ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Станжицького Андрія Олександровича
на тему «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в гільбертових просторах»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії
в галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дисертації.

Серед процесів навколишнього світу часто зустрічаються такі, еволюція яких залежить від минулих станів процесу, при цьому параметри таких процесів мають характер розподілених і зазнають випадкових впливів. Математичними моделями тоді є стохастичні функціонально-диференціальні рівняння у частинних похідних, наприклад: стохастичне рівняння реакція-дифузія, рівняння Нав'є-Стокса, рівняння пористих середовищ, рівняння популяційних моделей (узагальнена модель «хижак-жертва»), узагальнена модель ядерного реактора та багато інших. Отримання змістовних математичних результатів для таких рівнянь вимагає застосування та розвитку найсучасніших математичних методів: нелінійний функціональний аналіз, теорія напівгруп необмежених операторів, спектральна теорія, нескінченновимірний стохастичний аналіз, теорія рівнянь у частинних похідних. Саме дослідженню початкових задач для стохастичних нескінченновимірних функціонально-диференціальних рівнянь і присвячено дане дисертаційне дослідження. Причому тут розглянуто рівняння як звичайного типів, так і нейтрального, тобто ті, що містять запізнення у «похідній». Присутність такого запізнення вимагає застосування до рівнянь техніки, принципово відмінної від методів дослідження рівнянь без запізнень. Тому актуальність цієї тематики не викликає сумніву. Подібні дослідження проводились у роботах Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, Д.І. Мартинюка, Є. Ф. Царькова та його учнів, B. Boufoussi, M. Jovanovic, V. Kolmanovskii, N. Koroleva, E.-H. Lakhel, X. X. Liao, K. Liu, T. Maizenberg, X. Mao, A. Myshkis, A. Rodkina, M. Scheutzow, M. Rockner, R. Zhu, X. Zhu, F. Wei, та інших. Теорія стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах також зазнає інтенсивного розвитку. З цієї тематики відзначимо роботи A. Anguraj, P. Balasubramaniam, B. Boufoussi, T. Caraballo, H. Chen, S. Hajji, Z. Li, K. Liu, J. Luo, N. I. Mahmudov, M. McKibben, J. Real, T. Taniguchi, D. Vinayagam, A. Vinodkumar, L. Yan. Однак теореми існування та єдиності, отримані у цих роботах, вимагають виконання глобальної

умови Ліпшиця для коефіцієнтів рівняння, що не завжди має місце у прикладних задачах, бо нелінійності там, як правило, степеневі. Інші умови також носять досить абстрактний характер, що значно ускладнює їх перевірку у конкретних ситуаціях. Саме послабленню раніше отриманих умов та їх адаптації до реальних математичних моделей і присвячено дане дисертаційне дослідження.
Зважаючи на це, тема дисертаційної роботи А.О. Станжицького є безумовно актуальною.

Оцінка обґрунтованості наукових результатів дисертації, їх достовірності та новизни.

Наукова новизна результатів дисертаційного дослідження полягає в наступному:

1) встановлено умови глобального існування та єдиності м'якого розв'язку початкової задачі для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу без глобальної умови Ліпшиця на коефіцієнти зносу та дифузії;
2) доведено неперервну в середньому квадратичному залежність розв'язків від початкових функцій;
3) для перехідної функції ймовірностей отримано умови її марковості та феллеровості;
4) отримано достатні умови існування інваріантних мір у просторі зсувів $C_h([-h,0],H)$ для спряженої напівгрупи операторів, породженої перехідною функцією;
5) отримані абстрактні результати застосовано до стохастичного функціонально-диференціального рівняння у частинних похідних типу "реакція-дифузія";
6) для лінеаризованої задачі отримано необхідні й достатні умови існування та єдиності інваріантних мір;
7) отримано умови існування та єдиності глобального слабкого розв'язку для системи двох спарених стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь;
8) встановлено існування та єдиність сильних локальних розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь для моделі серцевого дефібрилятора.

Всі отримані результати є достовірними, що підтверджено їх повними та коректними доведеннями.

Отже, в дисертаційній роботі поставлене наукове завдання виконано повністю, здобувач повною мірою оволодів методологією наукової діяльності.

Оцінка змісту дисертації, її завершеність та дотримання принципів академічної доброчесності.

За своїм змістом дисертаційна робота здобувача Станжицького А.О.

повністю відповідає Стандарту вищої освіти зі спеціальності 111 «Математика» та напрямкам досліджень відповідно до освітньої програми «Математика».

Дисертаційна робота є завершеною науковою працею і свідчить про наявність особистого внеску здобувача у науковий напрям «Диференціальні рівняння».

Розглянувши звіт подібності за результатами перевірки дисертаційної роботи на текстові співпадіння, можна зробити висновок, що дисертаційна робота Станжицького Андрія Олександровича є результатом самостійних досліджень здобувача і не містить елементів фальсифікації, компіляції, фабрикації, плагіату та запозичень. Використані ідеї, результати і тексти інших авторів мають належні посилання на відповідне джерело.

Мова та стиль викладення результатів

Дисертаційна робота написана українською мовою. Послідовність викладення результатів роботи є логічно строгою і зрозумілою

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, 4 розділів, висновків, загальних висновків, списку літератури та додатку. Загальний обсяг дисертації 141 сторінка.

В анотаціях стисло зазначено актуальність дослідження, структуру дисертації, описано основні результати, наведені ключові слова та зміст роботи.

У *вступі* дано обґрунтування актуальності роботи, чітко сформульовано мету дослідження, наукову новизну, теоретичне та практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача.

Перший розділ дисертації присвячено огляду літератури. Список є досить широким, значна частина приведених джерел датовані останнім десятиліттям, що вказує на обізнаність автора у сучасних математичних трендах із даної тематики.

У другому розділі приведено деякі поняття та твердження стосовно циклу математичних теорій, що використані у дисертації. Це відноситься до теорії марковських динамічних систем та відповідних напівгруп операторів, з ними пов'язаних, інваріантних мір для таких систем, теорії стохастичного нескінченновимірного аналізу, окремих питань теорії ядерних операторів та операторів Гільберта-Шмідта. Всі приведені факти активно застосовуються у подальших дослідженнях, що досить зручно для читання роботи, оскільки робить її замкнутою.

Основні результати роботи подано у третьому та четвертому розділах.

Третій розділ роботи стосується стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь нейтрального типу в гільбертових просторах. Спочатку отримано умови існування та єдиності м'яких розв'язків, доведено їх неперервну залежність у середньому квадратичному від початкових функцій. Зазначимо, що, на відміну від попередників, дисертанту вдалося суттєво

послабити умови теореми, зробивши їх такими, що відносно легко перевіряються і застосовні до реальних математичних моделей. Так, наприклад, для запізнення нейтрального типу g умова на сталу Ліпшиця покращена до умови $M_g < 1$. У попередників вона була значно меншою, ще й залежала від довжини інтервалу розгляду та від норми оберненого до головного оператора. Наступне коло питань стосувалось властивостей розв'язків як випадкових процесів. Доведена їх марковість у просторах зсувів $C_h([-h, 0]$, та встановлена феллерівська властивість. Отримано також стохастичну неперервність відповідної перехідної функції. Далі, застосувавши підхід компактності, що базується на теоремі Крилова-Боголюбова про компактність певної сім'ї ймовірнісних мір, отримано умови існування інваріантної міри для спряженої напівгрупи операторів, породжених перехідною функцією. Дані умови, як з'ясувалось, є наслідком існування глобально обмеженого розв'язку та компактності напівгрупи операторів, породжених головним оператором рівняння як її генератором. Отримані теоретичні результати застосовано до стохастичного рівняння типу «реакція-дифузія», для якого отримано коефіцієнтні умови існування розв'язків та умови існування інваріантних мір.

У четвертому розділі розглянуто рівняння, що є математичними моделями процесів із розподіленими та зосередженими параметрами. Тому досліджуваний тут об'єкт є системою двох рівнянь, одне із яких нескінченновимірне, а інше — звичайне функціонально-диференціальне. Основні питання стосуються теорем існування та єдиності слабких і сильних розв'язків таких спарених нескінченновимірних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь. Для успішного подолання труднощів тут потрібно було ввести розумні функціональні простори, яким повинні належати розв'язки. Основними результатами розділу є теореми існування та єдиності глобальних слабких розв'язків та сильних локальних розв'язків. Для доведення існування слабких розв'язків застосовано підходи компактності та монотонності. Вони дозволяють у відповідних гальоркінських наближеннях після отримання енергетичних оцінок зробити граничний перехід по розмірності відповідних підпросторів. Доведення існування сильних розв'язків для рівнянь бідоменного типу проводиться шляхом зведення стохастичного рівняння до детермінованого рівняння з параметром із подальшим застосуванням теорем типу Сіріна.

У висновках до кожного розділу та дисертації в цілому акцентовано відзначено основні результати, що винесені на захист.

Список використаних джерел містить 118 найменувань, серед яких більшість надруковано за останній час у провідних англомовних закордонних виданнях, що підтверджує актуальність теми дисертаційної роботи.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою роботи та інформацію про апробацію результатів.

Дисертаційна робота оформлена відповідно до вимог наказу МОН України від 12 січня 2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертації».

Оприлюднення результатів дисертаційної роботи

Наукові результати дисертації висвітлено у трьох наукових працях здобувача, опублікованих у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus, з яких одна — стаття, що входить до квартиля Q2, одна — до квартиля Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank.

Також результати дисертації доповідались на 5 наукових фахових конференціях.

Таким чином, наукові результати, описані в дисертаційній роботі, повністю висвітлено у наукових публікаціях здобувача.

Недоліки та зауваження до дисертаційної роботи.

До роботи є кілька зауважень та побажань.

1. При доведеннях теорем автор часто користується теоремами вкладення типу Соболева. У розділі 2 варто було б навести формулювання теореми про такі вкладення.
2. Аналогічне зауваження стосується і нескінченновимірної версії теореми Арцела-Асколлі.
3. На с. 77 перехід від першої нерівності до другої варто було б описати детальніше, а не обмежуватись лише фразою «використавши нерівність Хаусдорфа-Юнга для конволюцій».
4. Робота містить деякі описки, наприклад:
   1) с. 57 — «компактоності» замість «компактності»;
   2) с. 75 — залишився англійський термін «Lemma»;
   3) с. 58 — знову англійський термін «algebra»;
   4) деякі формули на с. 82, 83 набрані меншим шрифтом;
   5) с. 100 — «единість» замість «єдиність».

Вважаю, що висловлені зауваження не є визначальними і не зменшують загальну наукову новизну та практичну значимість результатів та не впливають на позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Висновок про дисертаційну роботу

Вважаю, що дисертаційна робота здобувача ступеня доктора філософії Станжицького Андрія Олександровича на тему «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь в

гільбертових просторах» виконана на високому науковому рівні, не порушує принципів академічної доброчесності та є закінченим науковим дослідженням, сукупність теоретичних та практичних результатів якого розв'язує наукове завдання, що має істотне значення для галузі знань 11 «Математика та статистика». Дисертаційна робота за актуальністю, практичною цінністю та науковою новизною повністю відповідає вимогам чинного законодавства України, що передбачені в п. 6 – 9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44.

Здобувач Станжицький Андрій Олександрович заслуговує на присудження ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент:

завідувач відділу диференціальних рівнянь
та теорії коливань
Інституту математики НАН України
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор Олександр БОЙЧУК

30 жовтня 2023 року

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
Ідентифікаційний код 06417207
Підпис
м. Київ

ЗАСВІДЧУЮ
Відділ кадрів
Інститут математики НАН України
«30» жовтня 2023 р.