

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Станжицького Андрія Олександровича
на тему «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних
функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії
в галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дисертації.

Дисертація присвячена дослідженню розв'язків початкових задач для стохастичних нескінченновимірних функціонально-диференціальних рівнянь, як звичайного типу так і нейтрального. На відміну від класичних стохастичних диференціальних рівнянь, які можна назвати «звичайними», ці рівняння поєднують в собі риси функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними і стохастичних рівнянь Іто. Інтерес до цих рівнянь зумовлений, перш за все, важливістю їх практичного застосування в різних областях: біомедицина (біодинамічні рівняння); динамічні моделі фізики, популяційні моделі генетики, моделі хімічних процесів, наприклад модель хемотаксису, фінансові і економічні процеси, тощо. Часто такі моделі описують об'єкти досить складної структури, еволюція яких відбувається піддією випадкових сил і з урахуванням післядії, що приводить до стохастичних функціонально-диференціальних еволюційних рівнянь. Тому актуальність цієї тематики не викликає сумніву. Різні аспекти теорії таких рівнянь досліджували Є. Ф. Царьков, Н. Bao, L. Bin, B. Boufoussi, Y. Cai, Z. G. Cao, Н. Chen, S. Hajji, S. Hu, S. Jankovic, M. Jovanovic, V. Kolmanovskii, N. Koroleva, E.-H. Lakhel, X. X. Liao, K. Liu, T. Maizenberg, X. Mao, A. Myshkis, J. Randjelovic, A. Rodkina, M. Scheutzow, F. Wei, X. Xia, Y. Xu, M. Xue, X. Yang, L. Yong, S. Zhou, Q. Zhu та інші. Серед стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь виділяють клас стохастичних диференціальних рівнянь нейтрального типу. Особливістю цих рівнянь є наявність всередині їх «похідної» запізнення. Запити практики привели до інтенсивного розвитку теорії функціонально-диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах. Певним підсумком таких досліджень є монографія Хуана (2009). Теорія стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах також зазнає інтенсивного розвитку. З цієї тематики відзначимо роботи А. Anguraj, P. Balasubramaniam, B. Boufoussi, T. Caraballo, H. Chen, S. Hajji, Z. Li, K. Liu, J. Luo, N. I. Mahmudov, M. McKibben, J. Real, A. M. Samoilenko, A. N. Stanzhyskiy,

Т. Taniguchi, D. Vinayagam, A. Vinodkumar, L. Yan. Спільною рисою робіт щодо стохастичних еволюційних рівнянь нейтрального типу зазначених авторів є те, що коефіцієнти рівняння задовольняють глобальну умову Ліпшиця, яка у застосуваннях далеко не завжди виконана. Тому вивчення таких рівнянь без умови Ліпшиця на коефіцієнти є надзвичайно актуальним з точки зору застосувань. Ще однією рисою вказаних робіт є те, що результати там отримані, носять досить абстрактний характер і перевірка умов теорем у конкретних ситуаціях є досить складною задачею. Особливо це стосується рівнянь із головним оператором диференціального типу і нелінійностями, що породжуються дійснозначними відображеннями (відображення Немицького), оскільки вони є математичними моделями реальних процесів та потрібні прикладникам, то і умови там повинні бути такими, що зрозумілі і легко перевіряється. Саме отриманню таких умов і присвячено дане дисертаційне дослідження.

Зважаючи на це, тема дисертаційної роботи А.О. Станжицького є безумовно актуальною.

Оцінка обґрунтованості наукових результатів дисертації, їх достовірності та новизни.

Наукова новизна результатів дисертаційного дослідження полягає в наступному:

- 1) для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу без умови Ліпшиця встановлено умови існування та єдиності м'якого розв'язку початкової задачі;
- 2) доведено властивість Маркова та Феллера для розв'язків у просторах зсувів $C_h([-h, 0], H)$;
- 3) встановлено зв'язок між глобально обмеженими за ймовірністю розв'язками та існуванням інваріантних мір у просторах зсувів;
- 4) для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу отримано умови існування інваріантних мір у просторах зсувів;
- 5) досліджено стохастичне функціонально-диференціальне рівняння у частинних похідних типу "реакція-дифузія", що моделює процеси руху із дифузією;
- 6) для лінійних стохастичних рівнянь у гільбертових просторах знайдено коефіцієнтні умови існування та єдиності інваріантних мір;
- 7) для системи спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь отримані умови існування та єдиності глобального слабкого розв'язку;
- 8) доведено неперервну залежність розв'язків від початкових функцій;
- 9) встановлено існування та єдиність сильних розв'язків (локальних) системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь бідоменного типу.

Всі отримані результати є достовірними, що підтверджено їх повними та коректними доведеннями.

Отже, в дисертаційній роботі поставлене наукове завдання виконано повністю, здобувач повною мірою оволодів методологією наукової діяльності.

Оцінка змісту дисертації, її завершеність та дотримання принципів академічної доброчесності.

За своїм змістом дисертаційна робота здобувача Станжицького А.О. повністю відповідає Стандарту вищої освіти зі спеціальності 111 «Математика» та напрямкам досліджень відповідно до освітньої програми «Математика».

Дисертаційна робота є завершеною науковою працею і свідчить про наявність особистого внеску здобувача у науковий напрям «Диференціальні рівняння».

Розглянувши звіт подібності за результатами перевірки дисертаційної роботи на текстові співпадиння, можна зробити висновок, що дисертаційна робота Станжицького Андрія Олександровича є результатом самостійних досліджень здобувача і не містить елементів фальсифікації, компіляції, фабрикації, плагіату та запозичень. Використані ідеї, результати і тексти інших авторів мають належні посилання на відповідне джерело.

Мова та стиль викладення результатів

Дисертаційна робота написана українською мовою. Результати викладені у логічній послідовності із використанням загальноприйнятої термінології.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, 4 розділів, висновків, списку літератури та додатку. Загальний обсяг дисертації 141 сторінка.

В анотаціях стисло зазначено актуальність дослідження, структуру дисертації, описано основні результати, наведені ключові слова та зміст роботи.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, висвітлено наукову новизну, теоретичне та практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача.

У **першому** розділі дисертації наведено огляд літератури, в якому згадано досить велику кількість робіт, присвячених широкому колу питань, пов'язаних із стохастичними функціонально-диференціальними рівняннями як у скінченновимірних так і нескінченновимірних просторах. Це вказує на обізнаність автора у тематиці, якій присвячена дисертація.

Другий розділ роботи носить допоміжний характер. Тут приведені необхідні поняття та твердження із теорії марковських напівгруп, інваріантних мір марковських динамічних систем, напівгруп лінійних операторів та стохастичного числення у нескінченновимірних просторах.

Основні результати роботи подано у третьому та четвертому розділах.

У **третьому** розділі роботи вивчаються стохастичні функціонально-диференціальні рівняння нейтрального типу в гільбертових просторах. Тут отримані теореми існування та єдиності м'яких розв'язків, доведена їх неперервна залежність у середньому квадратичному від початкових даних (початкових функцій). Даний факт встановлено шляхом побудови ітеративної послідовності розв'язків відповідної лінеаризованої задачі. Зазначимо, що дисертант значно послабив умови раніше відомих результатів. Так, для відображення g , що характеризує запізнення нейтрального типу, покращена умова на сталу Ліпшиця у плані її збільшення, і доведена до умови $M_g < 1$. Також зазначимо, що ця умова уже не виписана у термінах норм оберненого до Аоператора, як у раніше відомих роботах, що значно спрощує її перевірку. Далі, з використанням теореми існування та єдиності, встановлена властивість Маркова для отриманих розв'язків у просторах зсувів $C_h([-h, 0])$. Застосувавши факт неперервної залежності розв'язків від початкових даних, встановлена також властивість Феллера для відповідної перехідної функції. Основним результатом даного розділу є теорема про зв'язок між існуванням інваріантних мір та існуванням глобально обмеженого на півосі за ймовірністю розв'язку. Для лінійного випадку отримані необхідні та достатні коефіцієнтні умови існування інваріантних мір. Отримані теоретичні результати застосовані до стохастичного рівняння типу «реакція-дифузія», для якого у термінах коефіцієнтів отримані умови існування розв'язків та умови існування інваріантних мір.

Четвертий розділ присвячено слабким та сильним розв'язкам спарених нескінченновимірних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь. Такі рівняння є математичними моделями реальних об'єктів, частина параметрів яких зосереджена, а частина розподілена. Тобто, у системі частина рівнянь звичайні, а інші у частинних похідних. Тут описані простори у яких «сидять» розв'язки, вказані умови на головний оператор, що є стандартними для еволюційних рівнянь. Далі приведені означення слабких та сильних розв'язків, вказано на взаємозв'язок між ними та м'яким розв'язком. Основними результатами розділу є теореми існування та єдиності глобальних слабких розв'язків та сильних локальних розв'язків. Доведення існування слабких розв'язків проводиться методом галеркінських апроксимацій із використанням підходів компактності та монотонності. Слід зазначити, що по причині складності об'єкту дослідження, проводити необхідні оцінки та встановлювати граничні переходи дуже не просто і дисертант проявив тут хист та оригінальність міркувань. У висновках до дисертації чітко та стисло відзначено основні результати, що винесені на захист.

Список використаних джерел є досить повним та містить 118 найменувань, серед яких більшість, надрукованих за останнє десятиліття у провідних міжнародних виданнях, що підтверджує актуальність теми дисертаційної роботи.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою роботи та інформацію про апробацію результатів.

Дисертаційна робота оформлена відповідно до вимог наказу МОН України від 12 січня 2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертації».

Оприлюднення результатів дисертаційної роботи

Наукові результати дисертації висвітлені у трьох наукових публікаціях здобувача у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus, з яких одна стаття, що входить до квартиля Q2, одна до квартиля Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank .

Також результати дисертації були апробовані на 5 наукових фахових конференціях.

Таким чином, наукові результати описані в дисертаційній роботі повністю висвітлені у наукових публікаціях здобувача.

Недоліки та зауваження до дисертаційної роботи.

До роботи є кілька зауважень та побажань.

1. При доведеннях теорем автор часто користується лемою Гронуолла-Беллмана. Варто було б привести її формулювання у Розділі 2 - Попередні відомості.
2. Доведення Твердження 3.2. на мою думку варто було б розписати детальніше.
3. У Розділі 3 твердження про те, що напівгрупа $S(t)$ є неперервною у рівномірній операторній топології для $t > 0$, бажано було б також привести із доведенням, а не обмежитись послідовним посиленням на певні факти із списку літератури, із яких воно випливає.
4. При доведенні Леми 3.5 використана певна неочевидна числова нерівність. Для повноти викладення також варто було б привести її доведення.
5. Робота написана досить акуратно, хоча в ній і трапляються деякі описки. Мною помічені, наприклад, такі:
 - а) стр. 3: після слова «сидить» не закриті лапки;
 - б) стр. 7: у формулі $u = ut$ не відкриті дужки;
 - в) у останній формулі на стр. 19, залишилась англійська фраза «for all»;
 - г) теж саме стосується і формулювання Теорема 3.4 на стр. 60;
 - д) деякі формули на стор. 82, 83 набрані меншим шрифтом.

Вважаю, що висловлені зауваження не є визначальними і не зменшують загальну наукову новизну та практичну значимість результатів та не впливають на позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Висновок про дисертаційну роботу

Вважаю, що дисертаційна робота здобувача ступеня доктора філософії Станжицького Андрія Олександровича на тему «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах» виконана на високому науковому рівні, не порушує принципів академічної доброчесності та є закінченим науковим дослідженням, сукупність теоретичних та практичних результатів якого розв'язує наукове завдання, що має істотне значення для галузі знань 11 «Математика та статистика». Дисертаційна робота за актуальністю, практичною цінністю та науковою новизною повністю відповідає вимогам чинного законодавства України, що передбачені в п. 6 – 9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44.

Здобувач Станжицький Андрій Олександрович заслуговує на присудження ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент:

завідувач кафедри теорії ймовірностей

і математичного аналізу

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

МОН України,

доктор фізико-математичних наук,

доцент



Ганна СЛИВКА-ТИЛИЩАК

27 жовтня 2023 року

Підпис
Проректор



Ганна Сливка-Тилищак засвідчую.
/Гор Коболь/