МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ПАЛІЙЧУК ЛІЛІЯ СЕРГІЇВНА

УДК 517.9

БАГАТОЗНАЧНИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ ХВИЛЬОВОГО ТИПУ З НЕРЕГУЛЯРНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, доцент
Касьянов Павло Олегович,
Навчально-науковий комплекс
«Інститут прикладного системного аналізу»
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського», директор

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Пічкур Володимир Володимирович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, доцент кафедри
моделювання складних систем

доктор фізико-математичних наук, доцент
Гарт Людмила Лаврентіївна,
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара, професор кафедри
обчислювальної математики та математичної
кібернетики факультету прикладної математики

Захист відбудеться «5» червня 2018 р. о 16 годині 30 хвилин на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.002.03 при Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за адресою: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. №35, ауд. №001.

З дисертацією можна ознайомитись у Науково-технічній бібліотеці ім. Г.І. Денисенка Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за адресою: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37.

Автореферат розісланий «27» квітня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
д.ф.-м.н., професор В. Капустян В.О. Капустян

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В зв'язку з розвитком нових галузей науки і техніки в останні роки виникла потреба в підвищенні точності математичного моделювання та керування хвильовими процесами і полями. В зв'язку з цим постала необхідність в послабленні умов на параметри моделей таких процесів для адекватного відображення реальних фізичних ефектів та явищ, врахування різного роду впливів на досліджувані системи. Науковий інтерес до дослідження хвильових процесів зумовлений широким колом застосувань, починаючи з коливань струни, руху вагона на ресорах і закінчуючи ударними хвилями після вибухів чи землетрусів, циклами Кондратьєва тощо. В технічних системах насьогодні значна увага приділяється вивченню електромеханічних хвиль, зокрема в п'єзоелектриках (S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea, Z. Liu, K. Kuttler, W. Han, G. Tao та ін.). Динаміка таких процесів описується диференціальними рівняннями з частинними похідними, права частина яких може мати розривний, багатозначний характер. Зважаючи на це, поведінку таких об'єктів з розривною нелінійністю не можна дослідити за допомогою класичної теорії операторних напівгруп, а проведення чисельних досліджень вимагає суттєвого спрощення досліджуваних моделей, припущень щодо гладкості, монотонності функції взаємодії, значних обчислювальних ресурсів тощо.

Теоретичний апарат для роботи з нелінійними еволюційними задачами розроблено в роботах С.Л. Соболєва, H. Gajewski, K. Greger, K. Zacharias, В.С. Мельника, В.О. Капустяна, В.В. Пічкура та ін. Дослідження якісної поведінки еволюційних систем в нескінченновимірних просторах зазвичай пов'язують з доведенням існування та встановленням топологічних та структурних характеристик глобального та траєкторного атракторів (J. Hale, А.В. Бабін, М.Й. Вішик, О.О. Ладиженська, В.В. Чепижов). Для випадку, коли система допускає неоднозначну розв'язність, теорія глобальних та траєкторних атракторів узагальнена в наукових працях J. Ball, В.С. Мельника, М.З. Згуровського, О.В. Капустяна, П.О. Касьянова та їх учнів і базується на понятті багатозначного напівпотоку, введеного член.-кор. НАН України В.С. Мельником. Методи багатозначних напівпотоків використовуються в задачах, де неможливо гарантувати єдиність розв'язку відповідної початкової задачі.

Не зважаючи на вагомі результати, отримані в роботах вищезгаданих вчених, ряд важливих задач досі залишався не вирішеним. Зокрема, актуальною задачею, якій присвячена дана дисертаційна робота, є якісне дослідження глобальної поведінки функцій стану хвильових об'єктів з розривною нелінійністю, грунтуючись на засадах системного аналізу (М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова, П.І. Бідюк, В.Я. Данилов, В.Д. Романенко та ін.), багатозначного аналізу (В.С. Мельник, Aubin J.-P., Frankowska H. та ін.), теорії глобальних та траєкторних атракторів для багатозначних напівпотоків (J. Ball, В.С. Мельник, М.Й. Вішик, В.В. Чепижов та ін.). Отримані результати мають строге математичне обґрунтування і водночас характеризуються зручністю при застосуванні до розв'язання прикладних задач. Вивчення глобальної поведінки функцій стану дозволяє надійно передбачити еволюцію процесу з врахуванням різного роду впливів, спрямовувати динаміку досліджуваних систем на задані стаціонарні рівні, обґрунтовувати чисельні алгоритми пошуку слабких (узагальнених) розв’язків задач, що вивчаються, та вибір параметрів керування з метою надійного функціонування систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» згідно науково-дослідних тем:

- «Довгострокові прогнози функцій стану керованих геофізичних нелінійних систем з багатовимірними суперпотенціальними законами» (номер держ. реєстр. 0112U001229, 2012-2016 рр.),
- «Еволюційні включення та варіаційні нерівності для задач аналізу даних про Землю» (номер держ. реєстр. 0112U004117, 2012 р.);

та грантів:

- гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених в 2012 році «Диференціально-операторні включення для задач аналізу даних про Землю» (номер держ. реєстрації 0112U008215),
- гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених в 2013 році «Структурні властивості притягуючих множин деяких нелінійних крайових задач геофізики і механіки» (номер держ. реєстр. 0113U006191),
- гранту на виконання проектів НДР молодих учених у 2013-2014 рр. «Довгострокові прогнози функцій стану та регулярність граничних циклів керованих процесів дифузійного типу» (номер держ. реєстр. 0113U002978).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є якісне дослідження та аналіз глобальної поведінки розв’язків дисипативних еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями.

Для досягнення мети були поставлені та розв’язані такі завдання:

- дослідити якісну динаміку слабких розв'язків еволюційної системи хвильового типу з розривною нелінійністю в скалярному випадку;
- дослідити асимптотичну поведінку розв'язків стохастично збуреної еволюційної задачі хвильового типу;
- встановити умови існування та структурні властивості притягуючих множин для диференціально-операторного включення хвильового типу;
- побудувати алгоритм розв'язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями;
- застосувати отримані результати до практичних задач.

Об’єкт дослідження – дисипативні еволюційні системи хвильового типу з нерегулярними обмеженнями.

Предмет дослідження – математичні моделі дисипативних еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями та методи багатозначного аналізу глобальної поведінки їх функцій стану.

Методи дослідження грунтуються на використанні принципів та засад теорії глобальних та траєкторних атракторів для багатозначних напівпотоків, методів системного, нелінійного та багатозначного аналізу, принципів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у наступному:

вперше:

— для автономного хвильового рівняння з розривною функцією взаємодії, представленною у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування глобального атрактора та встановлено його структурні властивості; отримані результати поширено на більш загальне диференціально-операторне включення, для якого додатково доведено існування траєкторного атрактора, встановлено взаємозв'язок між атракторами та простором повних траєкторій, доведено скінченновимірність динаміки слабких розв'язків з точністю до малого параметру;

— для автономного хвильового рівняння, збуреного адитивним білим шумом, з негладким нелінійним доданком встановлено існування випадкового атрактора;

отримали подальший розвиток:

— методи розв'язання контактних задач взаємодії в'язкопружного тіла з жорсткою опорою з функціями взаємодії субградієнтного типу;

— методологія нелінійного і багатозначного аналізу для дослідження диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку хвильового типу у випадку розривної функції взаємодії.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний та практичний характер. Її результати суттєво доповнюють та узагальнюють математичний апарат дослідження якісної поведінки розв'язків класів автономних еволюційних задач хвильового типу з нерегулярними обмеженнями в обмежених областях у випадках, коли умови на параметри задачі не гарантують єдиності розв'язку відповідних задач Коші, та можуть бути використані при математичному моделюванні еволюційних процесів з негладкими або розривними функціями взаємодії.

Крім того, розроблений в дисертаційній роботі алгоритм для розв'язання задач глобальної поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями було застосовано до дослідження складної п'єзоелектричної системи. Це дозволило забезпечити стійке функціонування досліджуваного об'єкту. Такий алгоритм може застосовуватись до інших класів складних процесів та полів різної природи. Отримані теоретичні результати можуть бути використані в процесах керування для зменшення або компенсації небажаних ефектів, для обґрунтування чисельних алгоритмів пошуку слабких розв'язків, при виведенні досліджуваних систем на задані стаціонарні рівні.

Результати дисертації впроваджені в навчальний процес ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського і використовуються при викладанні навчальних дисциплін «Елементи нелінійного аналізу» та «Системний аналіз стохастично розподілених процесів».

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що виносяться на захист, одержано автором самостійно. При використанні відомих положень та залежностей мають місце коректні посилання на авторів та відповідні джерела. В статтях, написаних в співавторстві, автором: доведено існування випадкового атрактора для абстрактної багатозначної динамічної системи, що дозволило отримати існування випадкового атрактора для хвильового рівняння, збуреного адитивним білим шумом, з негладким нелінійним доданком (теореми 3, 7) [1]; для автономного хвильового рівняння з розривною нелінійністю встановлені властивості та оцінки для слабких розв'язків, з'ясовано характер залежності слабких розв'язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування компактного інваріантного глобального атрактора для слабких розв'язків та отримано його структурні властивості (леми 16.4-16.6, 16.8, 16.9, теореми 16.1-16.5) [2]; для автономного хвильового включення з функцією взаємодії субградієнтного типу встановлені властивості та оцінки для слабких розв'язків, з'ясовано характер залежності слабких розв'язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування глобального та траєкторного атракторів, встановлено взаємозв'язок між ними та простором повних траєкторій, встановлено структурні властивості глобального атрактора, доведено скінченновимірність з точністю до малого параметра динаміки розв'язків [3, 4, 6] (лема 2-4, теореми 1-3 [3]; теореми 16.1, 16.2 [4]; теорема 1 [6]); визначено достатні умови існування рівномірного компактного глобального атрактора у неавтономному випадку (теореми 2.1, 3.1) [5].

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на серії спільних наукових семінарів КПІ ім. Ігоря Сікорського та механіко-математичного факультету МДУ імені М.В. Ломоносова (2012, 2014, 2015), семінарі НДВ системної математики ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського та представлені в збірниках тез доповідей таких конференцій:

- Міжнародна конференція з функціонального аналізу, присвячена 125-річчю С. Банаха (м.Львів, 2017);
- Міжнародна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології» (м. Київ, 2013, 2014, 2015),
- Міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (м. Київ, 2013),
- Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми у вищій школі» (м. Київ, 2013),
- Кримська міжнародна математична конференція «КММК-2013» (м. Судак, 2013),
- Міжнародна конференція, присвячена пам'яті члена-кореспондента НАН України В.С. Мельника, «Нелінійний аналіз та застосування» (м. Київ, 2015).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в 14 наукових публікаціях: в 5 наукових статтях в провідних фахових виданнях, з них 2 – у фахових виданнях України, що входять до наукометричних баз даних [1,3], 3 – в іноземних виданнях [2,4,5], а також у 8 тезах доповідей наукових конференцій [7-14], та в 1 статті в іншому виданні [6].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 244 найменування, і додатків. Загальний обсяг роботи складає 170 сторінок друкованого тексту, з яких 125 сторінок основної частини, 14 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність якісного дослідження глобальної поведінки функцій стану дисипативних динамічних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями; визначено: мету, об’єкт, предмет та методи дослідження; показано зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами; показано наукову новизну, теоретичне та практичне значення отриманих в ході дисертаційної роботи результатів; наведено відомості щодо особистого внеску здобувача, публікацій та апробацій результатів, структури та обсягу роботи.

В **першому розділі** визначається сучасний стан та проблематика досліджень класу фізико-механічних процесів, математичними моделями яких є нелінійні хвильові об’єкти. Виявлено, що вибір керування та параметрів взаємодії для надійного функціонування таких систем зіштовхується з рядом труднощів. Серед них варто виокремити незастосовність класичного математичного апарату для дослідження динаміки розв’язків відповідних математичних моделей, велика обчислювальна складність алгоритмів пошуку розв’язків, складність математичного обґрунтування чисельних процедур, значні похибки через використання наближених неперервних керуючих функцій тощо. В ході аналізу наукових праць виявлено ряд актуальних практичних задач, що зосереджені на компенсації небажаних ефектів, стабільному функціонуванні, точному позиціонуванні в складних технічних системах.

Здійснено огляд існуючих підходів до вивчення динаміки розв’язків нелінійних еволюційних систем. Оскільки об’єкту дослідження притаманна розривна нелінійність, то для таких систем не є можливим застосування класичного математичного апарату для знаходження розв’язків та встановлення їх властивостей. Тому зручним є перехід від диференціального рівняння з частинними похідними до диференціального включення в спеціальному класі просторів розподілів, множина розв’язків якого включає в себе усі розв’язки початкового рівняння. Перехід до операторних та диференціально-операторних включень використовують для якісного та кількісного вивчення односторонніх задач математичної фізики, для роботи з диференціальними рівняннями з частинними похідними, диференціальні оператори яких допускають розрив по фазовій змінній, з диференціальними рівняннями з розривною правою частиною тощо. Зручність такого підходу полягає у тому, що для дослідження диференціальних включень вже розроблений потужний математичний апарат, зокрема в роботах J. Ball, М.З. Згуровського, В.С. Мельника, О.В. Капустяна, П.О. Касьянова та ін.

Приведемо основні поняття, визначення та конструкції, які є важливими для подальшого викладу результатів дисертації. Розглянемо трійку просторів Гельфанда $(V;\, H;\, V^*)$. Покладемо $X = V \times H$ – фазовий простір деякої неоднозначно розв’язної еволюційної задачі. Одним з ключових понять при дослідженні асимптотичної поведінки розв’язків є поняття багатозначного напівпотоку, породженого усіма слабкими розв’язками. Нехай X – повний метричний простір, $P(X)$ – множина всіх непорожніх підмножин X.

Означення. Багатозначне відображеня $\mathcal{G}\colon \mathbf{R}_+ \times X \to P(X)$ називається багатозначним напівпотоком, якщо виконуються такі властивості (В.С. Мельник):

- $\mathcal{G}(0,\cdot) = I_X$ – тотожнє відображення;
- для будь-яких t_1, $t_2 \in \mathbf{R}_+$ та для будь-яких $x \in X$ виконується таке вкладення: $\mathcal{G}(t_1 + t_2, x) \subset \mathcal{G}(t_1, \mathcal{G}(t_2, x))$, де $\mathcal{G}(t, B) = \bigcup_{x\in B} \mathcal{G}(t, x)$, $B \in X$.

Означення. Багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ називається строгим, якщо для будь-яких t_1, $t_2 \in \mathbf{R}_+$ та для будь-якого $x \in X$: $\mathcal{G}(t_1 + t_2, x) = \mathcal{G}(t_1, \mathcal{G}(t_2, x))$.

Означення 1.1 Багатозначний напівпотік $\mathcal{G}: \mathbf{R}_+ \times X \to P(X)$ називається асимптотично компактним, якщо для довільної послідовності $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, $\varphi_n \in \mathcal{G}(t_n, \varphi_n(0))$ $\forall n \geq 1$ такої, що $\{\varphi_n(0)\}_{n\geq 1}$ – обмежена, і для будь-якої послідовності $\{t_n\}_{n\geq 1}$: $t_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, $\{\varphi_n(t_n)\}_{n\geq 1}$ має збіжну підпослідовність.

Для дослідження якісної поведінки розв'язків в даній роботі розглядається поняття глобального атрактора.

Означення. Множина $\mathcal{A}$ називається глобальним атрактором для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, якщо виконуються такі умови:

- для всіх $t \geq 0$ $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}(t, \mathcal{A})$;
- $\mathcal{A}$ – притягуюча множина, тобто, для будь-якої обмеженої множини $B \subset X$:
$$\operatorname{dist}(\mathcal{G}(t, B), \mathcal{A}) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{1}$$
де $\operatorname{dist}(C, D) = \sup\limits_{c\in C} \inf\limits_{d\in D} \parallel c - d \parallel_X$ – напівметрика Хаусдорфа;
- $\mathcal{A} \subset Y$ для будь-якої замкнутої множини $Y \subset X$, що задовольняє співвідношення (1).

Означення. Глобальний атрактор називаєть інваріантним, якщо $\mathcal{A} = \mathcal{G}(t, \mathcal{A})$ для всіх $t \geq 0$.

Зазначимо, що з означення глобального атрактора випливає його єдиність.

Для дослідження потраєкторної динаміки розв'язків в розширеному фазовому просторі вводиться поняття траєкторного атрактора. Для цього розглядається сімейство $\mathcal{K}_+$ всіх слабких розв'язків, визначених на $[0, +\infty)$. $\mathcal{K}_+$ – трансляційно інваріантне, тобто для будь-якого $y(\cdot) \in \mathcal{K}_+$ та для будь-якого $h \geq 0$ справедливо, що $y_h(\cdot) \in \mathcal{K}_+$, де $y_h(s) = y(h + s)$ при $s \geq 0$. На $\mathcal{K}_+$ визначають трансляційну напівгрупу $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, $T(h)y(\cdot) = y_h(\cdot)$, $h \geq 0$, $y \in \mathcal{K}_+$.

Означення. Функція $y \in C^{loc}(\mathbf{R}; X) \cap L_\infty(\mathbf{R}; X)$ називається повною траєкторією, якщо для будь-якого $h \in \mathbf{R}_+$ $\Pi_+ y_h(\cdot) \in \mathcal{K}_+$, де Π_+ – оператор звуження на проміжок $[0, +\infty)$.

Позначимо через $\mathcal{K}$ сімейство всіх повних траєкторій задачі. Кажуть, що повна траєкторія $\varphi \in \mathcal{K}$ є стаціонарною, якщо $\varphi(t) = z$ для всіх $t \in \mathbf{R}$ і для деякого $z \in X$. (М.Й. Вішик, В.В. Чепижов).

Означення. Множина $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_+$ називається траєкторним атрактором в просторі траєкторій $\mathcal{K}_+$ відповідно до топології $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$, якщо виконуються такі умови:

- $\mathcal{U}$ – компактна в просторі $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$ і обмежена в просторі $L_\infty(\mathbf{R}_+; X)$;
- $\mathcal{U}$ – строго інваріантна множина щодо трансляційної напівгрупи $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, тобто $T(h)\mathcal{U} = \mathcal{U}$ для всіх $h \geq 0$;
- $\mathcal{U}$ – притягуюча множина в просторі траєкторій $\mathcal{K}_+$ в топології $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$, тобто, для будь-якої обмеженої (в просторі $L_\infty(\mathbf{R}_+; X)$) множини $B \subset \mathcal{K}_+$ і довільного числа $M \geq 0$ справджується таке співвідношення:
$$dist_{C([0,M];X)}(\Pi_M T(t)B, \Pi_M \mathcal{U}) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

де Π_M – оператор звуження на проміжок $[0, M]$.

Важливим етапом досліджень є встановлення існування функції типу Ляпунова, що дозволяє отримати ряд структурних властивостей для глобального атрактора.

Означення. $\mathcal{V}: X \to \mathbf{R}$ є функцією типу Ляпунова, якщо:

– $\mathcal{V}$ – неперервна функція;
– $\mathcal{V}(\varphi(t)) \le \mathcal{V}(\varphi(s))$ для довільних $\varphi \in \mathcal{K}$ та $t \ge s \ge 0$;
– якщо $\mathcal{V}(\psi(t))$ є сталою функцією для деякої повної траєкторії ψ і для всіх $t \in \mathbf{R}$, то ψ – стаціонарна.

Означення. Нехай X – банахів простір. Багатозначний напівпотік $\mathcal{G}: \mathbf{R}_+ \times X \to P(X)$ задовольняє flattening-властивість, якщо для кожної обмеженої множини $B \subset X$ та всіх $\varepsilon > 0$ існують $t_0(B, \varepsilon)$ та скінченновимірний підпростір E простору X такі, що для обмеженого проектора $P: X \to E$ множина $P(\bigcup_{t>t_0} \mathcal{G}(t, B))$ – обмежена в просторі X і $(I - P)(\bigcup_{t>t_0} \mathcal{G}(t, B)) \subset B(0, \varepsilon)$.

Виконання flattening-властивості трактується як скінченновимірність динаміки всіх слабких розв'язків задачі з точністю до малого параметра ε.

У **другому розділі** проводиться якісне дослідження динаміки розв'язків таких автономних еволюційних об'єктів: хвильового рівняння з розривною нелінійністю та хвильового рівняння з негладким нелінійним доданком, збуреним адитивним білим шумом.

1. В обмеженій області $\mathrm{Q} \subset \mathbf{R}^n$ з регулярною границею ∂Q розглянемо автономне хвильове рівняння:

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + \beta y_t(x,t) - \Delta y(x,t) = f(y(x,t)), \\ \qquad y(x,t)|_{\partial \mathrm{Q}} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

де $y(x,t)$ – невідома функція стану, визначена на $\mathrm{Q} \times \mathbf{R}_+$, $\beta > 0$ – константа. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – функція взаємодії, яка задавольняє такі умови:

$$\exists D \ge 0\colon\ |f(y)| \le D(1 + |y|),\ \forall y \in \mathbf{R}; \qquad \lim_{|y| \to \infty} \frac{f(y)}{y} > -\lambda_1,$$

де λ_1 – перше власне значення для оператора $-\Delta$ в просторі $H_0^1(\Omega)$.

Припустимо, що $f(s) = f_1(s) - f_2(s)$, $s \in \mathbf{R}$, де $f_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ – неспадні функції, та позначимо

$$\overline{f}(s) \coloneqq \overline{\lim}_{t \to s} f(t), \quad \underline{f}(s) \coloneqq \underline{\lim}_{t \to s} f(t), \quad G(s) \coloneqq \left[\underline{f}(s), \overline{f}(s)\right], s \in \mathbf{R}.$$

Таким самим чином визначаються $\underline{f_i}$ та $\overline{f_i}$, $i = 1,2$. Зауважимо, що

$$[\underline{f}(s), \overline{f}(s)] \subseteq [\underline{f_1}(s), \overline{f_1}(s)] - [\underline{f_2}(s), \overline{f_2}(s)], \quad s \in \mathbf{R}.$$

Розв'язок задачі (2) розумітимемо в сенсі такого означення.

Означення 2.1 Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$. Функція $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in L_\infty[\tau, T; X]$ називається слабким розв'язком задачі (2) на проміжку $[\tau, T]$, якщо існує такий функціонал $l = l(x,t) \in L_2(\tau, T; H)$, $l(x,t) \in G(y(x,t))$ для майже всіх $(x,t) \in \mathrm{Q} \times (\tau, T)$, що для всіх $\psi \in V$ та для всіх $\eta \in C_0^\infty(\tau, T)$ виконується

$$-\int_\tau^T (y_t(x,t), \psi(x))_H \eta_t(t) dt +$$
$$+ \int_\tau^T [\beta (y_t(x,t), \psi(x))_H + (y(x,t), \psi(x))_V + (l(x,t), \psi(x))_H] \eta(t) dt = 0.$$

Розглянемо більш загальне еволюційне включення:

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + \beta y_t(x,t) - \Delta y(x,t) + \left[\underline{f_1}(y), \overline{f_1}(y)\right] - \left[\underline{f_2}(y), \overline{f_2}(y)\right] \ni \bar{0}, \\ y(x,t)|_{\partial Q} = 0. \end{cases}$$

Покладемо

$$G_i(s) := \int_0^s f_i(\xi)d\xi, \;\; J_i(y) := \int_{\mathrm{Q}} G_i(y(x))dx, \;\; J(y) = J_1(y) - J_2(y), \;\; y \in H, \;\; i = 1{,}2.$$

Функціонали G_i та J_i – локально ліпшицеві та регулярні. Теорема Лебурга[1] гарантує існування таких сталих $c_1, c_2 > 0$ та $\mu \in (0, \lambda_1)$, що

$$|J(y)| \leq c_1(1 + \|y\|_H^2), \qquad J(y) \geq -\frac{\mu}{2}\|y\|_H^2 - c_2, \forall y \in H.$$

Гільбертів простір $X = V \times H$ – фазовий простір для задачі (2).

Лема 2.2 Для будь-яких $\tau < T$, $a \in V$, $b \in H$ задача (2) з початковими даними

$$y(\tau) = a, \quad y_t(\tau) = b \tag{3}$$

на проміжку $[\tau, T]$ має слабкий розв'язок $(y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in L_\infty(\tau, T; X)$. Більше того, кожен слабкий розв'язок $(y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ задачі Коші (2), (3) на проміжку $[\tau, T]$ належить простору $C([\tau, T]; X)$, *і* $y_{tt}(\cdot) \in L_2(\tau, T; V^*)$.

Для будь-якого $\varphi_\tau = (a, b)^T \in X$ позначимо множину всіх слабких розв'язків задачі (2) на проміжку $[\tau, T]$ через

$$\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) = \left\{ \varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \;\; - \;\text{слабкий розв'язок} \\ \text{задачі (2) на } [\tau, T], \\ y(\tau) = a, y_t(\tau) = b \end{array} \right\}$$

З регулярності слабкого розв'язку випливає, що $\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) \subset C([\tau, T]; X) = W_\tau^T$.

В дисертаційній роботі отримані апріорні оцінки для слабких розв'язків задачі (2). Встановлено, що трансляція та конкатенація слабких розв'язків є також слабким розв'язком. А також доведено, що будь-який слабкий розв'язок задачі (2) на проміжку [0,T] може бути продовжений до глобального, визначеного на проміжку [0,+∞). Крім того, отримано результати щодо характеру залежності слабких розв'язків від початкових даних.

Для будь-якого $\varphi_0 = (a, b)^T \in X$ позначимо множину всіх слабких розв'язків задачі (2) на проміжку $[0, +\infty)$ через $\mathcal{D}\,(\varphi_0) = \{\varphi(t) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T | (\varphi(t)$ – слабкий розв'язок задачі (2) на проміжку $[0, +\infty)$, $\varphi(0) = \varphi_0\}$.

Визначимо багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ таким чином:

$$\mathcal{G}(t, \varphi_0) = \{\varphi(t) = (y(t), y_t(\mathrm{t}))^T \; | \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}(\varphi_0)\}, \;\; t \geq 0.$$

Зазначимо, що $\mathcal{G}: \mathbf{R}_+ \times X \to P(X)$ є строгим багатозначним напівпотоком. Базуючись на властивостях слабких розв'язків задачі (2) отримано такий результат.

Теорема 2.3 $\mathcal{G}$ – асимптотично компактний багатозначний напівпотік.

Нехай $u = (u_1, u_2)^T \in X$. Визначимо функцію $\mathcal{V}$ таким чином:

$$\mathcal{V}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + J_1(u_1) - J_2(u_1).$$

Лема 2.4 Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$, $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ – розв'язок задачі (2) на проміжку (τ, T) з початковою умовою $\varphi_\tau \in X$, тобто $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$. Тоді функція $\mathcal{V} \circ \varphi: [\tau, T] \to \boldsymbol{R}$ – абсолютно неперервна, і для майже всіх $t \in (\tau, T)$ виконується рівність $\frac{d}{dt}\mathcal{V}(\varphi(t)) = -\beta \parallel y_t(t) \parallel_H^2$.

[1] Clarke, F.H.: Optimization and nonsmooth analysis. John Wiley & Sons Inc., New York (1983)

Лема 2.6 $\mathcal{V}: X \to \boldsymbol{R}$ – функція типу Ляпунова для задачі (2).

Позначимо множину всіх точок спокою для $\mathcal{G}$ через $Z(\mathcal{G})$. Зауважимо, що

$$Z(\mathcal{G}) = \{(\bar{0}, y) | y \in V, -\Delta(y) + \partial J_1(y) - \partial J_2(y) \ni \bar{0}\}.$$

Основні припущення на параметри задачі (2) гарантують обмеженість $Z(\mathcal{G})$ в X.

Грунтуючись на отриманих результатах щодо властивостей слабких розв'язків, існування функції типу Ляпунова, асимптотичної компактності $\mathcal{G}$, встановлено існування та структурні властивості глобального атрактора.

Теорема 2.4 Для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, породженого слабкими розв'язками задачі (2), існує інваріантний компактний в фазовому просторі X глобальний атрактор $\mathcal{A}$; для кожної повної траєкторії $\psi \in \mathcal{K}$ її граничні множини

$$\alpha(\psi) = \{z \in X \mid \psi(t_j) \to z \quad \text{для деякої послідовності } t_j \to -\infty\},$$
$$\omega(\psi) = \{z \in X \mid \psi(t_j) \to z \quad \text{для деякої послідовності } t_j \to +\infty\}$$

– зв'язні підмножини множини точок спокою $Z(\mathcal{G})$, на якій функція $\mathcal{V}$ – стала; якщо множина $Z(\mathcal{G})$ – повністю незв'язна (зокрема, коли $Z(\mathcal{G})$ – зліченна), границі

$$z_- = \lim_{t\to-\infty} \psi(t), \quad z_+ = \lim_{t\to+\infty} \psi(t)$$

існують, і z_-, z_+ – точки спокою.

2. В обмеженій області $Q \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} dy_t(t) + (\beta y_t(t) - \Delta y(t) + f\big(y(t)\big)dt = \phi dw, \\ \qquad\qquad y(t)|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де w — це стандартний Вінерівський процес, $\beta > 0$ і $\phi \in H^2(Q) \cap H_0^1(Q)$ задані, f – неперервна (не обов'язково гладка) функція, яка задовольняє умови

$$|f(y)| \leq C_1(1 + |y|^{\frac{n}{n-2}}), f(y)y \geq C_2(F(y) - 1), F(y) \geq C_3(|y|^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1),$$

де $F(y) = \int_0^y f(s)ds$.

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – сепарабельний банахів простір з борелівською σ-алгеброю $\sigma(X)$, $C(X)$ – множина всіх непорожніх замкнених підмножин в просторі X, (Ω, Φ, P) – ймовірнісний простір, $B_r = \{x \in X | \|x\| \leq r\}$.

Означення 2.3 Відображення $\mathcal{G}: \boldsymbol{R}_+ \times \Omega \times X \mapsto C(X)$ називається багатозначною випадковою динамічною системою, якщо

1. для будь-якого $x \in X$ відображення $(t, \omega) \mapsto \mathcal{G}(t, \omega)x$ – вимірне;
2. $\forall \omega \in \Omega$, $\forall t, s \geq 0$, $\forall x \in X$ виконуються такі співвідношення:

$$\mathcal{G}(0, \omega)x = x, \quad \mathcal{G}(t + s, \omega)x \subseteq \mathcal{G}(t, \theta_s\omega)\mathcal{G}(s, \omega)x.$$

Означення 2.4 Випадкова множина $\mathcal{A}(\omega)$ називається випадковим атрактором для багатозначної випадкової динамічної системи $\mathcal{G}$, якщо для P-майже всіх $\omega \in \Omega$ виконуються такі умови:

1. множина $\mathcal{A}(\omega)$ – компактна;
2. для всіх $t \geq 0$ виконується таке вкладення $\mathcal{A}(\theta_t\omega) \subset \mathcal{G}(t, \omega)\mathcal{A}(\omega)$;
3. $\forall r > 0$ маємо, що $dist(\mathcal{G}(t, \theta_{-t}\omega)B_r, \mathcal{A}(\omega)) \to 0$, при $t \to +\infty$.

В дисертації отримано результат про існування випадкового атрактора для абстрактної випадкової багатозначної динамічної системи.

Теорема 2.5 Припустимо, що багатозначна випадкова динамічна система $\mathcal{G}$ задовольняє такі умови:

1. P-майже скрізь існує така обмежена випадкова множина $B(\omega)$, що для P-

майже всіх $\omega \in \Omega$ та для будь-якого $r > 0$ виконується

$$dist(\mathcal{G}(t, \theta_{-t}\omega)B_r, B(\omega)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty; \tag{5}$$

2. $\forall\ t \geq 0,\ \forall\ \omega \in \Omega$ відображення $\mathcal{G}(t,\omega): X \mapsto C(X)$ є компактнозначним і напівнеперервним зверху;
3. $\forall\ r > 0$ відображення $(t,\omega) \mapsto \overline{\mathcal{G}(t,\omega)B_r}$ – вимірне;
4. для P-майже всіх $\omega \in \Omega$, $\forall\ r > 0$, $\forall\ t_n \nearrow +\infty$ довільна послідовність $\xi_n \in \mathcal{G}(t_n, \theta_{-t_n}\omega)B_r$ – передкомпактна в просторі X.

Тоді множина $\mathcal{A}(\omega) = \overline{\bigcup_{r>0} \Lambda_{B_r}(\omega)}$, де $\Lambda_B(\omega) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \mathcal{G}(t,\theta_{-t}\omega)B}$ є випадковим атрактором для багатозначної випадкової динамічної системи $\mathcal{G}$, причому, він є P-майже скрізь єдиним та мінімальним серед замкнутих множин, що задовольняють співвідношення (5).

Визначимо $W = W(t,\omega)$ як розв'язок задачі $\begin{cases} dW_t(t) + \beta W_t(t) = dw, \\ W(0) = W_t(0) = 0. \end{cases}$ Після заміни змінних $v(t) = y(t) - \phi W(t)$ рівняння (4) перетвориться в систему

$$\begin{cases} v_{tt}(t) + \beta v_t(t) - \Delta v(t) + f\big(v(t) + \phi W(t)\big) = \Delta\phi W(t), \\ v(t)|_{\partial Q} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Нехай $H = L^2(Q)$, $V = H_0^1(Q)$. $\varphi(\cdot) = (v(\cdot), v_t(\cdot))^T$ – слабкий розв'язок випадково збуреної задачі (6) в фазовому просторі $X = V \times H$ з нормою $\|\ \varphi(\cdot)\ \|_X$. Покладемо $\overline{W}(\cdot) = (\phi W(\cdot), \phi W_t(\cdot))^T$ і визначимо відображення

$$\mathcal{G}: \mathbf{R}_+ \times \Omega \times X \mapsto P(X),$$
$$\mathcal{G}(t,\omega)\varphi_0 = \{\varphi(t,\omega,0,\varphi_0) + \overline{W}(t,\omega)\}. \tag{7}$$

На основі теореми 2.5 доведено існування випадкового атрактора для багатозначного стохастичного потоку, породженого досліджуваною задачею, при заданих умовах на функцію взаємодії.

Теорема 2.6 Формула (7) визначає багатозначну випадкову динамічну систему, для якої існує випадковий атрактор в $X = H_0^1(Q) \times L^2(Q)$.

В **третьому розділі** досліджується асимптотична поведінка розв'язків автономного хвильового включення з функцією взаємодії субградієнтного типу.

Нехай $(V;\ H;\ V^*)$ – трійка просторів Гельфанда. Зауважимо, що $V \subset H \subset V^*$, всі вкладення просторів є щільними та компактними.

Розглянемо таку еволюційну задачу:

$$y_{tt}(t) + Ay_t(t) + By(t) + \partial J_1(y(t)) - \partial J_2(y(t)) \ni \bar{0}$$
$$\text{для майже всіх} \quad t > 0, \tag{8}$$

де $A: H \to H$; $B: V \to V^*$ – локально ліпшицеві функціонали, $\partial J_1\big(y(t)\big) - \partial J_2\big(y(t)\big): H \to H$, $J_i: H \to \mathbf{R}$, $i = 1{,}2$ – локально ліпшицеві функціонали, $J_i(y) := \int_\Omega G_i(x, y(x))dx$, $i = 1{,}2$; ∂J_i – субдиференціали Кларка для $J_i(\cdot)$.

Нехай параметри задачі (8) задовольняють такі основні припущення:

а) $A: H \to H$ – такий лінійний симетричний оператор, що існує таке $\beta > 0$, що $(Av, v)_H = \beta\|v\|_H^2$ для всіх $v \in H$;

б) $B: V \to V^*$ – такий лінійний симетричний оператор, що існує таке $c_B > 0$, що $\langle Bv, v\rangle_V \geq c_B\|v\|_V^2$ для всіх $v \in V$;

в) $J_i: H \to \mathbf{R}$, $i = 1{,}2$ – такі функції, що

1) $J_i(\cdot)$, $i = 1,2$ – локально ліпшицеві та регулярні, тобто:
– $\forall x, v \in H$ існують односторонні похідні за напрямком
$$J'_i(x;v) = \lim_{t\to 0}\frac{J_i(x+tv)-J_i(x)}{t},\ \ i = 1,2,$$
– $\forall x, v \in H, J'_i(x;v) = J_i^{\circ}(x;v)$, де
$$J_i^{\circ}(x;v) = \overline{\lim_{y\to x, t\to 0}}\frac{J_i(y+tv)-J_i(y)}{t},\ i = 1,2;$$
2) для $i = 1,2$ існують такі $c_i > 0$, що $\|l\|_H \le c_i(1 + \|v\|_H)\ \forall l \in \partial J_i(v),\ v \in H$;
3) існує таке $c_2^* > 0$, що $(l,v)_H \le \lambda\|v\|_H^2 + c_2^*\ \ \forall l \in \partial J_2(v),\ v \in H$, де $\partial J_i(y) = \{p \in H \mid (p,w)_H \le J_i^{\circ}(y;w)\ \ \forall w \in H\}$ позначають субдиференціали Кларка для $J_i(\cdot)$, $i = 1,2$ в $y \in H$; $\lambda \in (0,\lambda_1)$, $\lambda_1 > 0$: $c_B\|v\|_V^2 \ge \lambda_1\|v\|_H^2\ \forall v \in V$.

Гільбертів простір $X = V \times H$ – фазовий простір для задачі (8). Розв'язок задачі (8) розумітимемо в сенсі такого означення.

Означення. Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$. Функція $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in L_\infty[\tau,T;X]$ називається слабким розв'язком задачі (8) на $[\tau,T]$, якщо існують такі $l_i \in L_2(\tau,T;H)$, $i = 1,2$, $l_i(t) \in \partial J_i(y(t))$ для майже всіх $t \in (\tau,T)$, що для всіх $\psi \in V$ та для всіх $\eta \in C_0^\infty(\tau,T)$ виконується співвідношення
$$-\int_\tau^T (y_t(t),\psi)_H\eta_t(t)dt +$$
$$+\int_\tau^T [(y_t(t),\psi)_H + (y(t),\psi)_H + (l_1(t),\psi)_H - (l_2(t),\psi)_H]\eta(t)dt = 0.$$

Лема 3.1 $\forall\tau < T$, $a \in V$, $b \in H$ задача (8) з початковими даними
$$y(\tau) = a,\quad y_t(\tau) = b \tag{9}$$
на проміжку $[\tau,T]$ має слабкий розв'язок $(y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in L_\infty(\tau,T;X)$. Більше того, кожен слабкий розв'язок $(y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ задачі Коші (8), (9) на проміжку $[\tau,T]$ належить простору $C([\tau,T];X)$, і $y_{tt}(\cdot) \in L_2(\tau,T;V^*)$.

Для довільного $\varphi_\tau = (a,b)^T \in X$ покладемо множину всіх слабких розв'язків задачі (8) $\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) = \{\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \mid \varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ – слабкий розв'язок задачі (8) на проміжку $[\tau,T]$, $\ y(\tau) = a,\ \ y_t(\tau) = b\}$.

В ході дослідження виведені апріорні оцінки для слабких розв'язків задачі (8). Встановлено, що трансляція та конкатенація слабких розв'язків є також слабким розв'язком. Також доведено, що будь-який розв'язок задачі (8) на $[0,T]$ може бути продовжений до глобального, визначеного на $[0,+\infty)$. Крім того, отримані результати щодо характеру залежності слабких розв'язків від початкових даних.

Для будь-якого $\varphi_0 = (a,b)^T \in X$ позначимо множину всіх слабких розв'язків задачі (8) на проміжку $[0,+\infty)$ через $\mathcal{D}(\varphi_0) = \{\varphi(t) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T | (\varphi(t)$ – слабкий розв'язок задачі (8) на проміжку $[0,+\infty)$, $\varphi(0) = \varphi_0\}$.

Визначимо багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ таким чином:
$$\mathcal{G}(t,\varphi_0) = \{\varphi(t) = (y(t), y_t(\mathrm{t}))^T\ | \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}(\varphi_0)\},\ \ t \ge 0. \tag{10}$$
Зазначимо, що багатозначне відображення $\mathcal{G}: \mathbf{R}_+ \times X \to P(X)$ є строгим багатозначним напівпотоком. Базуючись на властивостях слабких розв'язків задачі (8) отримано асимптотичну компактність $\mathcal{G}$.

Теорема 3.3 Багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$, породжений усіма глобально визначеними розв'язками задачі (8), є асимптотично компактним.

Нехай $u = (u_1,u_2)^T \in X$. Визначимо функцію $\mathcal{V}$ таким чином:

$$\mathcal{V}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + J_1(u_1) - J_2(u_1).$$

Лема 3.3 Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$, $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ – розв'язок задачі (8) на проміжку (τ, T) з початковою умовою $\varphi_\tau \in X$, тобто $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$. Тоді функція $\mathcal{V} \circ \varphi: [\tau, T] \to \boldsymbol{R}$ – абсолютно неперервна, і для майже всіх $t \in (\tau, T)$ виконується рівність $\frac{d}{dt}\mathcal{V}(\varphi(t)) = -\beta \parallel y_t(t) \parallel_H^2$.

Лема 3.5 Функція $\mathcal{V}$ – функція типу Ляпунова для задачі (8).

Позначимо множину всіх точок спокою багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ через $Z(\mathcal{G})$. Зауважимо, що $Z(\mathcal{G}) = \{(\bar{0}, y) \mid y \in V, B(y) + \partial J_1(y) - \partial J_2(y) \ni \bar{0}\}$. Основні припущення на параметри задачі (8) гарантують обмеженість множини $Z(\mathcal{G})$ в X.

Отримані результати щодо властивостей слабких розв'язків, існування функції Ляпунова, асимптотичної компактності $\mathcal{G}$ дозволяють встановити існування, структурні властивості глобального та траєкторного атракторів, і взаємозв'язок між ними.

Теорема 3.4 Для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, породженого слабкими розв'язками задачі (8), визначеного формулою (10):

– існує інваріантний компактний в фазовому просторі X глобальний атрактор $\mathcal{A}$; для кожної повної траєкторії $\psi \in \mathcal{K}$ її граничні множини

$$\alpha(\psi) = \{z \in X \mid \psi(t_j) \to z \quad \text{для деякої послідовності}\, t_j \to -\infty\},$$

$$\omega(\psi) = \{z \in X \mid \psi(t_j) \to z \quad \text{для деякої послідовності} \quad t_j \to +\infty\}$$

– зв'язні підмножини множини точок спокою $Z(\mathcal{G})$, на якій функція $\mathcal{V}$ – стала; якщо $Z(\mathcal{G})$ – повністю незв'язна (зокрема, коли $Z(\mathcal{G})$ – зліченна), границі

$$z_- = \lim_{t \to -\infty} \psi(t), \quad z_+ = \lim_{t \to +\infty} \psi(t)$$

існують, і z_-, z_+ – точки спокою; $\varphi(t)$ прямує до точки спокою при $t \to +\infty$ для кожної $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_+$;

– існує траєкторний атрактор $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_+$ в просторі $\mathcal{K}_+$, при цьому виконується наступне співвідношення, що встановлює зв'язок між траєкторним, глобальним атракторами та простором повних траєкторій:

$$\mathcal{U} = \Pi_+\mathcal{K} = \Pi_+\{y(\cdot) \in \mathcal{K} \mid y(t) \in \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Теорема 3.5 Нехай $B_r(x)$ – замкнута куля з центром в точці $x \in X$ радіуса $r > 0$, і нехай виконуються основні припущення на параметри задачі (8). Тоді багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ задовольняє наступну властивість: для кожної обмеженої множини $B \subset X$ та $\varepsilon > 0$ існує момент часу $t_0(B, \varepsilon)$ і скінченновимірний підпростір E в просторі X такий, що для деякого обмеженого проектора $P: X \to E$ множина $P\left(\bigcup_{t \geq t_0} \mathcal{G}(t, B)\right)$ обмежена в просторі X, та $(I - P)(\bigcup_{t \geq t_0} \mathcal{G}(t, B)) \subset B_\varepsilon(\bar{0})$, де I – тотожнє відображення в просторі X.

Крім того, в дисертаційній роботі визначено достатні умови існування рівномірного компактного глобального атрактора для неавтономного випадку.

В **четвертому розділі** пропонується алгоритм дослідження глобальної поведінки розв'язків класів дисипативних динамічних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями. На рис. 1 приведена загальна структурована схема дослідження глобальної поведінки функцій стану.

Загальні класи процесів в складних технічних системах				
Фізико-механічні (гідро-, електромеханічні (зокрема п’єзоелектричні) процеси	Теплові (процеси поверхневого змішувального теплообміну, випарювання, конденсація)	Хімічні (гідроліз, дегідрація, синтез, пероліз, корозія)	Біологічні (біосинтез, процеси біосферного колообігу речовин, процеси, що відбуваються в корі головного мозку)	Дифузійні (абсорбція, адсорбція, діаліз, осмос, екстракція, горіння в пористому середовищі тощо)
Властивості процесів: - автономність, - дисипативність, - нелінійність				
Системи позиціонування, системи стабілізації, гідромеханічні коробки передач тощо	Теплонасосні установки, системи геотермального теплопостачання тощо	Системи переробки складних ефірів, хімікотехнологічні системи синтезу метанолу, аміаку тощо	Біорегенераційні технології (наприклад, штучні космічні екосистеми)	Системи видобутку нафти, кліматологічні моделі, технології медицини тощо

Розв’язання практичних задач

Формалізовані моделі процесів

Існування та властивості множин станів стійкого функціонування систем

Математичні моделі процесів → диференціально-операторні включення

Існування та властивості притягуючих множин розв’язків

Якісний аналіз поведінки функцій стану

Рис. 1 Загальна структурована схема дослідження глобальної поведінки функцій стану

Схема має на меті спрощення процедури вибору функції взаємодії для стабільного функціонування системи, що передбачає: 1) формалізацію досліджуваної системи; 2) якісний аналіз динаміки розв’язків відповідної математичної моделі; 3) висновки. Спрощення полягає в виключенні проміжної ланки 2 для дослідника, якому пропонуються характеристики параметрів досліджуваного об’єкту. В свою чергу, якісний аналіз динаміки розв’язків обґрунтовує вибір функції взаємодії і є важливою складовою досліджень, що дозволяє описати поведінку систем при часі $t \to \infty$.

Розглянемо загальні класи процесів в технічних системах (рис. 1). Зазначимо, що глобальна поведінка функцій стану для дифузійних процесів досліджена в роботах М.З. Згуровського, О.В. Капустяна, П.О. Касьянова, Н.В. Горбань, J. Valero. В даній роботі розглядається клас фізико-механічних процесів, а саме в’язкопружні, що володіють такими властивостями: автономність; дисипативність; нелінійність.

Алгоритм дослідження глобальної динаміки процесу має такий схематичний вигляд (рис. 2): якщо формалізовану модель можна звести до вигляду (2) або (8), і виконуються всі припущення на параметри задачі, тоді для процесу чи поля отримуємо вирішення задач I-III.

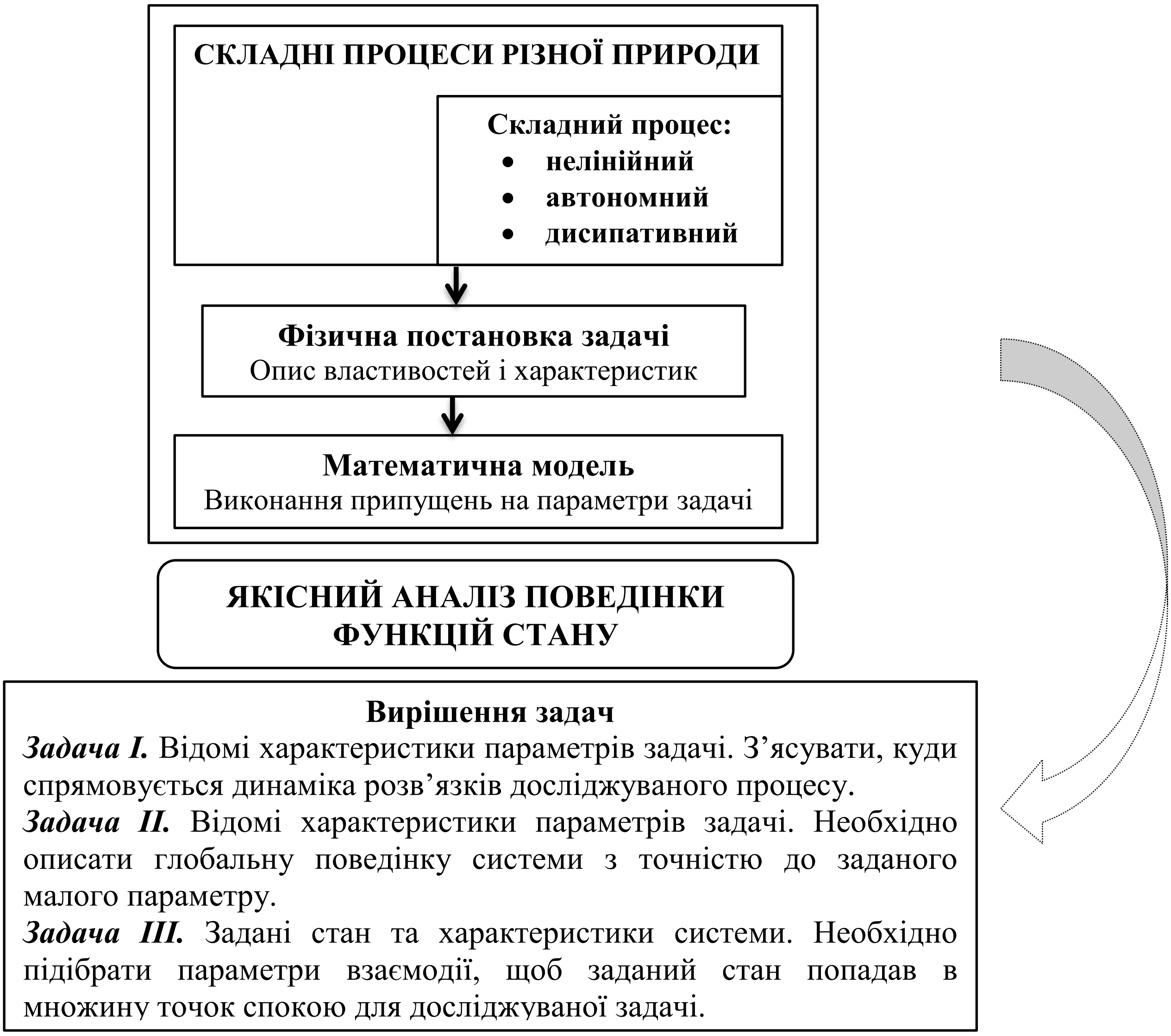

Рис. 2 Структурована схема алгоритму дослідження глобальної динаміки процесу

Вирішення таких завдань для досліджуваних в роботі об'єктів базується на отриманих в розділах 2 і 3 результатах. Таким чином, дослідник, маючи формалізовану модель процесу типу (2) чи (8), що протікає в технічній системі або в її структурному елементі, з параметрами, що задовольняють відповідним основним припущенням, може стверджувати, що функція взаємодії, яка допускає представлення у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів, забезпечує стійкість такої системи або її певної частини. Крім того, він має теоретичні висновки та обґрунтування, необхідні для проведення чисельних розрахунків.

Розглянемо приклад п'єзоелектричної задачі[2], яку за певних припущень на параметри можна звести до задачі (8). Нехай два тіла контактують: одне – в'язкопружне здатне до деформації тіло, що володіє п'єзоелектричними

---

[2] Liu, Z., Migo′rski, S.: Noncoercive Damping in Dynamic Hemivariational Inequality with Application to Problem of Piezoelectricity. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. **9**(1), 129–143 (2008)

властивостями, інше – жорстка опора (див. рис. 3).

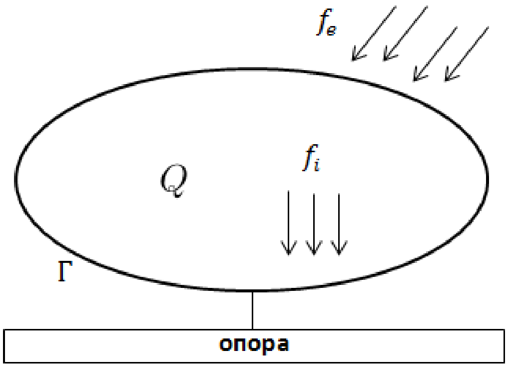

Рис. 3 Схематичне зображення контакту п'єзоелектричного тіла Q та опори

Нехай $\mathbf{R}^d$ – d-вимірний дійсний лінійний простір. Припускається, що тіло в недеформованому стані заповнює відкриту обмежену область $Q \subset \mathbf{R}^d$, $d = 2$ з ліпшицево неперервною границею Г. Нехай границя Г, з одного боку, складається з двох неперетинних вимірних частин Γ_D та Γ_N, $m(\Gamma_D) > 0$, і, з іншого боку, – з двох неперетинних вимірних частин Γ_a та Γ_b, $m(\Gamma_a) > 0$. Припускається, що тіло зафіксоване з боку Γ_D, тоді поле зміщень $u: Y \to \mathbf{R}^d$, $u = u(x,t)$, де $Y = Q \times (0, +\infty)$, зникає там. Розглянемо формалізовану модель п'єзоелектричної контактної задачі:

$$\begin{gathered} u_{tt} - Div\sigma = f_i - \gamma u_t \quad \text{в} \quad Y, \quad divD = 0 \quad \text{в} \quad Y, \\ \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{P}^{\mathrm{T}}E(\varphi) \quad \text{в} \quad Y, \quad D = \mathcal{P}\varepsilon(u) + \mathcal{B}E(\varphi) \quad \text{в} \quad Y, \\ -f_i(x,t) \in \partial G_1(x, u(x,t)) - \partial G_2(x, u(x,t)) \quad \text{в} \quad Y, \\ u = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_D \times (0,T), \qquad n = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_N \times (0,T), \\ \varphi = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_a \times (0,T), \quad Dn = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_b \times (0,T), \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{gathered} \tag{11}$$

де $u: Y \times \mathbf{R}^d$ – поле зміщень, Div – оператор дивергенції для тензорних функцій; $\sigma: Y \to \mathcal{S}_d$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ – тензор напруги; $\gamma \in L^\infty(Q)$ – невід'ємна функція, що характеризує в'язкість (згасання) середовища; div – оператор дивергенції для векторних функцій; $D: Q \to \mathbf{R}^d$, $D = (D_i)$, $i,j = 1,\dots,d$ – поле електричного зміщення; $\mathcal{A}: Q \times \mathbf{S}^d \to \mathbf{S}^d$ – лінійний оператор пружності з тензором пружності $a = (a_{ijkl})$, $i,j,k,l = 1{,}2$; $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u))$, $i,j = 1{,}2$ – лінійний тензор деформації; $\mathcal{P}: Q \times \mathbf{S}^d \to \mathbf{R}^d$ – лінійний п'єзоелектричний оператор з п'єзомодулями $p = (p_{ijk})$, $i,j,k = 1{,}2$; $\mathcal{P}^{\mathrm{T}}: Q \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{S}^d$ – транспонований до $\mathcal{P}$ оператор з коефіцієнтами $p^{\mathrm{T}} = (p^{\mathrm{T}}_{ijk}) = (p_{kij})$, $i,j,k = 1{,}2$; $E(\varphi) = (E_i(\varphi))$, $i = 1{,}2$ – електричне векторне поле; $\varphi: Q \to \mathbf{R}$ – електричний потенціал; $\mathcal{B}: Q \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ – лінійний оператор діелектричної проникності з діелектричними константами $\beta = (\beta_{ij})$, $i,j = 1{,}2$; $G_i(\cdot,\cdot): Q \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, $i = 1{,}2$ – вимірні в (x,u), опуклі в u для майже всіх $x \in Q$ функціонали; $\partial G_i(x,\cdot)$, $i = 1{,}2$ – їх субдиференціали; n – зовнішня одинична нормаль до границі області Г, u_0 – початкове зміщення, u_1 – початкова швидкість.

Проведемо процедуру якісного аналізу для формалізованої моделі контактного процесу між п'єзоелектричним тілом та опорою. Розглянемо дану задачу з матеріальними сталими для п'єзокераміки PZT-4[3,4] (рис. 4).

Коефіцієнти пружності, 10^{10} *N/m*^{2}															
a_{1111}	a_{1112}	a_{1121}	a_{1122}	a_{1211}	a_{1212}	a_{1221}	a_{1222}	a_{2111}	a_{2112}	a_{2121}	a_{2122}	a_{2211}	a_{2212}	a_{2221}	a_{2222}
13.9	0	0	7.43	0	2.56	2.56	0	0	2.56	2.56	0	7.43	0	0	11.5

П'єзомодулі, *C/m*^{2}							
p_{111}	p_{112}	p_{121}	p_{122}	p_{211}	p_{212}	p_{221}	p_{222}
0	12.7	12.7	0	-5.2	0	0	15.1

Діелектричні сталі, 10^{-9} *C/Vm*			
β_{11}	β_{12}	β_{21}	β_{22}
6.45	0	0	5.62

Рис. 4 Матеріальні сталі для PZT-4

Для того, щоб для контактної задачі можна було застосувати отримані в попередньому розділі математичні результати, слідуючи роботі Liu Z. та Migórski S.[5], розглянемо простір $V = \{v \in H^1(Q;\mathbf{R}^d): v = 0 \text{ на } \Gamma_D\} \subset H^1(Q;\mathbf{R}^d)$. Нехай $H = L^2(Q;\mathbf{R}^d)$, $\mathcal{H} = (Q;\mathbf{R}^d)$ – гільбертові простори з скалярними добутками $\langle y,v\rangle_H = \int_Q uvdx$ та $\langle \sigma,\tau\rangle_{\mathcal{H}} = \int_Q \sigma:\tau dx$ відповідно. Тоді $\langle y,v\rangle_V = \langle \varepsilon(y),\varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}$, $\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}$, $y,v \in V$ – скалярний добуток та відповідна норма в V. Отже, $(V,\|\cdot\|_V)$ – гільбертовий простір. Припустимо, що $G_i: Q \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ задовольняють стандартні умови Каратеодорі, та $\exists c^{(i)} \in L_1(Q)$, $\alpha^{(i)} > 0$: $||d^{(i)}||_{\mathbf{R}^d} \leq c^{(i)}(x) + \alpha^{(i)}||y||_{\mathbf{R}^d}$ для м. в. $x \in \Omega$ та $\forall y \in \mathbf{R}^d$, $d^{(i)} \in \partial G_i(x,y)$, де $\alpha^{(2)} > 0$.

Зробимо такі припущення щодо визначаючих тензорів: $a = (a_{ijkl})$, $a_{ijkl} \in L^\infty(Q)$, $a_{ijkl} = a_{klij}$, $a_{ijkl} = a_{jikl}$, $a_{ijkl} = a_{ijlk}$, $a_{ijkl}(x)\tau_{ij}\tau_{kl} \geq \alpha\tau_{ij}\tau_{ij}$ для майже всіх $x \in Q$ та для всіх $\tau = (\tau_{ij}) \in S_+^d$, $\alpha > 0$; $p = (p_{ijk})$, $p_{ijk} \in L^\infty(Q)$; $\beta = (\beta_{ij})$, $\beta_{ij} = \beta_{ji} \in L^\infty(Q)$, $\beta_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq m_\beta||\zeta||^2_{\mathbf{R}^d}$ для м.в. $x \in Q$, $\forall\zeta = (\zeta_i) \in \mathbf{R}^d$, $m_\beta > 0$.

За даних припущень досліджувана задача допускає операторну постановку (8). При наведених вище припущеннях на параметри всі отримані результати попереднього розділу виконуються. Більш того, для будь-якого $\bar{y} \in V$ такого, що $A\bar{y} \in H$, можна знайти такі функціонали G_1 та G_2, які задовольняють основні припущення на параметри, що $Z(\mathcal{G}) = \{\bar{y}\}$. Таким чином, динаміка досліджуваної системи є скінченновимірною з точністю до малого параметру і всі розв'язки потраєкторно виводяться на стаціонарні стани. Отже, поставлені вище припущення на параметри задачі гарантують стійке функціонування системи. В роботі проведено чисельний аналіз п'єзоелектричної задачі. На рисунку 5 зображено розподіл станів задачі (11) для однорідних початкових умов в третьому наближенні.

---

[3] Park, S., Sun, C.: Crack extension in piezoelectric materials. SPIE. Smart Materials. **2189**, 357–368 (1994)

[4] Wang, X.D., Jiang, L.Y.: Coupled behaviour of interacting dielectric cracks in piezoelectric materials. International Journal of Fracture. **132**, 115–133 (2005)

[5] Liu, Z., Migo′rski, S.: Noncoercive Damping in Dynamic Hemivariational Inequality with Application to Problem of Piezoelectricity. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. **9**(1), 129–143 (2008)

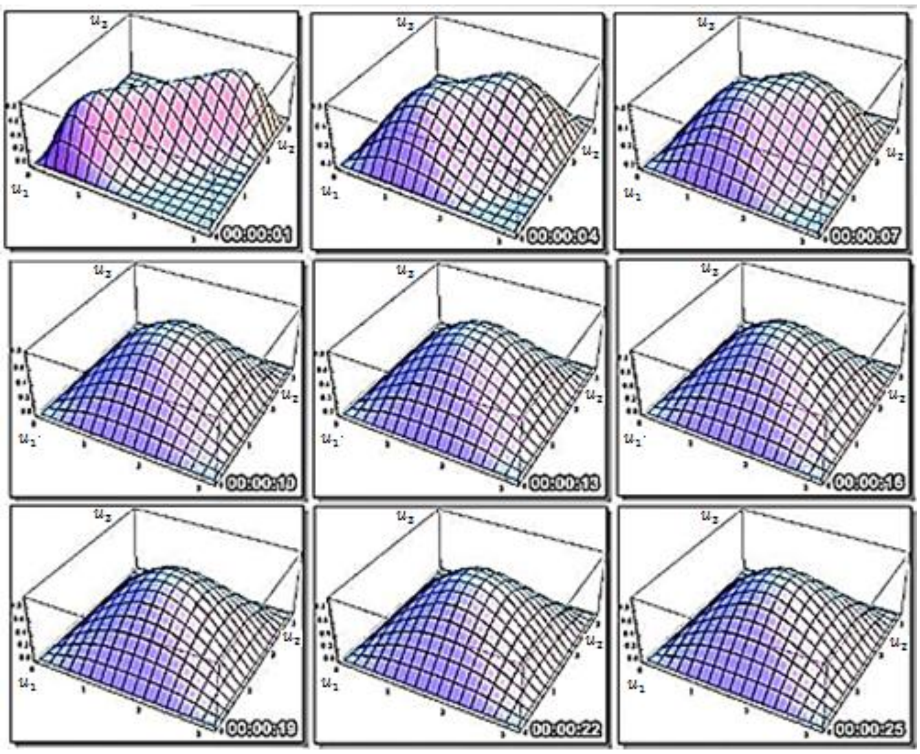

Рис. 5 Розподіл станів задачі (11) в часі $t \in (0,25]$ для однорідних початкових умов: третє гальоркінське наближення для функцій стану

Чисельне дослідження наочно підтверджує стабілізацію станів системи з певного моменту часу, теоретично обгрунтовану в дисертаційній роботі.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішена проблема дослідження асимптотичної поведінки розв'язків класу дисипативних динамічних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями методами теорії глобальних та траєкторних атракторів нескінченновимірних динамічних систем.

Основні висновки і підсумки роботи полягають у наступному:

- досліджено якісну поведінку слабких розв'язків еволюційної системи хвильового типу з розривною нелінійністю в скалярному випадку, а саме встановлені властивості та оцінки для слабких розв'язків, з'ясовано характер залежності слабких розв'язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування компактного інваріантного глобального атрактора для слабких розв'язків та отримано його структурні властивості;
- досліджено асимптотичну поведінку розв'язків стохастично збуреної еволюційної задачі хвильового типу, а саме доведено існування випадкового атрактора для абстрактної багатозначної динамічної системи, що дозволило отримати існування випадкового атрактора для початкової задачі;
- встановлено умови існування та структурні властивості притягуючих множин для диференціально-операторного включення хвильового типу, а саме встановлені властивості та оцінки для слабких розв'язків, з'ясовано характер залежності слабких розв'язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування глобального та траєкторного атракторів,

встановлено взаємозв'язок між ними та простором повних траєкторій, встановлено структурні властивості глобального атрактора, доведено скінченновимірність з точністю до малого параметра динаміки розв'язків; визначено достатні умови існування рівномірного компактного глобального атрактора у неавтономному випадку;

— побудувано алгоритм розв’язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями, який може застосовуватись до класів математичних моделей, що описують поведінку складних процесів та полів різної природи; запропонована процедура виключає залучення дослідника до складних та громіздких математичних міркувань: якщо математична модель процесу зводиться до досліджуваних в даній роботі об’єктів і виконуються відповідні основні припущення на параметри задачі, то існує притягуюча множина для усіх розв’язків задачі, усі розв’язки прямують до множини точок спокою, а динаміку процесу можна описати за допомогою скінченної кількості параметрів;

— отримані результати роботи застосовані до контактної п’єзоелектричної задачі.

Отримані результати можуть бути використані в процесах керування для зменшення або компенсації небажаних ефектів, для обґрунтування чисельних алгоритмів пошуку слабких розв’язків, при виведенні систем на задані стаціонарні рівні.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Iovane, G., Kapustyan, O.V., Paliichuk, L.S., Pereguda, O.V.: On random attractor of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. System Research and Information Technologies. **1**, 87–96 (2013) (індексується Google Scholar) Особистий внесок: доведено існування випадкового атрактора для абстрактної багатозначної динамічної системи, та випадкового атрактора для напівлінійного хвильового рівняння з негладким нелінійним доданком, збуреним адитивним білим шумом.
2. Gorban, N.V., Kapustyan, O.V., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S.: On Global Attractors for Autonomous Damped Wave Equation with Discontinuous Nonlinearity. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 221–237. Springer, Cham (2014) (іноземне видання, входить в Scopus, Google Scholar, SpringerLink) Особистий внесок: для автономного хвильового рівняння з розривною нелінійністю встановлені властивості та оцінки для слабких розв’язків, з’ясовано характер залежності слабких розв’язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування компактного інваріантного глобального атрактора для усіх слабких розв'язків та отримано його структурні властивості.
3. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S.: Automatic feedback control for one class of contact piezoelectric problems. System research and information technologies. **1**, 56–68 (2014) (індексується Google Scholar) Особистий внесок: для автономного хвильового включення з функцією взаємодії субградієнтного

типу встановлені властивості та оцінки для слабких розв’язків, з’ясовано характер залежності слабких розв’язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування глобального атрактора та встановлено його структуру.

4. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Tkachuk, A.M.: Dynamics of Solutions for Controlled Piezoelectric Fields with Multivalued ``Reaction-Displacement" Law. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 30, pp. 267–276. Springer, Cham (2015) (іноземне видання, входить в Scopus, Web of Science, Google Scholar, SpringerLink) Особистий внесок: для автономного хвильового включення з функцією взаємодії субградієнтного типу встановлено скінченновимірність з точністю до малого параметра динаміки розв'язків, досліджено потраєкторну динаміку розв’язків.
5. Zgurovsky, M.Z., Gluzman, M.O., Gorban, N.V., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Khomenko, O.V.: Uniform global attractor for non-autonomous dissipative dynamical systems. DCDS. Series B. **22**(5), 2053–2065 (2017) (іноземне видання, входить в Scopus, Web of Science, Google Scholar, SCImago) Особистий внесок: визначено достатні умови існування рівномірного компактного глобального атрактора у неавтономному випадку.
6. Касьянов, П.О., Палійчук, Л.С.: Потраєкторна поведінка класу керованих п'єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом. Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». **2**, 21–26 (2014) (індексується Google Scholar) Особистий внесок: для хвильового включення з функцією взаємодії субградієнтного типу встановлено існування траєкторного атрактора, встановлено взаємозв'язок між атракторами та простором повних траєкторій задачі.
7. Paliichuk, L.S.: Qualitative behavior of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. In: Збірник тез Третьої Міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики, Києво-Могилянська академія, Київ, 25–27 квітня 2013
8. Палійчук, Л.С.: Глобальні атрактори для автономного хвильового рівняння з розривною не лінійністю. Збірник тез 15-ої Міжнар. конф. «Системний аналіз та інформаційні технології «САІТ», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 27–31 травня 2013
9. Касьянов, П.О., Горбань, Н.В., Палійчук, Л.С., Капустян, О.В.: Глобальні атрактори для автономного хвильового рівняння з розривною не лінійністю. Збірник тез Всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми у вищій школі», НУХТ, Київ, 26–27 червня Особистий внесок: для хвильового рівняння з розривною нелінійністю встановлені властивості та оцінки для слабких розв’язків, з’ясовано характер залежності слабких розв’язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, компактного інваріантного глобального атрактора для слабких розв'язків, отримано його структурні властивості.

10. Paliichuk, L.S.: On global attractors for autonomous damped wave equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of Crimea International Mathematical Conference ``CIMC-2013'', V.I. Vernadsky Crimean National University, Sudak, 22 September – 4 October 2013
11. Палійчук, Л.С.: Якісна поведінка розв'язків класу керованих п'єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом. Збірник тез 16-ої Міжнар. конф. «Системний аналіз та інформаційні технології «САІТ», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 26–30 травня 2014
12. Paliichuk, L.S.: On the limit cycles for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of 17-th Intern. Conf. ``System Analysis and Information Technologies'', ESC ``IASA'' of NTUU ``KPI'', Kyiv, 22–25 June 2015
13. Paliichuk, L.S.: The long-term forecasts for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of third International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V.S. Melnik ``Nonlinear analysis and applications'', ESC ``IASA'' of NTUU ``KPI'', Kyiv, 1–3 April 2015
14. Paliichuk, L.S.: Dynamics of weak solutions for second-order autonomous evolution equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 18–23 September 2017

АНОТАЦІЯ

Палійчук Л.С. Багатозначний аналіз еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2018 р.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв’язків класу дисипативних динамічних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями. В обмеженій області досліджено якісну поведінку слабких розв’язків еволюційної системи хвильового типу з розривною нелінійністю в скалярному випадку та поширено отримані результати на більш загальне диференціально-операторне включення. Досліджено асимптотичну поведінку розв’язків стохастично збуреної дисипативної динамічної системи. Побудувано алгоритм розв’язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями, який може застосовуватись до класів математичних моделей, що описують поведінку процесів та полів різної природи. Отримані результати застосовано до дослідження п’єзоелектричної системи. Це дозволило забезпечити стійке функціонування досліджуваного об’єкту. Отримані теоретичні результати можуть бути використані в процесах керування для зменшення або компенсації небажаних ефектів, для обґрунтування чисельних алгоритмів пошуку слабких розв’язків, при виведенні досліджуваних систем на задані стаціонарні рівні.

Ключові слова: глобальна динаміка функцій стану, розривна функція взаємодії, автономні еволюційні рівняння та включення другого порядку, глобальний атрактор, траєкторний атрактор, асимптотична поведінка розв’язків.

АНОТАЦИЯ

Палийчук Л.С. Многозначный анализ эволюционных систем волнового типа с нерегулярными ограничениями. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 – системный анализ и теория оптимальных решений. – Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, 2018 р.

Диссертационная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений классов диссипативных динамических систем волнового типа с нерегулярными ограничениями. В ограниченной области исследовано качественное поведение слабых решений эволюционной системы волнового типа с разрывной нелинейностью в скалярном случае и распространено полученные результаты на более общее дифференциально-операторное включение. Исследовано асимптотическое поведение решений стохастически возмущенной диссипативной динамической системы. Построено алгоритм решения задач исследования глобального поведения функций состояния для эволюционных задач с нерегулярными ограничениями, который может применяться для широких классов математических моделей. Полученные в диссертационной работе теоретические результаты применены к исследованию сложной пьезоэлектрической системы. Это позволило обеспечить устойчивое функционирование исследуемого объекта. Полученные теоретические результаты могут быть использованы в процессах управления для уменьшения нежелательных эффектов, для обоснования многочисленных алгоритмов поиска слабых решений, при выведении исследуемых систем на заданные стационарные уровни.

Ключевые слова: глобальная динамика функций состояния, разрывная функция взаимодействия, автономные эволюционные уравнения и включения второго порядка, глобальный аттрактор, траекторных аттрактор, асимптотическое поведение решений.

ABSTRACT

Paliichuk L.S. Multivalued analysis for evolution systems of wave type with irregular conditions. – Manuscript.

The dissertation for a scientific degree of the Candidate of Physical and Mathematical Science on the specialty 01.05.04 – System analysis and optimal decisions theory. – National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, 2018.

The dissertation work is devoted to the study of asymptotic behavior of solutions for classes of dissipative dynamical systems of wave type with irregular restrictions.

The research methods are based on the use of the principles of the theory of global and trajectory attractors for multi-valued semi-flows, methods of system, nonlinear, and multi-valued analysis, and the principles of the theory of partial differential equations.

In a bounded domain the qualitative behavior of weak solutions for autonomous evolution system of wave type with discontinuous nonlinearity in the scalar case is studied. The properties and estimates for weak solutions are established. The nature of the dependence of weak solutions on the initial data is defined. The existence of Lyapunov

type function is obtained. The existence of a compact invariant global attractor for all weak solutions is proved, and its structural properties are obtained.

The asymptotic behavior of solutions of a stochastically perturbed dissipative dynamical system is studied. The existence of a random attractor for an abstract non-compact multivalued dynamical system is proved. This allows obtaining the existence of a random attractor for a semi-linear wave equation with a non-smooth nonlinear term disturbed by additive white noise.

In a bounded domain the qualitative behavior of weak solutions for autonomous evolution inclusion of wave type with interaction function of sub-gradient type is investigated. The properties and estimates for weak solutions are established. The nature of the dependence of weak solutions on the initial data is defined. The existence of the Lyapunov type function is obtained. The existence of a compact invariant global attractor for all weak solutions is proved, and its structural properties are obtained. Moreover, the existence of trajectory attractor is proved. The relationship between global, trajectory and the space of complete trajectories is established. The finite-dimensionality within a small parameter of the dynamics of solutions for the investigated object is established. In addition, the sufficient conditions for the existence of a uniform compact globular attractor in a non-autonomous case are determined.

The algorithm for solving problems of global behavior investigation of state functions for problems with irregular restrictions is built. This algorithm can be applied to classes of mathematical models that describe the behavior of complex processes and fields of different nature.

The obtained theoretical results are applied to the study of complex piezoelectric system, which allows, taking into account the definite parameters of the problem, to ensure the stable functioning of the investigated object.

The work is theoretical and practical. Its results are substantially complemente and generalize a mathematical apparatus for studying the qualitative behavior of solutions for classes of autonomous evolution problems of wave type with irregular conditions in bounded domains in cases where the conditions on the parameters of the problem do not guarantee the uniqueness of the solution of the corresponding Cauchy problems. These results can be used in mathematical modeling of complex evolution processes with nonsmooth or discontinuous interaction functions. In addition, the algorithm developed in the dissertation paper for solving the problems of studying the global behavior of state functions for evolution problems with irregular constraints has been used in the study of a complex piezoelectric system and can be applied to other classes of complex processes and fields of different nature.

The obtained theoretical results can be used in the control processes to reduce or compensate the undesirable effects, to substantiate the numerical algorithms for finding weak solutions, to derivate the studied systems at given stationary levels.

Keywords: global dynamics of state functions, discontinuous interaction function, second order autonomous evolution equations and inclusions, global attractor, trajectory attractor, asymptotical behavior of solutions.