2}{2} \right) + \delta_1 \dot{\alpha} + \alpha (\dot{\beta}^2 + \beta \ddot{\beta}) - \\ - \frac{a}{l} \alpha \left( \dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta \right) = 0; \\ \ddot{\beta} + \omega_0^2 \left( \beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\alpha^2 \beta}{2} \right) + \delta_1 \dot{\beta} + \beta (\dot{\alpha}^2 + \alpha \ddot{\alpha}) - \\ - \frac{a}{l} \beta \left( \dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

де  $L(\dot{\Theta})$  – рушійний момент електродвигуна,  $H(\dot{\Theta})$  – внутрішній момент сил опору обертанню ротора електродвигуна,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  – власна частота маятника,  $\delta_1$  – коефіцієнт гасіння сили опору середовища, в якому рухається маятник.

Отримана система диференціальних рівнянь описує складний процес взаємодії обертання вала двигуна (утворення збудливої сили) і просторових коливань маятника. Ця система рівнянь (4.1) є суттєво нелінійною, тобто є неможливим запис точного розв'язку у вигляді аналітичної формули.

Для спрощення системи диференціальних рівнянь (4.1) введемо новий параметр  $\varepsilon = \frac{a}{l}$ . Крім того, будемо вважати, що виконано умови основного

параметричного резонансу, коли швидкість обертання вала двигуна  $\dot{\Theta}$  близька до подвоєної власної частоти маятника  $2\omega_0$ , а саме:

$$\dot{\Theta}(t) = 2\omega_0 + \varepsilon\omega_0 y_3(t).$$

У рівняннях (4.1) зробимо заміну змінних [24]:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[ y_1(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} \right]; \\ \beta(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[ y_4(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} \right].\end{aligned}\tag{4.2}$$

За допомогою цієї заміни ми переходимо у рівняннях (4.1) до нових змінних  $y_1(\tau)$ ,  $y_2(\tau)$ ,  $y_4(\tau)$ ,  $y_5(\tau)$  та повільного часу  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4} \dot{\Theta}(t).$$

Підставимо вирази (4.2) у рівняння (4.1) і проведемо процедуру усереднення за швидким часом  $\Theta(t)$  [94–96]. Після цього, отримаємо таку систему рівнянь [24]:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_2 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_4 + 2y_2; \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_1 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_5 + 2y_1; \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= D(y_1y_2 + y_4y_5) + Ey_3 + F; \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= Cy_4 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_5 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_1 + 2y_5; \\ \frac{dy_5}{d\tau} &= Cy_5 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_4 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_2 + 2y_4.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Відзначимо, що при виведенні системи рівнянь (4.3) використано лінійну апроксимацію [13] статичної характеристики двигуна у випадку, коли

$$\frac{L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta})}{I + 0.5ma^2} = \varepsilon \frac{\omega_0}{2} (N_0 - E\dot{\Theta}) + \varepsilon^2 \dots,$$

тому

$$f = \left( \frac{N_0}{\omega_0} - 2E \right) \frac{l}{a}, \quad D = -\frac{2ml^2}{I + 0.5ma^2}, \quad C = \frac{\delta_1}{\omega_0}.$$



У системі (4.3) параметр  $E$  – кут нахилу статичної характеристики двигуна. Відповідно параметри  $C$ ,  $D$ ,  $F$  залежать від ряду раніше вказаних фізичних і геометричних характеристик системи маятник – електродвигун.

Для подальших дослідження положень рівноваги на предмет їх стійкості, побудуємо якобіан ( $J$ ) системи (4.3). Елементами  $J_{ij}$  такого якобіана є величини:

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= C - \frac{1}{4}(y_1 y_2 + 3y_4 y_5), & J_{12} &= \frac{1}{8}(5y_4^2 - 3y_2^2 - y_1^2 - y_5^2) - y_3 + 2, \\
 J_{13} &= -y_2, & J_{14} &= \frac{1}{4}(5y_2 y_4 - 3y_1 y_5), & J_{15} &= \frac{1}{4}(-3y_1 y_4 - y_2 y_5); \\
 J_{21} &= \frac{1}{8}(3y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 - 5y_5^2) + y_3 + 2, & J_{22} &= C + \frac{1}{4}(y_1 y_2 + 3y_4 y_5), \\
 J_{23} &= y_1, & J_{24} &= \frac{1}{4}(y_1 y_4 + 3y_2 y_5), & J_{25} &= \frac{1}{4}(3y_2 y_4 - 5y_1 y_5); \\
 J_{31} &= D y_2, & J_{32} &= D y_1, & J_{33} &= E, & J_{34} &= D y_5, & J_{35} &= D y_4; \quad (4.4) \\
 J_{41} &= \frac{1}{4}(5y_1 y_5 - 3y_2 y_4), & J_{42} &= \frac{1}{4}(-3y_1 y_4 - y_2 y_5), & J_{43} &= -y_5, \\
 J_{44} &= C + \frac{1}{4}(-3y_1 y_2 - y_4 y_5), & J_{45} &= \frac{1}{8}(5y_1^2 - y_2^2 - y_4^2 - 3y_5^2) - y_3 + 2; \\
 J_{51} &= \frac{1}{4}(y_1 y_4 + 3y_2 y_5), & J_{52} &= \frac{1}{4}(3y_1 y_5 - 5y_2 y_4), & J_{53} &= y_4, \\
 J_{54} &= \frac{1}{8}(y_1^2 - 5y_2^2 + 3y_4^2 + y_5^2) + y_3 + 2, & J_{55} &= C + \frac{1}{4}(3y_1 y_2 + y_4 y_5).
 \end{aligned}$$

Також розглянемо дивергенцію системи, щоб встановити коли системи (4.3) є дисипативною. Як відомо, слід матриці Якобі дорівнює дивергенції системи. Легко визначити, що  $\text{tr} J = 4C + E$ . Отже, дивергенція системи є постійною. Звідси випливає, що система рівнянь (4.3) буде дисипативною при

$$4C + E < 0. \quad (4.5)$$

Величини, що входять у цю нерівність, а саме:  $C$  (зведений коефіцієнт опору середовища) та  $E$  (кут нахилу статичної характеристики електродвигуна) – завжди від’ємні. Тому система (4.3) завжди буде дисипативною.

## 4.2. Положення рівноваги

Почнемо дослідження з встановлення існуючих положень рівноваги системи (4.3). Прирівнюючи до нуля її праві частини, отримуємо нелінійну алгебраїчну систему рівнянь. Розв'язками такої системи будуть положеннями рівноваги системи (4.3). Очевидно, що одне з положень рівноваги має вигляд

$$\mathbf{y}_0 = (0, 0, -\frac{F}{E}, 0, 0). \quad (4.6)$$

Це положення рівноваги – єдине положення рівноваги, яке є ізольованим у тому сенсі, що існує його оточення в якому воно буде єдиною граничною множиною системи. Решту положень рівноваги системи (4.3), якщо вони існують, найбільш доцільно шукати за допомогою чисельних методів. Наприклад, за методом Ньютона.

Для дослідження стійкості положення рівноваги (4.6) складемо характеристичне рівняння системи першого наближення

$$\begin{aligned} (J - \lambda I)|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0} = \\ = \left( \lambda - C - \frac{\sqrt{4E^2 - F^2}}{E} \right)^2 (\lambda - E) \left( \lambda - C + \frac{\sqrt{4E^2 - F^2}}{E} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо наступну теорему

**Теорема 4.1.** *Положення рівноваги (4.6) буде асимптотично стійким при виконанні умов*

$$C < 0, \quad E < 0, \quad C^2 > 4 - \frac{F^2}{E^2}. \quad (4.7)$$

Чисельні розрахунки показали, що крім ізольованого положення рівноваги (4.6) існує нескінченна кількість неізольованих положень рівноваги. Ці положення рівноваги утворюють власне сімейство, яке існує у вигляді замкненої лінії у фазовому просторі. Умови асимптотичної стійкості такого сімейства можна отримати за допомогою якобіана (4.4) і теореми Ляпуна-Шіпара [97]. Варто зауважити, що ці умови надзвичайно громіздкі. Їх аналіз практично можна здійснювати лише за допомогою комп'ютерних обчислень.

Знайдемо це нескінченне сімейство положень рівноваги аналітично. Для цього прирівняємо праві частини (4.3) до нулів, після чого матимемо

$$\left\{ \begin{array}{l} Cy_1 - \left[ y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_2 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_4 + 2y_2 = 0; \\ Cy_2 + \left[ y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_1 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_5 + 2y_1 = 0; \\ D(y_1y_2 + y_4y_5) + Ey_3 + F = 0; \\ Cy_4 - \left[ y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_5 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_1 + 2y_5 = 0; \\ Cy_5 + \left[ y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_4 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_2 + 2y_4 = 0. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Припустимо, що  $E \neq 0$  та  $C \neq 0$ , і будемо шукати ненульові положення рівноваги. Тоді систему (4.8) можна переписати у наступному вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} Cy_1 - \left[ -\frac{1}{E}(D(y_1y_2 + y_4y_5) + F) + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_2 - \\ \quad - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_4 + 2y_2 = 0; \\ Cy_2 + \left[ -\frac{1}{E}(D(y_1y_2 + y_4y_5) + F) + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_1 - \\ \quad - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_5 + 2y_1 = 0; \\ y_3 = -\frac{1}{E}(D(y_1y_2 + y_4y_5) + F); \\ Cy_4 - \left[ -\frac{1}{E}(D(y_1y_2 + y_4y_5) + F) + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_5 + \\ \quad + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_1 + 2y_5 = 0; \\ Cy_5 + \left[ -\frac{1}{E}(D(y_1y_2 + y_4y_5) + F) + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_4 + \\ \quad + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_2 + 2y_4 = 0. \end{array} \right.$$

Покладемо

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{E}(D(y_1y_2 + y_4y_5) + F) + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2); \\ V &= \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4), \end{aligned} \quad (4.9)$$

матимемо

$$\begin{cases} Cy_1 + (2 - K)y_2 - Vy_4 = 0; \\ (2 + K)y_1 + Cy_2 - Vy_5 = 0; \\ Vy_1 + Cy_4 + (2 - K)y_5 = 0; \\ Vy_2 + (2 + K)y_4 + Cy_5 = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Помітимо, що якщо помножити рівняння на  $y_1, y_2, y_4, y_5$  відповідно, а потім скласти, то отримаємо наступне співвідношення

$$C(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) + 4(y_1y_2 + y_4y_5) = 0. \quad (4.11)$$

Далі помітимо, що якщо помножити перше та третє рівняння на  $y_5$  та  $y_2$  відповідно, а потім відняти, то отримаємо

$$\begin{aligned} C(y_1y_5 - y_2y_4) - V(y_1y_2 - y_4y_5) &= 0 \xLeftrightarrow{(4.9)} \\ C\frac{4}{3}V - V(y_1y_2 + y_4y_5) &= 0 \iff \\ \begin{cases} V = 0; \\ y_1y_2 + y_4y_5 - C\frac{4}{3} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Покажемо, що другий випадок неможливий підставивши його у (4.11):

$$\begin{aligned} C(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) + 4(y_1y_2 + y_4y_5) &= 0 \iff \\ C(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) + 4C\frac{4}{3} &= 0 \iff \\ (y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) &= -\frac{16}{3}, \end{aligned}$$

що неможливо, оскільки ліва частина останньої рівності завжди невід'ємна. Таким чином, маємо, що  $V = 0$ . Перепишемо систему рівнянь (4.10) з врахуванням цієї інформації.

$$\left\{ \begin{array}{l} Cy_1 + (2 - K)y_2 = 0; \\ (2 + K)y_1 + Cy_2 = 0; \\ Cy_4 + (2 - K)y_5 = 0; \\ (2 + K)y_4 + Cy_5 = 0; \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Cy_1 + (2 - K)y_2 = 0; \\ \frac{1}{C}(K^2 + C^2 - 4)y_2 = 0; \\ Cy_4 + (2 - K)y_5 = 0; \\ \frac{1}{C}(K^2 + C^2 - 4)y_5 = 0. \end{array} \right.$$

Остання система буде мати ненульові розв'язки при  $\frac{1}{C}(K^2 - 4 + C^2) = 0 \iff K^2 - 4 + C^2 = 0 \iff K = \pm\sqrt{4 - C^2}$ . А її розв'язки можна записати у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = -\frac{2 - K}{C}x; \\ y_2 = x; \\ y_4 = -\frac{2 - K}{C}z; \\ y_5 = z. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Проаналізуємо рівність отриману для  $K$ :

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{E}(D(y_1y_2 + y_4y_5) + F) + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) = \\ &= -\frac{D}{E}(y_1y_2 + y_4y_5) - \frac{F}{E} + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \stackrel{(4.11)}{=} \\ &= \frac{-D - C}{E} \frac{1}{4}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) - \frac{F}{E} + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) = \\ &= \frac{2DC + E}{8E}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) - \frac{F}{E} = \pm\sqrt{4 - C^2} \implies \\ &\quad (y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) = \frac{8F \pm 8E\sqrt{4 - C^2}}{2DC + E}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Покладемо  $R^2 = \frac{8F \pm 8E\sqrt{4 - C^2}}{2DC + E}$ . Повертаючись до (4.11), матимемо

$$y_1y_2 + y_4y_5 = -\frac{1}{4}CR^2. \quad (4.14)$$

Підставивши (4.12) у (4.13), матимемо

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{2-K}{C} \right)^2 + 1 \right] (x^2 + z^2) = R^2 \iff \\ & \frac{(2-K)^2 + C^2}{C^2} (x^2 + z^2) = R^2 \iff \\ & x^2 + z^2 = \frac{R^2 C^2}{(2-K)^2 + C^2} \iff \\ & x = \pm \sqrt{\frac{R^2 C^2}{(2-K)^2 + C^2} - z^2}. \end{aligned}$$

Отже

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \mp \frac{2-K}{C} \sqrt{\frac{R^2 C^2}{(2-K)^2 + C^2} - z^2}; \\ y_2 = \pm \sqrt{\frac{R^2 C^2}{(2-K)^2 + C^2} - z^2}; \\ y_3 \stackrel{(4.14)}{=} -\frac{1}{E} \left( \frac{-1}{4} D C R^2 + F \right); \\ y_4 = -\frac{2-K}{C} z; \\ y_5 = z \end{array} \right. \quad (4.15)$$

є положеннями рівноваги системи (4.3), коли  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}$ .

Таким чином, маємо наступну теорему

**Теорема 4.2.** *Нехай  $E \neq 0$ ,  $C \neq 0$  та рівняння  $R^2 = \frac{8F \pm 8E\sqrt{4-C^2}}{2DC + E}$  має ненульовий дійсний розв'язок, тоді система (4.3) має нескінченну кількість положень рівноваги у вигляді (4.15).*

Розглянемо приклади таких нескінченних сімейств положень рівноваги.

Для цього покладемо наступні значення параметрів системи (4.3)

$$C = -0.5, \quad D = -2.6, \quad E = -0.45, \quad F = 0.5, \quad (4.16)$$

тоді сімейство точок

$$\mathbf{y}_z^\pm = \begin{pmatrix} \pm 0.85\sqrt{6.97 - 86z^2} \\ \pm 0.11\sqrt{6.97 - 86z^2} \\ -2.57 \\ 7.87z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (4.17)$$

при  $\{\mathbf{y}_z^+, \mathbf{y}_z^-\} \subset \mathbb{R}^5$  буде сімейством положень рівноваги системи (4.3).

Це сімейство складається з нескінченної кількості положень, що утворює замкнену лінію у фазовому просторі. Жодне з положень рівноваги не є ізольованим. У зв'язку з цим, жодне з положень рівноваги, навіть теоретично, не може бути стійким. А тому й не може бути атрактором. Натомість, усе сімейство може виявляти притягувальні властивості. Тобто, існують такі значення параметрів, за яких майже кожна траєкторія прямує до одного з положень рівноваги сімейства. І це справджується за обраних значень параметрів (4.16).

Крім того, за будь-яких значень параметрів кожен представник сімейства має один і той самий набір ляпуновських характеристичних показників. Зокрема, за значень параметрів (4.16), сигнатура спектру ЛХП матиме вигляд  $< 0, -, -, -, - >$ . Це спонукає нас розглядати сімейство як одне ціле. І концепт, що дозволяє це зробити – концепт максимального атрактора.

На рис. 4.2 представлено сімейство положень рівноваги, що притягує до себе усі близькі траєкторії у вигляді замкненої чорної лінії разом із ізольованом положення рівноваги у вигляді ізольованої чорної точки. Аби продемонструвати, що вказане сімейство володіє притягувальними властивостями наведено дві траєкторії, які прямують до двох різних представників сімейства червоним та синім кольорами. З невиконання умов (4.7) слідує нестійкість ізольованого положення рівноваги.

Крім сімейств, що виявляють притягувальні властивості, існують неізольовані сімейства положень рівноваги, що які таких властивостей не

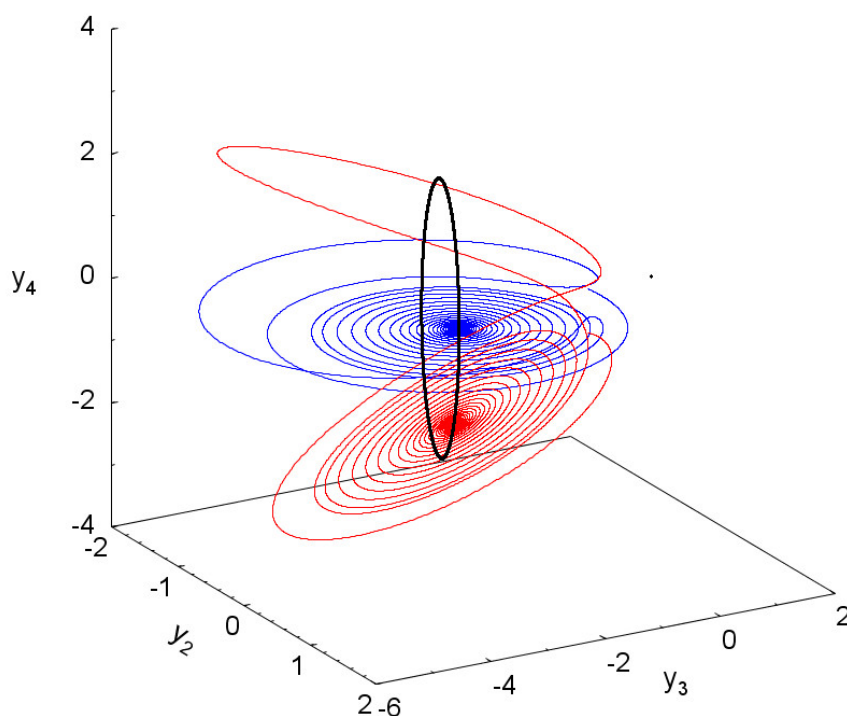


Рис. 4.2: Притягувальне сімейство положень рівноваги (замкнена чорна лінія) та дві траєкторії, що прямують до представників сімейства (червоним та синім кольорами); ізольоване положення рівноваги (ізольована точка чорним кольором) при  $C = -0.5$ ,  $D = -2.6$ ,  $E = -0.45$ ,  $F = 0.5$ .

мають. Тобто, кожна траєкторія віддаляється від усіх представників такого сімейства. У будь-якому випадку, має сенс говорити про стійкість (та інші властивості) сімейства як такого, а не окремих представників цих сімейств. Оскільки, як вже було зазначено, неізольовані положення рівноваги не можуть бути асимптотично стійкими.

Розглянемо інший приклад сімейства положень рівноваги за таких значень параметрів системи (4.3)

$$C = -0.5, \quad D = -1, \quad E = -1.4, \quad F = 0.5,$$

тоді сімейство точок



$$\mathbf{y}_z^\pm = \begin{pmatrix} \pm 0.063\sqrt{174.078 - 4z^2} \\ \pm 0.5\sqrt{174.078 - 4z^2} \\ -3.59 \\ 0.127z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R},$$

при  $\{\mathbf{y}_z^+, \mathbf{y}_z^-\} \subset \mathbb{R}^5$  буде сімейством положень рівноваги системи (4.3). Відмітимо, що вказане сімейство положень рівноваги за вказаних значень параметрів є нестійким, але, як і минулого разу, жодне з положень рівноваги сімейства не є ізольованим.

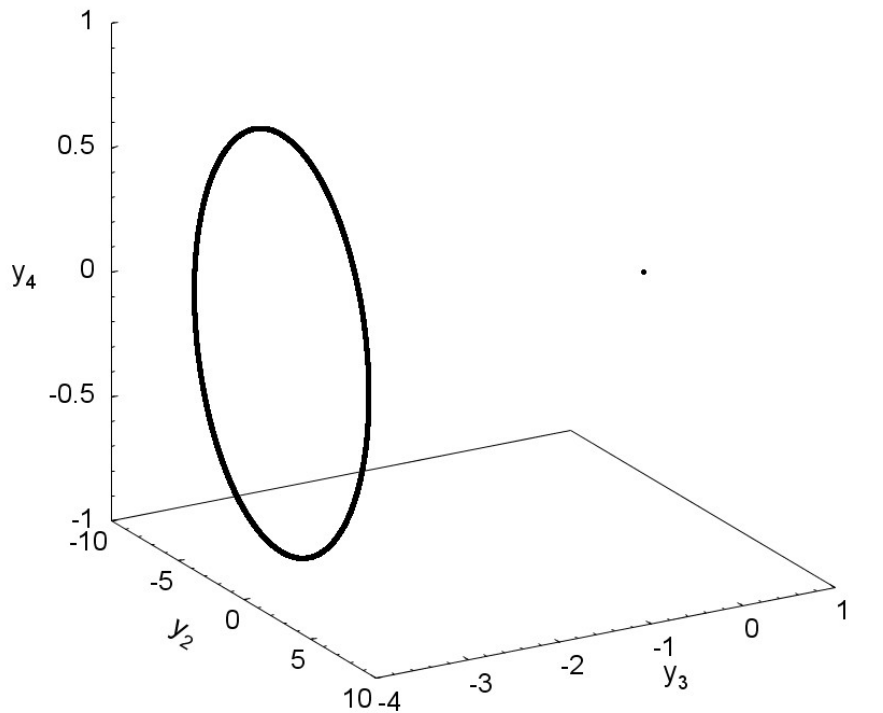


Рис. 4.3: Положення рівноваги системи (4.3) при  $C = -0.5, D = -1, E = -1.4, F = 0.5$ .

На рис. 4.3 показано два типи положень рівноваги системи (4.3), а саме: ізольоване положення рівноваги (одна точка) та сімейство неізольованих положень рівноваги (замкнена лінія). Кожна точка цієї лінії є положенням рівноваги. Усі зображені на рис. 4.3 положення рівноваги нестійкі. Як і минулого разу, кожен представник сімейства має один і той самий набір ЛХП,

сигнатура яких має вигляд  $< +, +, 0, -, - >$ .

Додатково відзначимо, що система є дисипативною для всіх значень параметрів, що мають фізичний сенс. Зокрема, і для розглянутих значень параметрів, оскільки виконуються умови (4.5). Більш того, в областях значень параметрів у яких всі положення рівноваги нестійкі виникають граничні множини інших типів. Такі граничні множини можуть бути як регулярними, так і хаотичними. Більш того, ці граничні множини формують сімейства граничних множин, які не є атракторами в класичному розумінні.

### 4.3. Максимальні атрактори системи

Покладемо значення параметрів за яких усі положення рівноваги нестійкі і розглянемо які граничні множини виникають у системі (4.3):

$$C = -0.5, \quad D = -1, \quad E = -1.4, \quad F = 0.5.$$

За вказаних значень параметрів у системі виникає дуже незвичайна сукупність граничних множин. Це сімейство складається з нескінченної кількості (потужності континуум) замкнутих траєкторій (циклів), які співіснують одночасно. Жодна з цих замкнутих траєкторій не є ізольованою. Для будь-якого циклу ми можемо знайти інший як завгодно близький до першого. Але вони не перетинаються і не мають точок дотику.

Всі цикли сімейства є періодичними траєкторіями з одним і тим самим періодом, одним і тим самим спектром ляпуновських характеристичних показників, однією і тією самою кількістю точок у перетині Пуанкаре. Незважаючи на це, жоден із циклів, навіть теоретично, не може бути граничним циклом, оскільки жоден з цих циклів не є ізольованим. Але, для майже будь-якої початкової точки фазового простору траєкторія, що стартує з цієї початкової точки, прямує до одного представників сімейства.

На рис. 4.4 наведено тривимірні проєкції регулярних періодичних граничних множин (4.3). Кожен цикл зображено іншим кольором. Усього зобра-

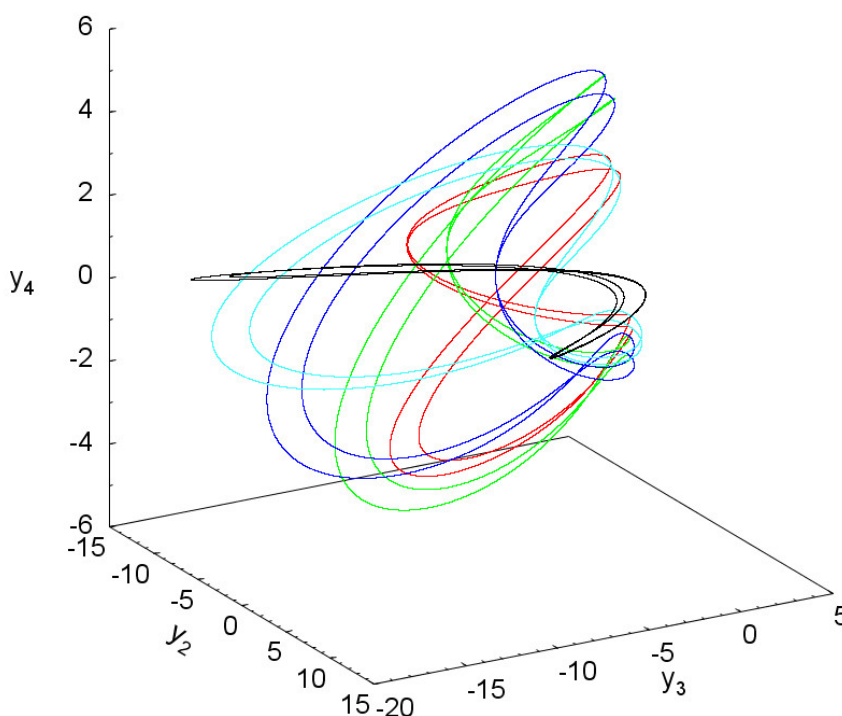


Рис. 4.4: Проекції фазових портретів п'яти представників регулярного максимального атрактора.

жено п'ять циклів, кожен із яких є представником нескінченного сімейства циклів. Ще раз підкреслимо, що жоден із циклів, які утворюють сімейство, не є атрактором у традиційному розумінні цього поняття. На думку автора, найбільш придатним для опису такого сімейства є поняття максимального атрактора.

Таким чином, відповідно до означання, і сімейство положень рівноваги (4.17), і сімейство циклів що розглядається є максимальними атракторами системи (4.3). Крім того, оскільки ляпуновські характеристичні показники всіх представників сімейства співпадають, то є сенс говорити про ЛХП максимального атрактора як такого.

Зі збільшення значення параметра  $E$  в системі виникає сімейство хаотичних траєкторій. Однією з ознак хаосу є поява додатного ляпуновського характеристичного показника. Сімейство, що виникає, включає нескінченну кількість хаотичних траєкторій. Відомо, що класичний хаотичний аттрактор складається з нескінченної кількості нестійких траєкторій. Отримане

сімейство, на перший погляд, є об'єднанням нескінченної кількості хаотичних траєкторій. Однак, жоден представник цього сімейства не є атрактором у «традиційному» розумінні цього терміна. Тут, як і раніше, для визначення такого об'єднання можна запропонувати поняття максимального атрактора, означене у першому розділі.

Усі траєкторії хаотичного максимального атрактора мають однаковий спектр ляпуновських показників, один із яких додатний. Перетини Пуанкаре кожної з траєкторій сімейства є структурно подібними хаотичними множинами, які складаються з нескінченної кількості точок.

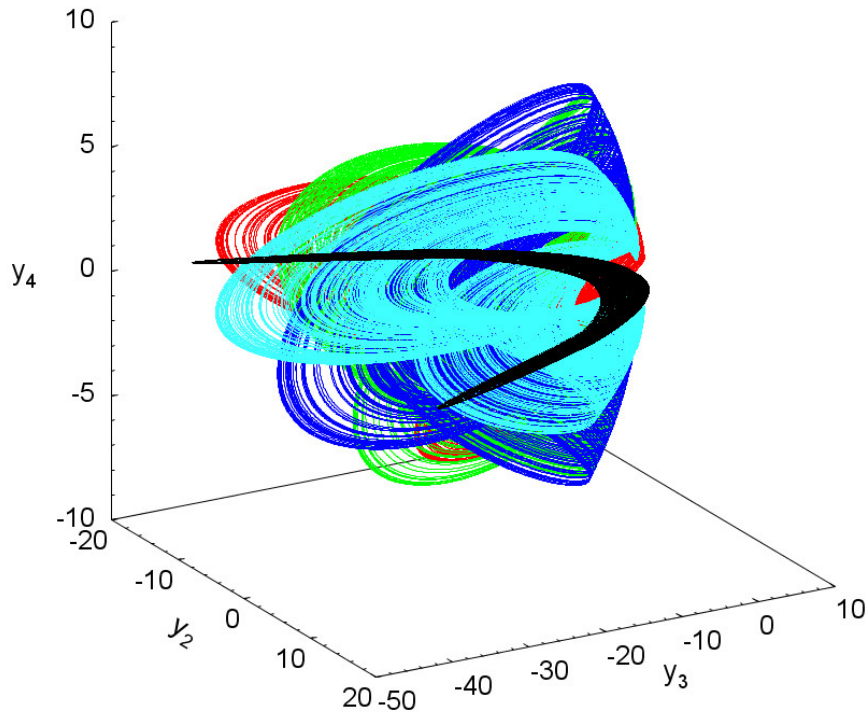


Рис. 4.5: Проекції фазових портретів п'яти представників хаотичного максимального атрактора.

На рис. 4.5 для значень  $C = -0.5$ ,  $D = -1$ ,  $E = -1.17$ ,  $F = 0.5$  побудовано тривимірні проекції нерегулярних граничних множин системи (4.3), які утворюють хаотичний максимальний атрактор. Спектр ляпуновських характеристичних показників кожної траєкторії, яка належить максимальному хаотичному атрактору, складається з одного додатного показника, двох нульових і двох від'ємних. Кожного представника хаотичного максимального

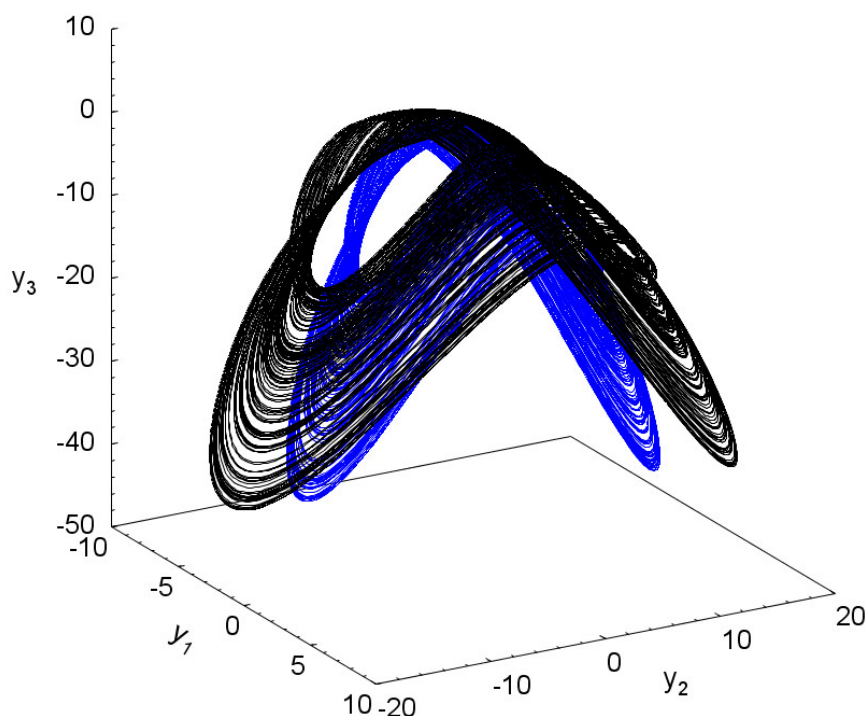


Рис. 4.6: Різні просторові локалізації представників хаотичного максимального атрактора.

атрактора нанесено власним кольором. Усього зображено п'ять представників цього хаотичного сімейства.

На рис. 4.6 показано ще два представники хаотичного максимального атрактора. Особливо цікаво, що один із цих представників, а саме зображений синім кольором, локалізовано у п'ятивимірному просторі, а інший, нанесений чорним, – у тривимірному. Тобто, у цього представника фазові змінні  $y_4$  і  $y_5$  дорівнюють нулю. З фізичної точки зору друга ситуація відповідає випадку, коли маятник здійснює плоскі коливання. Проте обидві траєкторії є різними представниками одного й того ж хаотичного максимального атрактора.

Крім того, ситуація описана в попередньому абзаці, а саме локалізація деяких представників максимального атрактора у тривимірному просторі, має місце і для сімейства циклів на рис. 4.4, і для сімейства положень рівноваги на рис. 4.2 (аналітична формула (4.17) при  $z = 0$ ).

Оскільки ми встановили існування щонайменше одного хаотичного максимального атрактора, виникає питання: які сценарії переходу до хаосу при-

таманні максимальним атракторам?

#### 4.4. Сценарії переходу до хаосу максимальних атракторів

Незважаючи на те, що максимальні атрактори не є, в загальному випадку, атракторами в традиційному розумінні цього терміну, перехід від регулярної до хаотичної динаміки можуть відбуватись відповідно до основних сценаріїв хаотичної динаміки. Зокрема, відповідно до сценарію Фейгенбаума через каскад біфуркацій подвоєння періоду [45], до сценарію Маннвілля-Помо через переміжність [48], до сценаріїв узагальненої переміжності [50; 51; 53; 54].

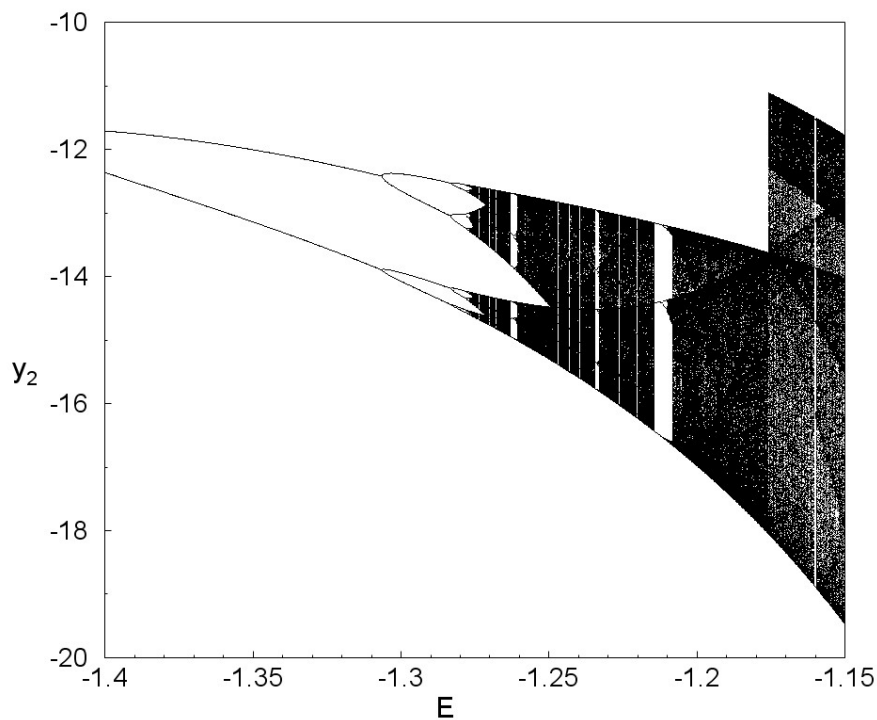


Рис. 4.7: Фазо-параметрична характеристика одного з представників максимального атрактора при  $E \in [-1.4; -1.15]$ .

Для детального вивчення процесу переходу максимальних атракторів від регулярних до хаотичних режимів, покладемо значення параметрів  $C = -0.5$ ,  $D = -1$ ,  $F = 0.5$  та розглянемо фазо-параметричну характеристику. На

рис. 4.7 представлена така характеристика відповідно до фазової змінної  $y_2$  та біфуркаційного параметра  $E$ . Зазначимо, що фазо-параметричні характеристики для інших фазових змінних будуть якісно подібну структуру. Також відмітимо, що рис. 4.7 побудовано для одного з представників максимального атрактора. Але, для будь-якого іншого представника максимального атрактора рисунок залишиться якісно незмінним.

На рис. 4.7 чітко видно окремі гілки біфуркаційного дерева, а також точки їхнього розгалуження. Значенням біфуркаційного параметра  $E$ , що відповідають окремим гілкам на фазо-параметричній характеристиці, відповідають сімейства граничних циклів системи (4.3). У свою чергу, сімействам хаотичних траєкторій відповідають щільно заповненні області фазо-параметричної характеристики.

На лівій половині рис. 4.7 чітко видно окремі гілки. Зі збільшенням біфуркаційного параметра  $E$  ми спостерігаємо точки розгалуження гілок, що відповідають точкам біфуркації подвоєння періоду. При одному й тому самому значенню біфуркаційного параметра, період усіх циклів, що формують максимальний атрактор, подвоюється. Потім, при досягненні наступної точки біфуркації, період усіх циклів знову подвоюється і так далі. Цей нескінченний процес подвоєння періоду закінчується появою хаотичного максимального атрактора. Тобто, перехід від сімейства періодичних граничних множин до сімейства хаотичних граничних множин відбувся за класичним сценарієм Фейгенбаума.

На рис. 4.8 представлено фрагмент фазо-параметричної того самого представника максимального атрактора. На цьому фрагменті чітко видно вікно періодичності ( $-1.2093 < E < -1.2091$ ). Якщо ми будемо рухатись у бік зменшення біфуркаційного параметра, починаючи зі значення  $E \approx -1.2092$ , то на виході з цього вікна періодичності відбувається перехід до хаосу за одну жорстку біфуркацію. Тобто, реалізується сценарій Манневілья-Помо переходу до хаосу.



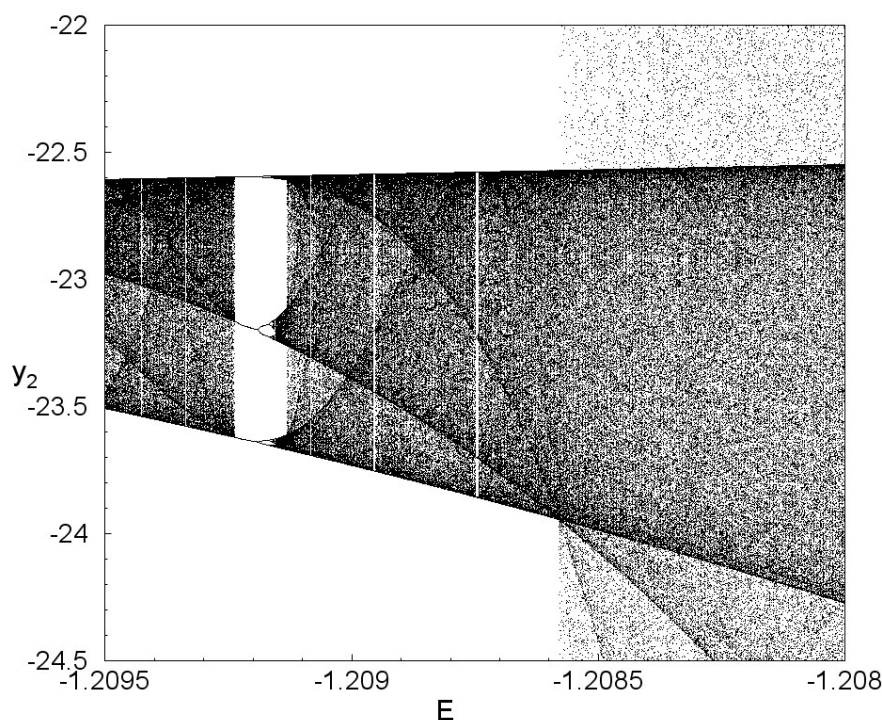


Рис. 4.8: Фрагмент фазо-параметричної характеристики одного з представників максимального атрактора при  $E \in [-1.2095; -1.208]$ .

Навпроти, якщо ж рухатись з вікна періодичності у бік збільшення біфуркаційного параметра, то ми знову бачимо каскад біфуркацій подвоєння періоду який закінчується виникненням хаотичного максимального атрактора. Але, продовжуючи рухатись далі до значення  $E \approx -1.2086$ , відбувається перехід від хаотичного максимального атрактора одного типу до хаотичного максимального атрактора іншого типу відповідно до сценарію узагальненої переміжності. Цей сценарій описаний у роботах [50; 51; 54]. Зупинимось більш детально на реалізації сценарію узагальненої переміжності.

На рис. 4.9а наведено розподіл природної інваріантної міри над проєкцією фазового портрету хаотичного максимального атрактора. Цей хаотичний максимальний аттрактор виникає в системі в результаті нескінченного каскаду біфуркацій подвоєння періоду при  $E \approx -1.2091$ . За значення  $E \approx -1.20857$  цей хаотичний максимальний аттрактор зникає і в системі народжується хаотичний максимальний аттрактор нового типу. Розподіл інваріантної міри нового максимального атрактора над проєкцією фазового портрету



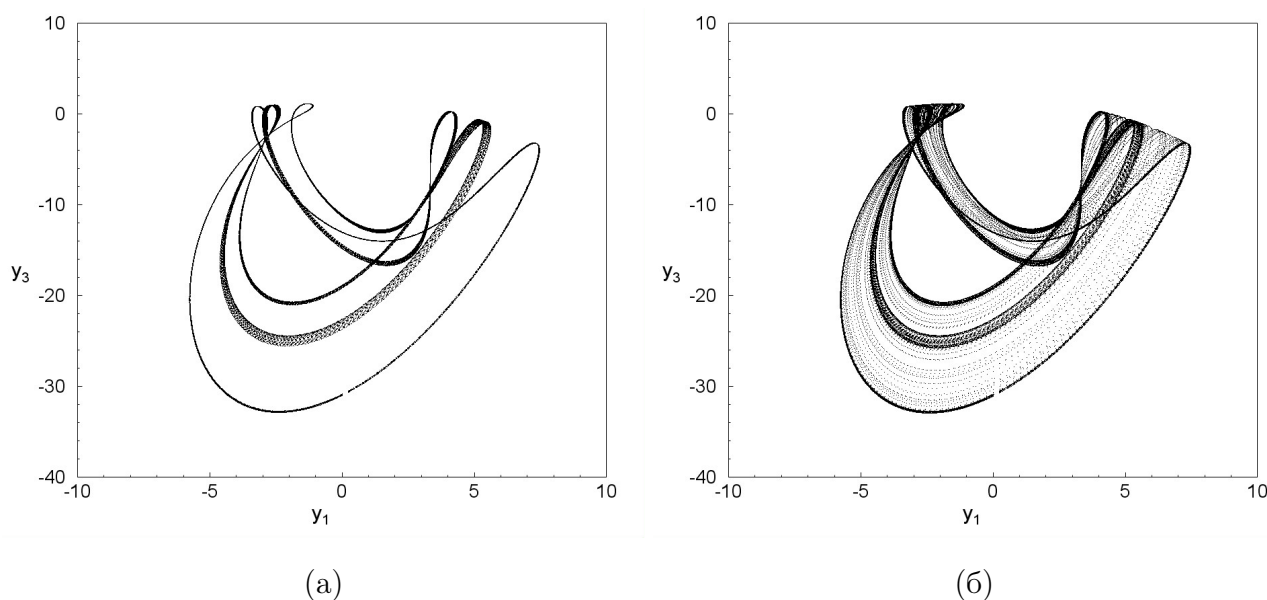


Рис. 4.9: Розподіл природної інваріантної міри при:  $E = -1.209$  (а);  $E = -1.20857$  (б).

наведено на рис. 4.9б. Тобто, перехід від хаотичного максимального атрактора одного типу до хаотичного максимального атрактора іншого типу відбувається відпоівдно до сценарію узагальненої переміжності, який був описаний для атракторів у класичному розумінні. Під час цього переходу, сценарій реалізується для усіх представників обох максимальних атракторів. Для кожного представника нового хаотичного максимального атрактора рух траєкторії складається з двох фаз, що чергуються, а саме з грубо-ламінарної та турбулентної фази. Під час грубо-ламінарної фази, траєкторія здійснює хаотичний рух в околі зниклих траєкторій представника зниклого хаотичного максимального атрактора. Далі, в непердбачуваний момент часу, траєкторія залишає область локалізації представника зниклого максимального атрактора і здійснює рух у віддалених областях фазового простору. Це турбулентна фаза. Грубо-ламінарна фаза відповідає більш темним областям на рис. 4.9б. Ці області майже повторюють розподіл інваріантної міри з рис. 4.9а. У свою чергу, турбулентна фаза відповідає менш темним областям рис. 4.9б. Через деяких час, траєкторія знову повертається до грубо-ламінарної фази. Потім, траєкторії знову переходять у турбулентну фазу. Цей ланцюг продовжується

нескінченну кількість разів. Відмітимо, що тривалість і грубо-ламінарної і турбулентної фаз є непередбачувана, як і моменти часів переходу з однієї фази до іншої.

Дослідимо сценарії переходу до хаосу максимальних атракторів для іншої області значень параметрів. Для цього покладемо  $C = -0.5$ ,  $E = -0.45$ ,  $F = 0.5$ , а параметр  $D$  залишимо як біфуркаційний і розглянемо фазо-параметричну характеристику представлену на рис. 4.10.

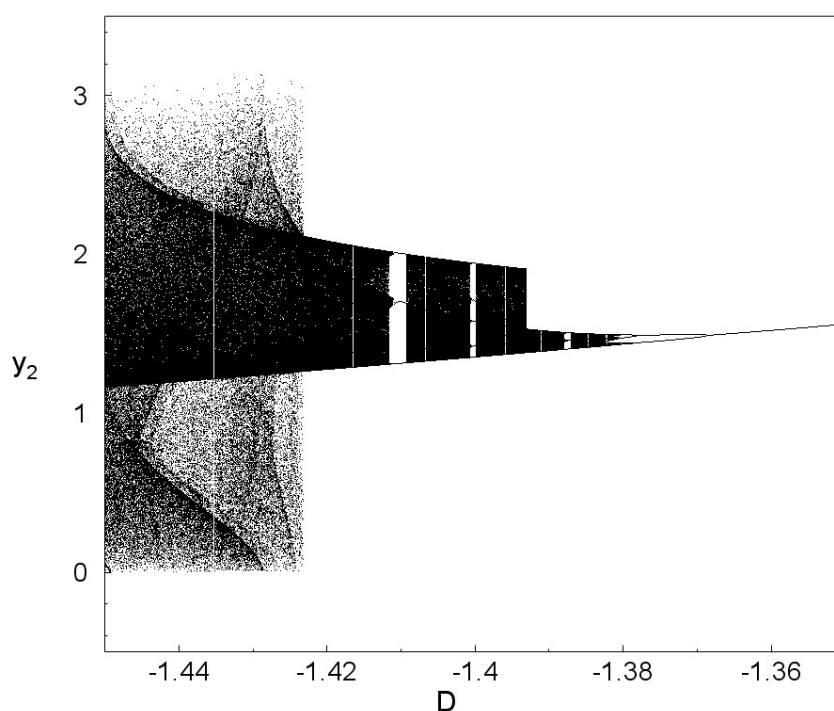


Рис. 4.10: Фазо-параметрична характеристика одного з представників максимального атрактора при  $D \in [-1.45; -1.35]$ .

Як видно з рис. 4.10, ми маємо класичне біфуркаційне дерево класичного атрактора. Тобто окремі гілки цього біфуркаційного дерева відповідають періодичним граничним множинам, а щільно заштриховані області – хаотичним граничним множинам. Крім того, на цьому рисунку ми можемо спостерігати сценарії переходів до хаосу, притаманні атракторам у класичному розумінні цього терміну, зокрема сценарій Фейгенбаума, сценарій Маневілля-Помо та сценарій узагальненої переміжності.

Максимальний атрактор у вигляді сімейства неізольованих грани-

чних множин існує на всьому проміжку, на якому представлена фазо-параметрична характеристика. Більше того, кожен представник максимального атрактора має один і той самий спектр ЛХП, а тому знову є сенс говорити про ЛХП максимального атрактора як такого.

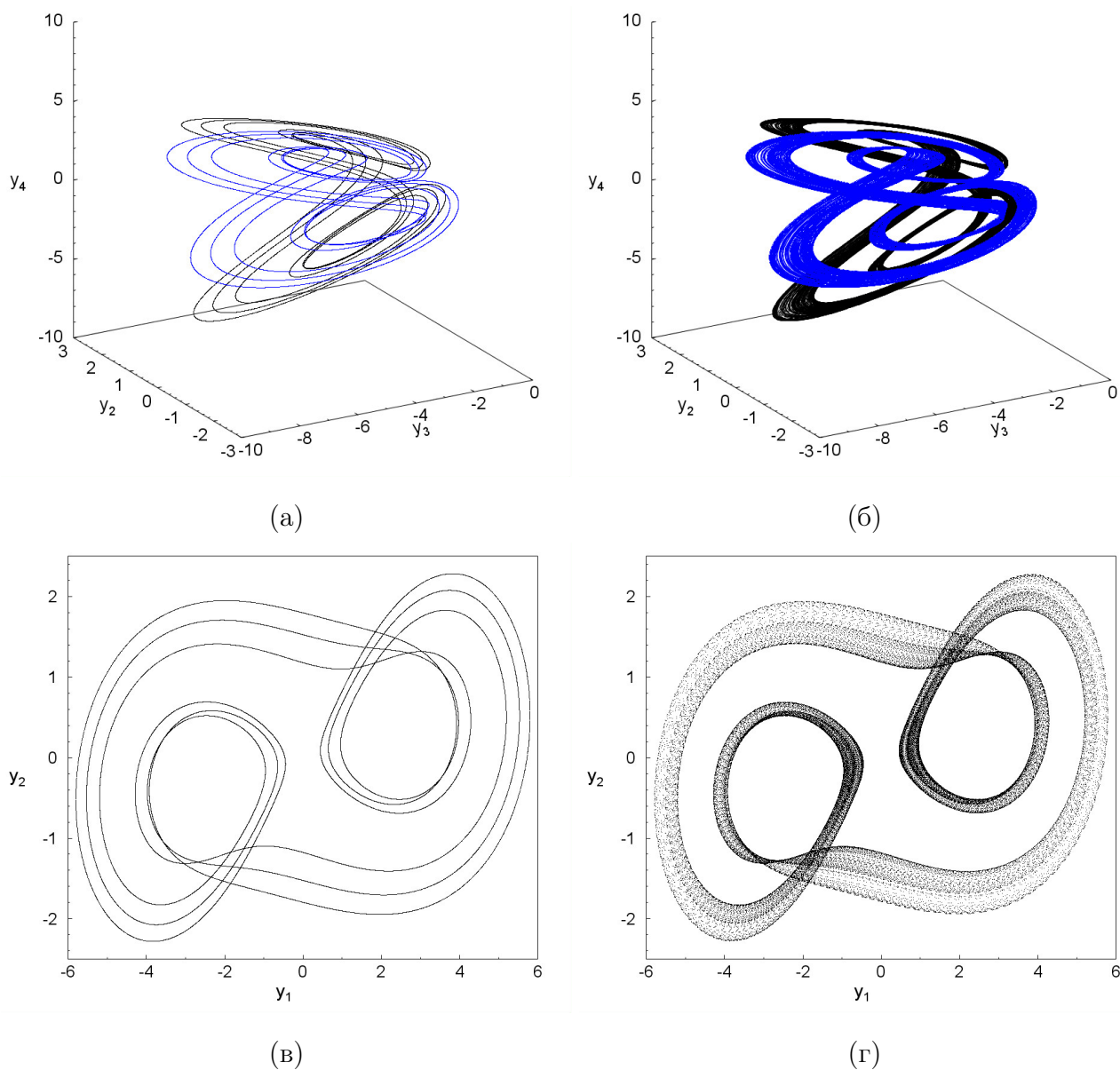


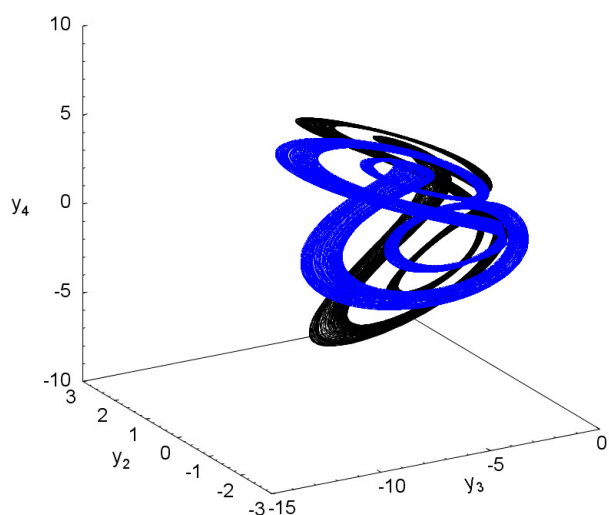
Рис. 4.11: Проекції фазових портретів при:  $D = -1.41$  (а);  $E = -1.40915$  (б). Розподіл природної інваріантної міри:  $D = -1.41$  (в);  $E = -1.40915$  (г).

Почнемо зі значення  $D = -1.36$  і рухатимемося в бік зменшення біфуркаційного параметра. За цього значення параметра максимальний аттрактор складається з незліченної кількості періодичних граничних множин, кожна з яких має один і той самий період та однакові ЛХП, сигнатура

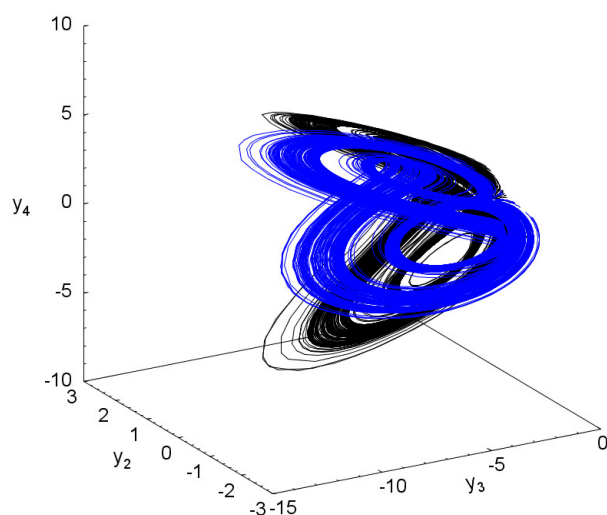
спектра яких, зокрема, має вигляд  $\langle 0, 0, -, -, - \rangle$ . Далі, при зменшенні біфуркаційного параметра до  $D = -1.37$  період усіх представників максимального атрактора подвоюється. У разі ж подальшого зменшення до  $D = -1.38$  період всіх представників максимального атрактора знов подвоюється. Цей ланцюг продовжується нескінченно аж до значення  $D = -1.381$ , за якого в системі народжується сімейство хаотичних граничних множин, а тому і хаотичний максимальний атрактор. Сигнатура спектра ЛХП такого максимального атрактора має вигляд  $\langle +, 0, 0, -, - \rangle$ . Таким чином, маємо класичний сценарій переходу до хаосу Фейгенбаума, який має місце й у випадку максимального атрактора.

Розглянемо, як реалізується сценарій Манневілля-Помо у випадку максимального атрактора. Нехай біфуркаційний параметр  $D = -1.41$ . У системі існує періодичний максимальний атрактор. У разі незначного збільшення ( $D = -1.40915$ ) це сімейство періодичних граничних множин руйнується і в системі виникає новий хаотичний максимальний атрактор. Розподіли інваріантної міри зазначених сімейств наведено на рис. 4.11. На цих розподілах можна спостерігати, що більш темними ділянками зображується область, що нагадує деякий окіл розподілу природної інваріантної міри зниклої періодичної граничної множини. Це свідчить про те що перехід відбувся через переміжність за одну жорстку біфуркацію. Ламінарній фазі відповідає близька до періодичних динаміка в околі зниклої періодичної граничної множини, а турбулентній – непередбачувані моменти, коли траєкторія залишає близький окіл зниклого періодичного представника максимального атрактора

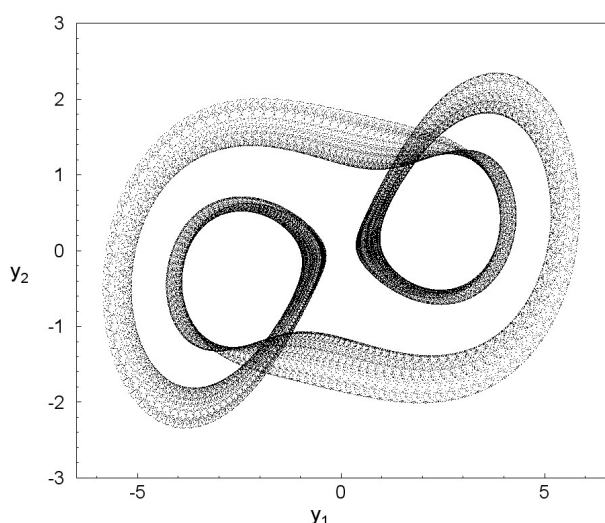
Наостанок розглянемо реалізацію сценарію узагальненої переміжності для випадку максимального атрактора. Якщо  $D = -1.42$ , у системі «сферичний маятник – електродвигун» існує хаотичний максимальний атрактор і вже при  $D = -1.425$  внаслідок переміжності, існуюче хаотичне сімейство руйнується і виникає хаотичний максимальний атрактор іншого типу. На



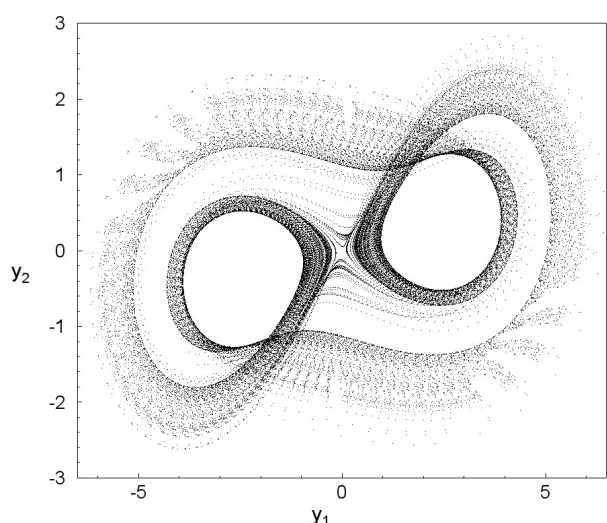
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 4.12: Проекції фазових портретів при:  $D = -1.42$  (а);  $E = -1.425$  (б). Розподіл природної інваріантної міри:  $D = -1.42$  (в);  $E = -1.425$  (г).

рис. 4.12 наведені розподіли природної інваріантної міри для зазначених максимальних атракторів. На рис. 4.12г можна бачити затемнену ділянку, що нагадує зниклий хаотичний максимальний атрактор. Це свідчить про те, що новоутворений хаотичний максимальний атрактор з'явився внаслідок переміжності з руйнуванням існуючого раніше атрактора. Причому зниклий максимальний атрактор являє собою груболамінарну фазу новоутвореного сімейства граничних множин, тоді як турбулентна фаза характеризується більш світлими ділянками на розподілі інваріантної міри (рис. 4.12г), коли

траєкторія залишає окіл зниклого максимального атрактора.

## 4.5. Висновки за розділом

У розділі було проведено дослідження системи «сферичний маятник – електродвигун». Для системи знайдено та побудовано як ізольовані та і неізольовані положення рівноваги. Доведено теореми про стійкість ізольованого положення рівноваги та існування сімейства неізольованих положень рівноваги. Показано, що неізольоване сімейство положень рівноваги може володіти притягувальними властивостями, що спонукало узагальнити поняттям «атрактор» для системи, що розглядається, поняттям «максимальний атрактор».

Знайдено інші типи максимальних атракторів, зокрема періодичні та хаотичні. Для знайдених максимальних атракторів побудовано проєкції фазових портретів, фазо-параметричні характеристики та розподіл природної інваріантної міри.

Показано, що незважаючи на те, що максимальні атрактори не є атракторами в традиційному розумінні цього терміну, перехід до хаосу максимальних атракторів відбувається за сценаріями, що є аналогічними до сценаріїв переходу до хаосу притаманним "класичним" атракторам.

## Висновки

У дисертаційній роботі отримані такі основні результати. Для системи «генератор – п'єзокерамічний випромінювач»:

1. Виявлено нетипове чергування сценаріїв Фейгенбаума та Манневілья-Помо при переходах від регулярних режимів до хаотичних.
2. Знайдено значення параметрів за яких у системі співіснують два аттрактори один із яких розташований в області локалізації іншого.
3. Встановлено співіснування таких усталених режимів: квазіперіодичний і періодичний; періодичний і періодичний; хаотичний і періодичний.
4. Проведено ідентифікацію співіснуючих атракторів цієї системи в термінах «рідкості» та «прихованості».
5. Проаналізовано вплив запізнення на класифікацію співіснуючих аттракторів у термінах «рідкості» та «прихованості».

Для системи «сферичний маятник – електродвигун»:

1. Знайдено ізольовані та неізольовані положення рівноваги.
2. Знайдено регулярні та нерегулярні сімейства неізольованих граничних множин, що володіють притягувальними властивостями.
3. Показано, що сімейства неізольованих граничних множин, що володіють притягувальними властивостями, не є аттракторами в "класичному" розумінні, але відповідають означенню максимального аттрактора.
4. Встановлено, що сценарії переходу до хаосу максимальних аттракторів відбувається за сценаріями, що є аналогічними до сценаріїв переходу до хаосу притаманним "класичним" аттракторам.

5. Доведено теореми про стійкість ізольованого положення рівноваги та існування сімейства неізольованих положень рівноваги.



## Список використаних джерел

1. Швець О. Ю., Донецький С. В. Приховані й рідкісні атрактори в неідеальних електропружних системах // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 2. — С. 177—187. — ISSN 1815-2019.
2. Shvets A., Donetskyi S. New Types of Limit Sets in the Dynamic System “Spherical Pendulum—Electric Motor” // Nonlinear Mechanics of Complex Structures: From Theory to Engineering Applications / ed. by H. Altenbach, M. Amabili, Y. V. Mikhlin. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 443–455. — DOI: 10.1007/978-3-030-75890-5\_25. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_25).
3. Донецький С. В., Швець О. Ю. Узагальнення поняття атрактора для маятникових систем з обмеженим збудженням // Нелінійні коливання. — 2021. — Т. 24, № 4. — С. 473—481.
4. Donetskyi V. S., Shvets A. Y. Generalization of the Concept of Attractor for Pendulum Systems with Finite Excitations // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — June. — Vol. 273, no. 2. — P. 220–229. — ISSN 1573-8795. — DOI: 10.1007/s10958-023-06495-x. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06495-x>.
5. Donetskyi S. V., Shvets A. Y. Bifurcations “Cycle–Chaos–Hyperchaos” in Some Nonideal Electroelastic Systems // Nonlinear Vibrations Excited by Limited Power Sources / ed. by J. M. Balthazar. — Cham : Springer International Publishing, 2022. — P. 43–51. — DOI: 10.1007/978-3-030-96603-4\_4. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4_4).
6. Донецький С., Швець О. Біфуркації максимальних атракторів неідеальних маятникових систем // Доповіді Національної академії на-

- ук України. — 2022. — № 3. — С. 13–19. — DOI: 10.15407/dopovidi2022.03.013. — URL: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.03.013>.
7. *Shvets A., Donetskyi S.* Transition to Deterministic Chaos in Some Electroelastic Systems // 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, I. Lubashevsky. — Cham : Springer International Publishing, 2019. — P. 257–264. — DOI: 10.1007/978-3-030-15297-0\_23.
  8. *Shvets A., Donetskyi S.* Identification of Hidden and Rare Attractors in Some Electroelastic Systems with Limited Excitation // 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 865–878. — DOI: 10.1007/978-3-030-70795-8\_60.
  9. *Donetskyi S., Shvets A.* Double Symmetry and Generalized Intermittency in Transitions to Chaos in Electroelastic Systems // 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — Cham : Springer International Publishing, 2022. — P. 135–142. — DOI: 10.1007/978-3-030-96964-6\_11.
  10. *Sommerfeld A.* Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre // Physikalische Zeitschrift. — 1902. — Nr. 3. — S. 266–271.
  11. *Sommerfeld A.* Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. — 1902. — Jg. 46. — S. 391–394.
  12. *Sommerfeld A.* Naturwissenschaftliche Ergebnisse der neueren technischen Mechanik // Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. — 1904. — Nr. 48. — S. 631–636.
  13. *Кононенко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. — М.: Наука, 1964. — С. 254.

14. *Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Y.* Chaos in vibrating systems with limited power-supply // *Chaos*. — 1993. — Vol. 3. — P. 387–395.
15. *Краснопольская Т. С., Шве́ц А. Ю.* Детерминированный хаос в системе генератор-пьезокерамический излучатель // *Нелинейная динамика*. — 2006. — С. 55–74.
16. *Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Y.* Deterministic chaos in a system generator-piezoceramic transducer // *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. — 2006. — Vol. 6, no. 4. — P. 367–387.
17. *Шве́ць О. Ю., Краснопольська Т. С.* Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Частина 1 // *Наукові вісті Нац. тех. ун-ту України «КПІ»*. — 2006. — Т. 2. — С. 150–158.
18. Nonlinear interactions in a piezoceramic bar transducer powered by a vacuum tube generated by a nonideal source / J. M. Balthazar [et al.] // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. — 2009. — Vol. 4, no. 1.
19. *Шве́ць О., Печерний В.* Різноманітність сценаріїв переходу до хаосу в детермінованій системі генератор-п'єзокерамічний випромінювач // *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. — 2008. — № 5. — С. 142–149.
20. *Швец А., Печерный В.* Разнообразие хаотической динамики одной неидеальной электроупругой системы // *Збірник праць Інституту математики НАН України*. — 2008. — Т. 5, № 2. — С. 367–395.
21. *Miles J. W.* Stability of forced oscillations of a spherical pendulum // *Quart. Appl. Math.* — 1962. — Vol. 20, no. 1. — P. 21–32.
22. *Miles J. W.* Resonant motion of a spherical pendulum // *Phys. D*. — 1984. — Vol. 11, no. 3. — P. 309–323.
23. *Miles J. W.* Nonlinear Faraday resonance // *J. Fluid Mech.* — 1984. — Vol. 146. — P. 285–302.

24. *Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Y.* Chaotic oscillations of a spherical pendulum as an example of interaction with energy source // *Internat. Appl. Mech.* — 1992. — Vol. 28. — P. 669–674.
25. *Shvets A. Y.* Deterministic chaos of a spherical pendulum under limited excitation // *Ukr. Math. J.* — 2007. — Vol. 59. — P. 602–614.
26. *Швець О., Печерний В.* Особливості хаотичної динаміки однієї маятничкової системи при неідеальному збудженні // *Вісник київського університету. Серія: Фізико-математичні науки.* — 2009. — Т. 3. — С. 105–108.
27. *Zakrzhevsky M., Schukin I., Yevstignejev V.* RARE ATTRACTORS IN DRIVEN NONLINEAR SYSTEMS WITH SEVERAL DEGREES OF FREEDOM // *Transport & Engineering.* — 2007. — Vol. 24, no. 7. — P. 79–92.
28. Multistability and rare attractors in van der Pol–Duffing oscillator / *A. Chudzik [et al.]* // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* — 2011. — Vol. 21, no. 7. — P. 1907–1912.
29. *Leonov G., Kuznetsov N., Vagaitsev V.* Localization of hidden Chua's attractors // *Physics Letters A.* — 2011. — Vol. 375, no. 23. — P. 2230–2233.
30. *Rech P. C.* Self-excited and hidden attractors in a multistable jerk system // *Chaos, Solitons & Fractals.* — 2022. — Vol. 164. — P. 112614. — ISSN 0960-0779. — DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112614. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922007986>.
31. *Yue X., Lv G., Zhang Y.* Rare and hidden attractors in a periodically forced Duffing system with absolute nonlinearity // *Chaos, Solitons & Fractals.* — 2021. — Vol. 150. — P. 111108. — ISSN 0960-0779. — DOI: 10.1016/

- j.chaos.2021.111108. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077921004628>.
32. Experimental observation of hidden Chua's attractor / N. Wang [et al.] // Chaos, Solitons & Fractals. — 2023. — Vol. 170. — P. 113427. — ISSN 0960-0779. — DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113427. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077923003284>.
  33. *Milnor J.* On the concept of attractor // Commun. Math. Phys. — 1985. — Vol. 99. — P. 177–195.
  34. *Yuming Q., Jinping S.* Maximal attractors for the compressible Navier–stokes equations of viscous and heat conductive fluid // Acta Mathematica Scientia. — 2010. — Vol. 30, no. 1. — P. 289–311. — ISSN 0252-9602. — DOI: 10.1016/S0252-9602(10)60046-X. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S025296021060046X>.
  35. *da Silva P., Boldrini J.* Maximal attractor for an Ostwald ripening model // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 351, no. 1. — P. 107–119. — ISSN 0022-247X. — DOI: 10.1016/j.jmaa.2008.09.061. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X08009657>.
  36. *Li Y., Ma Y.* MAXIMAL ATTRACTORS OF CLASSICAL SOLUTIONS FOR REACTION DIFFUSION EQUATIONS WITH DISPERSION // Acta Mathematica Scientia. — 2005. — Vol. 25, no. 2. — P. 248–258. — ISSN 0252-9602. — DOI: 10.1016/S0252-9602(17)30282-5. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0252960217302825>.
  37. *Van der Pol B.* The Nonlinear Theory of Electric Oscillations // Proceedings of the Institute of Radio Engineers. — 1934. — Vol. 22, no. 9. — P. 1051–1086. — DOI: 10.1109/JRPROC.1934.226781.

38. *Van der Pol B., Van der Mark J.* Frequency Demultiplication // *Nature*. — 1927. — Sept. — Vol. 120, no. 3019. — P. 363–364. — ISSN 1476-4687. — DOI: 10.1038/120363a0. — URL: <https://doi.org/10.1038/120363a0>.
39. *Cartwright M. L., Littlewood J. E.* On Non-Linear Differential Equations of the Second Order: I. the Equation  $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$ ,  $k$  Large // *Journal of the London Mathematical Society*. — 1945. — Vol. s1-20, no. 3. — P. 180–189. — DOI: 10.1112/jlms/s1-20.3.180. — eprint: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s1-20.3.180>. — URL: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s1-20.3.180>.
40. *Пуанкаре А.* Избранные труды. В 3 т. — М.: Наука, 1971-1974.
41. *Андронов А., Витт А., Хайкин С.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — С. 568.
42. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. — 1883. — Vol. 174. — P. 935–982. — DOI: 10.1098/rstl.1883.0029. — eprint: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1883.0029>. — URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rstl.1883.0029>.
43. *Lorenz E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow // *Journal of Atmospheric Sciences*. — Boston MA, USA, 1963. — Vol. 20, no. 2. — P. 130–141. — DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2. — URL: [https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469\\_1963\\_020\\_0130\\_dnf\\_2\\_0\\_co\\_2.xml](https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml).
44. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Communications in Mathematical Physics*. — 1971. — Sept. — Vol. 20, no. 3. — P. 167–

192. — ISSN 1432-0916. — DOI: 10.1007/BF01646553. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01646553>.
45. *Feigenbaum M. J.* Quantative universality for a class of nonlinear transformations // J. stat. Phys. — 1978. — Vol. 19, no. 1. — P. 25–52.
46. *Feigenbaum M. J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // Journal of Statistical Physics. — 1979. — Dec. — Vol. 21, no. 6. — P. 669–706. — ISSN 1572-9613. — DOI: 10.1007/BF01107909. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01107909>.
47. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. — 1964. — Т. 16, № 1. — С. 61–71.
48. *Manneville P., Pomeau Y.* Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1980. — Vol. 1, no. 2. — P. 219–226. — ISSN 0167-2789. — DOI: 10.1016/0167-2789(80)90013-5. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278980900135>.
49. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // Communications in Mathematical Physics. — 1980. — June. — Vol. 74, no. 2. — P. 189–197. — ISSN 1432-0916. — DOI: 10.1007/BF01197757. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01197757>.
50. *Krasnopolskaya T., Shvets A.* Chaotic Surface Waves in Limited Power-Supply Cylindrical Tank Vibrations // Journal of Fluids and Structures. — 1994. — Vol. 8, no. 1. — P. 1–18. — ISSN 0889-9746. — DOI: 10.1006/jfls.1994.1001. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974684710012>.

51. *Krasnopol'skaya T., Shvets A.* Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks // Journal of Sound and Vibration. — 2009. — Vol. 322, no. 3. — P. 532–553. — ISSN 0022-460X. — DOI: 10.1016/j.jsv.2008.09.007. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X08007566>.
52. *Shvets A., Sirenko V.* Complicated Scenarios of Transitions to Deterministic Chaos in Non-Ideal Dynamic Systems // Proceedings of 5th International Conference, dedicated to the 90th anniversary of Academician V. L. Rvachev. — Kharkov: NTU «KhPI», 2016. — P. 222–229.
53. *Shvets A., Sirenko V.* Hyperchaos in Oscillating Systems with Limited Excitation // 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, I. Lubashevsky. — Cham : Springer International Publishing, 2019. — P. 265–273.
54. *Shvets A. Y., Sirenko V. A.* Scenarios of Transitions to Hyperchaos in Non-ideal Oscillating Systems // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Nov. — Vol. 243, no. 2. — P. 338–346. — ISSN 1573-8795. — DOI: 10.1007/s10958-019-04543-z. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04543-z>.
55. *Shvets A.* Overview of Scenarios of Transition to Chaos in Nonideal Dynamic Systems // 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 853–864.
56. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. — 1944. — Т. 44, № 8. — С. 339–342.
57. *Hopf E.* A mathematical example displaying features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1948. — Vol. 1, no. 4. — P. 303–322. — DOI: 10.1002/cpa.3160010401. — eprint: <https://arxiv.org/abs/1908.03272>.



//onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.3160010401. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160010401>.

58. *Afraimovich V., Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems. — International Press, Somerville, 2003.
59. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. — Москва: Физматлит, 2006. — С. 320.
60. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. Том 1. — М.:Изд-во АН СССР, 1954. — С. 446.
61. *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Trans. Moscow Math. Soc. — 1968. — Т. 19. — С. 179—210.
62. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. A. — 1976. — Dec. — Vol. 14, issue 6. — P. 2338–2345. — DOI: 10.1103/PhysRevA.14.2338. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.14.2338>.
63. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory / G. Benettin [et al.] // Meccanica. — 1980. — Mar. — Vol. 15, no. 1. — P. 9–20. — ISSN 1572-9648. — DOI: 10.1007/BF02128236. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
64. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application / G. Benettin [et al.] // Meccanica. — 1980. — Mar. — Vol. 15, no. 1. — P. 21–30. — ISSN 1572-9648. — DOI: 10.1007/BF02128237. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF02128237>.

65. *Хайпер Е., Нерсетт С. П., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / под ред. С. Филиппова ; пер. И. Кульчицкой, С. Филиппова. — М.: Мир, 1990. — С. 512.
66. *Dormand J. R., Prince P. J.* New Runge-Kutta algorithms for numerical simulation in dynamical astronomy // *Celestial mechanics*. — 1978. — Oct. — Vol. 18, no. 3. — P. 223–232. — ISSN 1572-9478. — DOI: 10.1007/BF01230162. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01230162>.
67. *Dormand J., Prince P.* A family of embedded Runge-Kutta formulae // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 1980. — Vol. 6, no. 1. — P. 19–26. — ISSN 0377-0427. — DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0771050X80900133>.
68. *Prince P., Dormand J.* High order embedded Runge-Kutta formulae // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 1981. — Vol. 7, no. 1. — P. 67–75. — ISSN 0377-0427. — DOI: 10.1016/0771-050X(81)90010-3. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0771050X81900103>.
69. *Henon M.* On the numerical computation of Poincaré maps // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1982. — Vol. 5, no. 2. — P. 412–414. — ISSN 0167-2789. — DOI: 10.1016/0167-2789(82)90034-3. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278982900343>.
70. *Тимошенко С. П.* Теория колебаний в инженерном деле. — М.-Л.: ГНТИ, 1932. — С. 344.
71. *Rocard Y.* Dynamique generale des vibrations. — Paris : Masson, 1943. — P. 459.
72. *Блехман И.* Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин // *Инженерный сборник*. — 1953. — Т. 16. — С. 49–72.

73. *Кононенко В. О., Корабльов С. С.* Про коливання вала з дисками при врахуванні оберненого зв'язку двигуна з коливальною системою // Прикладна механіка. — 1961. — Т. 6, № 5. — С. 129—137.
74. *Кононенко В. О.* Вынужденные колебания системы с источником энергии в случаях малой нелинейности // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. — 1961. — № 5. — С. 69—76.
75. *Краснопольська Т. С., Швець А. Ю.* Хаотические режимы движения в системах с ограниченным возбуждением // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: тезисы докл. — 1961. — Т. 61. — С. 219—220.
76. *Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Y.* Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply // 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms / ed. by M. Okrolnick, L. Pust. — 1991. — Vol. 1. — P. 181–184.
77. *Швець О. Ю.* Детермінований хаос при коливаннях фізичного маятника // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2006. — № 4. — С. 85—91.
78. *Shvets A. Y., Krasnopolskaya T. S.* Hyperchaos in Piezoceramic Systems with Limited Power Supply // IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence / ed. by A. V. Borisov [et al.]. — Dordrecht : Springer Netherlands, 2008. — P. 313–322. — DOI: 10.1007/978-1-4020-6744-0\_27. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0\\_27](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0_27).
79. *Краснопольская Т. С., Швець А. Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — Москва-Ижевск: РХД, 2008. — С. 280.
80. Chaotivibrations of a non-ideal eletro-mehanial system / D. Belato [et al.] // Inter.Jour. of Solids and Strutures. — 2001. — Vol. 38, no. 10–13. — P. 1699–1706.

81. *Pontes B., Oliveira V., Balthazar J.* On friction-driven vibrations in a mass blok-belt-motor system with a limited power supply // Jour. of Sound and Vibration. — 2000. — Vol. 234, no. 5. — P. 713–723.
82. Basins of attractions changes by amplitude constraining of osillators with limited power supply / S. de Souza [et al.] // Chaos, Solitons and Fractals. — 2005. — Vol. 26. — P. 1211–1220.
83. Dynamis of vibrating systems with turned liquid column dampers and limited power supply / S. de Souza [et al.] // Jour. of Sound and Vibration. — 2006. — Vol. 289, no. 4. — P. 987–998.
84. A simple feedbak control for chaotic osillator with limited power supply / S. de Souza [et al.] // Jour. of Sound and Vibration. — 2007. — Vol. 299, no. 3. — P. 664–671.
85. Sudden changes in chaotic attrators and transient basins in a model for rattling in gearboxes / S. de Souza [et al.] // Chaos, Solitons and Fractals. — 2004. — Vol. 21. — P. 763–772.
86. *Lebedenko Y. O., Mikhlin Y. V., Pinsky M. A.* Resonance Dynamics of the Non-ideal System Having the Pendulum as Absorber of Elastic Vibrations // Nonlinear Vibrations Excited by Limited Power Sources / ed. by J. M. Balthazar. — Cham : Springer International Publishing, 2022. — P. 139–149. — DOI: 10.1007/978-3-030-96603-4\_9. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4_9).
87. Normal Modes of Chaotic Vibrations and Transient Normal Modes in Non-linear Systems / Y. V. Mikhlin [et al.] // Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials / ed. by I. V. Andrianov [et al.]. — Cham : Springer International Publishing, 2019. — P. 85–100. — DOI: 10.1007/978-3-319-92234-8\_6. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-92234-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-92234-8_6).

88. *Gorodetskyi V., Osadchuk M.* Simplification of a reconstructed model // International Journal of Dynamics and Control. — 2019. — Dec. — Vol. 7, no. 4. — P. 1213–1224. — ISSN 2195-2698. — DOI: 10.1007/s40435-019-00579-w. — URL: <https://doi.org/10.1007/s40435-019-00579-w>.
89. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. — М: Наука, 1990. — С. 312.
90. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 / Л. П. Шильников [и др.]. — Москва-Ижевск: РХД, 2004. — С. 416.
91. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е.* Лекции по нелинейной динамике. — Москва, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. — С. 516.
92. *Швец А., Макасеев А.* Влияние запаздывания на регулярные и хаотические колебания плоского маятника // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 1. — С. 365–377.
93. *Краснопольская Т. С., Швец А. Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. — С. 280.
94. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Наука, Москва, 1974. — С. 410.
95. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Наук. думка, Киев, 1971. — С. 440.
96. *Bajaj A. K., Johnson J. M.* Asymptotic techniques and complex dynamics in weakly non-linear forced mechanical systems // Int. J. Non-Linear Mech. — 1990. — Vol. 25, no. 2. — P. 211–226.
97. *Li'enard A., Chipart M. N.* Sur le signe de la partie r'eele des racines d'une quation alg'ebrique // J. Math. Pures Appl. (9). — 1914. — Т. 10, n° 4. — P. 291–346.

# Додаток 1. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Статті в наукових фахових виданнях

1. *Швец О. Ю., Донецький С. В.* Приховані й рідкісні атрактори в неідеальних електропружних системах // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 2. — С. 177—187. — ISSN 1815-2019. Періодичне фахове видання.
2. *Shvets A., Donetskyi S.* New Types of Limit Sets in the Dynamic System “Spherical Pendulum—Electric Motor” // Nonlinear Mechanics of Complex Structures: From Theory to Engineering Applications / ed. by H. Altenbach, M. Amabili, Y. V. Mikhlin. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 443–455. — DOI: 10.1007/978-3-030-75890-5\_25. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_25). Scopus, Q3.
3. *Донецький С. В., Швец О. Ю.* Узагальнення поняття атрактора для маятникових систем з обмеженим збудженням // Нелінійні коливання. — 2021. — Т. 24, № 4. — С. 473—481. Фахове видання категорії А. Переклад англ. мовою:  
*Donetskyi V. S., Shvets A. Y.* Generalization of the Concept of Attractor for Pendulum Systems with Finite Excitations // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — June. — Vol. 273, no. 2. — P. 220–229. — ISSN 1573-8795. — DOI: 10.1007/s10958-023-06495-x. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06495-x>. Scopus, Q3.
4. *Donetskyi S. V., Shvets A. Y.* Bifurcations “Cycle–Chaos–Hyperchaos” in Some Nonideal Electroelastic Systems // Nonlinear Vibrations Excited by Limited Power Sources / ed. by J. M. Balthazar. — Cham : Springer

International Publishing, 2022. — P. 43–51. — DOI: 10.1007/978-3-030-96603-4\_4. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4_4). Scopus.

5. *Донецький С., Швець О.* Біфуркації максимальних атракторів неідеальних маятникових систем // Доповіді Національної академії наук України. — 2022. — № 3. — С. 13–19. — DOI: 10.15407/dopovidi2022.03.013. — URL: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.03.013>. Фахове видання категорії Б.

#### Праці наукових конференцій

1. *Shvets A., Donetskyi S.* Transition to Deterministic Chaos in Some Electroelastic Systems // 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, I. Lubashevsky. — Cham : Springer International Publishing, 2019. — P. 257–264. — DOI: 10.1007/978-3-030-15297-0\_23. Scopus. The 11th CHAOS 2018 International Conference. Рим, Італія. 5-8 червня 2018. Зроблено доповідь.
2. *Shvets A., Donetskyi S.* Identification of Hidden and Rare Attractors in Some Electroelastic Systems with Limited Excitation // 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 865–878. — DOI: 10.1007/978-3-030-70795-8\_60. Scopus. The 13th CHAOS 2020 International Conference. Флоренція, Італія. 9-12 червня 2020. Зроблено доповідь.
3. *Donetskyi S., Shvets A.* Double Symmetry and Generalized Intermittency in Transitions to Chaos in Electroelastic Systems // 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / ed. by C. H. Skiadas, Y. Dimotikalis. — Cham : Springer International Publishing, 2022. — P. 135–142. — DOI: 10.1007/978-3-030-96964-6\_11. Scopus. The 14th CHAOS

2021 International Conference. Афіни, Греція. 8-11 червня 2021. Зроблено доповідь.